Hoffman-Singleton-gráf

Petersen-gráf

Tétel: K_{10} nem bontható fel három éldiszjunkt Petersen-gráf uniójára.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy sikerült felbontani K_{10} három éldiszjunkt Petersen-gráf uniójára. Ezekre a Petersen-gráfokra úgy gondolunk, mint piros, kék és zöld Petersen-gráfra.

Legyen A a K_{10} egy tetszőleges csúcsa. Legyen P_1, P_2, P_3 a piros, K_1, K_2, K_3 a kék és Z_1, Z_2, Z_3 a zöld Petersen-gráfban az A szomszédai.

Vizsgáljuk a P_1, P_2, P_3 és a K_1, K_2, K_3 csúcsok által meghatározott páros gráfot. Az AK_i él nincs benne a piros Petersen-gráfban, így létezik pontosan egy kettő hosszú piros út A és K_i között vagyis K_i pontosan egy P_j-vel van összekötve. Tehát ebben a páros gráfban pontosan három piros él van, minden K_i-hez pontosan egy. Hasonlóan az is látható, hogy pontosan három kék él megy ebben a páros gráfban, tehát pontosan három zöldnek kell mennie, mivel összesen kilenc él megy a három-három csúcs között. Azonban erre a hat csúcsra úgy is tekinthetünk, hogy a zöld Petersen-gráf A csúcsát és a szomszédjait elhagyjuk, a maradék hat csúcs egy hat hosszú kört alkot a zöld Petersen-gráfban. Így a $\{P_1, P_2, P_3\}$, $\{K_1, K_2, K_3\}$ tekinthetünk úgy, mint a hat hosszú kör egy olyan vágása ami pontosan három élt tartalmaz. Ez azonban nem lehet, mert egy kör minden vágása páros sok élt tartalmaz.

Ez az ellentmondás bizonyítja a tételt.

Tétel: K_{10} lefedhető hat Petersen-gráffal, hogy minden él pontosan két Petersen-gráfban legyen benne.

Bizonyítás: Legyen a K_{10} csúcsai az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz két három elemű halmazra való particiói, például $A_1 = \{1, 2, 3\}\{4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 2, 4\}\{3, 5, 6\}$.

Az A_i-ból megkapható A_j pontosan két elem megcserélésével, legyen A_iA_j él éppen abban a két gráfban, amelyeket megcserélünk. Tehát például A_1A_2 a 3. és 4. gráfban. Megmutatjuk, hogy minden ilyen gráf Petersen-gráf.

Elegendő megmutatni, hogy az első gráf Petersen-gráf, a többi a kostrukció szimmetriái miatt izomorf vele. Hagyjuk meg minden particióból csak azt a három elemű halmazt amelyik az 1-est tartalmazza, ezekből pedig eltöröljük az 1-est. A maradék két elemű halmazok a $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ összes részhalmaza, kettő pontosan akkor van összekötve ha diszjunktak, mert éppen ez jelenti azt, hogy az 1-est megcseréltük egy másik elemmel. Ez meg éppen a Petersen-gráf egyik ismert konstrukciója.

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Független halmazok

Tétel: Legyen G erősen reguláris gráf (v, d, λ, μ) paraméterekkel. F pedig a G egy független halmaza. Ekkor

$$|F| \leq \frac{v\mu + \mu - d - d^2 + \sqrt{(v\mu + \mu - d - d^2)^2 + 4v\mu(d - \mu)}}{2\mu}$$

Egyenlőség esetén minden G/F belinek ugyanannyi F-beli szomszédja van.

Bizonyítás: Legyen $x \in G/F$-nek $r(x)$ darab F-beli szomszédja. Ekkor $\sum_{x\in G/F} r(x) = e(F, G/F) = d|F|$. Másrészt $u, v \in F$ nincs összekütve, így $\sum_{x\in G/F} \binom{r(x)}{2} = \mu\binom{|F|}{2}$ Tehát

$$\sum_{x\in G/F} r(x)^2 = \mu|F|(|F| - 1) + d|F|$$

Így

$$\mu|F|(|F| - 1) + d|F| = \sum_{x\in G/F} r(x)^2 \geq \frac{(\sum_{x\in G/F} r(x))^2}{|G/F|} = \frac{d^2|F|^2}{|G/F|}$$

Azaz

$$0 \geq \mu|F|^2 - (v\mu + \mu - d - d^2)|F| - v(d - \mu)$$

Ebből következik az állítás. Egyenlőség esetén minden becslésnél egyenlőség áll, speciálisan minden $r(x)$ megegyezik.

Következmény: A Petersen-gráf legnagyobb független halmaza legfeljebb négy elemű és ha F egy négy elemű független halmaz akkor minden nem F-beli csúcsnak pontosan két szomszédja F-beli. A Hoffman-Singleton gráf legnagyobb független halmaz márete legfeljebb 15 csúcsú és ha F független halmaz mérete 15 akkor minden nem F-belinek pontosan három F-beli szomszédja van. Ha létezik az utolsó 3250 csúcsú Hoffman-Singleton gráf akkor legnagyobb független halmaz mérete legfeljebb 400 csúcsú és ha F egy 400 csúcsú független halmaz akkor minden nem F-belinek pontosan 8 F-beli szomszédja van.

Megjegyzés: A Petersen-gráf és a Hoffman-Singleton-gráfnak a legnagyobb független halmaznak valóban 4 illetve 15 csúcsa van.

Tétel: G gráf erősen reguláris gráf (v, d, λ, μ) paraméterekkel. Legyen $G' \subset G$ szintén erősen reguláris gráf (v', d', λ, μ) paraméterekkel és $(d - d' + 1)v' = v$. Ekkor minden $x \notin G/G'$, x pontosan egy G'-belivel van összekötve.

Bizonyítás: x legfeljebb eggyel lehet összekötve G'-beli csúcsok közül, mert ha $(x, p), (x, q) \in E(G)$, $p, q \in G'$ akkor p, q-nak $\lambda + 1$ illetve $\mu + 1$ szomszédja lenne aszerint, hogy össze van kötve vagy nem, ugyanis G'-ben λ illetve μ szomszédja.

Tehát $x \in G/G'$-re $e(x, G') \leq 1$ másrészt

$$(d - d')|G'| = \sum_{z\in G'} e(z, G/G') = e(G', G/G') = \sum_{y\in G/G'} e(y, G') \leq |G/G'|$$

Mivel $(d-d'+1)v' = v$ így mindenhol egyenlőségnek kell állnia, azaz minden $x \in G/G'$ esetén $e(x,G') = 1$.

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Következmény: Legyen P Petersen-gráf, C_5 egy 5-hosszú köre, ekkor minden nem C_5-beli csúcsnak pontosan egy szomszádja C_5-beli. Legyen HS a Hoffman-Singleton gráf, P egy Petersen-részgráfja akkor minden nem P-beli csúcsnak pontosan egy P-beli szomszédja van.

Tétel: Legyen $F \subset G$ független halmaz olyan, hogy minden $x \in G/F$-nek pontosan s F-belivel van összekötve. $G' \subset G$ d-reguláris gráfra pedig teljesül, hogy minden $y \in G/G'$ pontosan r G'-belivel van összekötve. Ekkor $(s-r+d)|G' \cap F| = s|G'| - r|F|$.

Bizonyítás: Legyen $G' \cap F = K$. Ekkor $e(G'/K, F) = |G'/K| \cdot s$. Másrészt

$$e(G'/K, F) = e(G'/K, F/K) + e(G'/K, K)$$

Itt $e(G'/K, F/K) = e(G', F/K) = r|F/K|$, mert F független halmaz. Továbbá $e(G'/K, K) = |K|d$, mert G' d-reguláris és K független halmaz. Tehát $s(|G'| - |K|) = r(|F| - |K|) + |K|d$, azaz $s|G'| - r|F| = (s-r+d)|K|$.

Ezzel kész vagyunk.

Következmény: Legyen F a Hoffman-Singleton-gráf egy 15 csúcsú független halmaza, P pedig egy Petersen részgrafja, ekkor $|F \cap P| = 3$.

Hoffman-Singleton-gráf konstrukciója

Tétel: Legyen G gráf d-reguláris $v = d^2 + 1$ csúcsú gráf, amelyben nincs háromszög és négy hoszú kör. Ekkor G erősen reguláris gráf $(v, d, 0, 1)$ paraméterekkel.

Bizonyítás: Az élek száma $vd/2$. Számoljuk le a cseresznyék számát. Ez egyrészt $v\binom{d}{2}$. Másrészt mivel nincs háromszög a gráfban két összekötött csúcsra nem illeszkedhet cseresznye, és mivel nincs négy hoszú kör a gráfban, így két összekötetlen csúcsra is legfeljebb egy cseresznye illeszkedhet. Tehát a cseresznyék cs számára tudjuk, hogy

$$v\binom{d}{2} = cs \leq \binom{v}{2} - \frac{vd}{2} = v\binom{d}{2}$$

Tehát mindenhol egyenlőségnek kell állnia, speciálisan két összekötetlen csúcsra pontosan egy cseresznye illeszkedik. Tehát G valóban erősen reguláris gráf $(v, d, 0, 1)$ paraméterekkel.

Fano-síkok. Legyen F egy Fano-sík, ennek automorfizmus csoporja 168 rendű egyszerű csoport ami, így benne van az A_7-ben. Tehát van arról beszélni, hogy a Fano-sík hét csúcsának páros permutációi, illetve páratlan permutációi. Az előbbieket pozitív Fano-síkoknak, utóbbiakat negatív Fano-síkoknak nevezzük. Mindkettőből $\frac{2520}{168} = 15$ van és halmazukat F^+ illetve F^--szal jelöljük. A továbbiakban egy Fano-síkot úgy tekintünk, mint az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ hét darab olyan háromelemű részhalmaza (egyenesek), hogy bármely kettő metszete egyelemű. Így például két Fano-sík metszete azon háromelemű halmazok halmaza, amely mindkettőben benne van. A háromelemű halmazokat egyeneseknek hívjuk.

Tétel: 1) Legyen $F_1, F_2 \in F^+$. Ekkor $|F_1 \cap F_2| = 1$.

2) Legyen $F_1 \in F^+$, $F_2 \in F^-$ akkor $|F_1 \cap F_2|$ egyenlő 0 vagy 3. Egy $F_1 \in F^+$-beli pontosan hét darab $F_j \in F^-$ metsz három egyenesben.

Bizonyítás: 1) Először megmutatjuk, hogy $|F_1 \cap F_2| \leq 1$ ugyanis ha lenne két közös egyenesük, akkor a két egyenesre nem illeszkedő két pontnak pontosan az egyik permutációja lesz F^+-ban, vagyis a két Fano-sík megegyezik. (Itt hallgatólagosan kihasználtuk, hogy a Fano-sík automarfizmuscsoportja megengedi, hogy tetszőleges egyenespárt átvigyünk tetszőleges egyenespárba.)

Másrészt minden egyenes (háromelemű halmaz) pontosan három pozitív Fano-síkban van benne, ugyanis hat darab Fano-síkban van benne, amiből három pozitív, három negatív. Számoljuk le az $S = \{(e, F_i, F_j) | e \in F_i \cap F_j,\ F_i, F_j \in F^+\}$ Ekkor

$$\binom{3}{2}\binom{7}{3} = |S| = \sum_i \sum_j |F_i \cap F_j| \leq \binom{15}{2}$$

Mivel mindkét oldalon 105 áll, így mindenhol egyenlőségnek kell állnia. Tehát minden i, j-re $|F_i \cap F_j| = 1$. 2) hasonlóan bizonyítható.

Konstrukció Megkonstruáljuk az $(50, 7, 0, 1)$ paraméterekhez tartozó erősen reguláris gráfot, az ún. Hoffman-Singleton-gráfot. A független halmazok című rész egyik tétele miatt ennek legfeljebb 15 független csúcsa van, látni fogjuk, hogy ennek pontosan 15 független csúcsa van.

Legyen a gráf 50 csúcsa $F_1, F_2, \dots F_{15}$ ahol $F_i \in F^+$ és $e_1, e_2, \dots, e_{35}$ az $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ három elemű részhalmazai (egyenesek). Az e_i akkor van összekötve e_j-vel ha mint három elemű részhalmazok diszjunktak. Az F_i pedig akkor van összekötve e_j-vel ha $e_j \in F_i$. Két F^+-belit nem kötünk össze, így ezek egy 15 csúcsú független halmazt fognak alkotni.

Az $F_i \in F^+$ foka 7, ugyanis 7 egyenese van. Az e_j foka is 7, ugyanis három Fano síkban van benne és 4 háromelemű halmaztól diszjunkt. A gráfban nincs háromszög, mert egy háromszögben legfeljebb egy F_i lehet, mert azok nincsenek összekötve és ha egy F_i van benne akkor a háromszög másik két csúcsa F_i-nek egyenesei, így nem diszjunktak. Három háromelemű páronként diszjunkt halmaz pedig nem fér el 7 elemű halmazon. Tehát háromszög nincs a gráfban.

Megmutatjuk, hogy négy hosszú kör sincsen. Egy négy hosszú körnek legfeljebb két csúcsa lehet F^+-beli, de pontosan kettő sem lehet, mert akkor azok a körnek átellenes csúcsainak kéne lennie, a másik két csúcsnak pedig olyan egyeneseknek, amelyek mindkettőben benne vannak, de $|F_i \cap F_j| = 1$ miatt ez nem lehet. Tehát legalább három egyenesnek kéne lennie a négy hosszú körben, így van két átellenes csúcsa ami egyenes. Ha a két háromelemű halmaz metszete két elemű akkor a közös szomszédjuk a két háromelemű halmaz négy elemű uniójának komplementere. Ha a két háromelemű halmaz metszete egy elemű akkor pontosan egy Fano-sík a közös szomszéd. Tehát nincs négy hosszú kör a gráfban, így ez valóban (50,7,0,1) paraméterű erősen reguláris gráf.

Tizenöt iskolás lány Legyen egy 15 csúcsú teljes gráf csúcsai az F^+ elemei és színezzük az F_iF_j élet az $F_i \cap F_j$ egyenessel, mivel egy egyenest pontosan három pozitív Fano sík tartalmaz, így egy egyenes egy háromszög színezését adja. Tehát megadtnk egy Steiner rendszert 15 ponton, később látni fogjuk, hogy ennek a Steiner rendszernek további tulajdoságai is vannak.

Tétel: Legyen $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ és $M = \{1,2,\dots,15\}$. Ekkor létezik $\alpha : \binom{S}{3} \to \binom{M}{3}$, hogy $A_i, A_j \in \binom{S}{3}$ esetén $|A_i \cap A_j| = 1 \Rightarrow |\alpha(A_i) \cap \alpha(A_j)| = 1$ továbbá $\alpha(A_i)$ halmazok Steiner-rendszert alkotnak M-en.

Kirkman tiszteletes híres problémája, hogy meg lehet-e szervezni tizenöt iskolás lány délutáni sétáját hét napon át úgy, hogy minden nap öt darab hármas sorban sétálnak a lányok és bármely két lány pontosan egyszer sétál azonos sorban. Vagyis a feladat azt kívánja meg, hogy egy alkalmas Steiner-rendszert bontsunk fel hét darab egyenként párhuzamos hármasokból álló rendszerre.

A fenti Steiner-rendszert fogjuk felbontani hét ilyen rendszerre. Ehhez elég az $\binom{S}{3}$ hét darab rendszerre felbontani, hogy minden rendszerben az öt darab számhármas olyan legyen, hogy bármely kettő metszete 0 vagy 2 elemű, ekkor ugyanis az α-nál vett képük diszjunktak, mert 1 elemű nem lehet és a képek Steiner-rendszert alkotnak így bármely két képhármasnak legfeljebb egy metszete lehet. Úgy adunk meg öt darab számhármast hogy bármely kettő metszete 0 vagy 2 elemű legyen, hogy veszünk egy számhármast és a tőle diszjunkt számhármasokat, ekkor ez utóbbiak közül bármely kettőnek a metszete két elemű. Az először kiválasztott hármast a rendszer vezetőjének hívjuk. Úgy kell kiválasztani hét darab vezetőt, hogy a hozzájuk tartozó rendszerek páronként diszjunktak legyenek. Talán már nem is meglepetés, hogy egy Fano-sík hét darab egyenese megfelel a hét darab vezetőnek. Valóban ha adott egy Fano-sík és annak három pontja akkor azok vagy egy egyenest alkotnak (és ez minden másik egyenest metsz így más rendszerben nincs benne) vagy pontosan egy egyenes kerüli el, így ez ezen egyeneshez tartozó rendszerben van benne.

Hoffman-Singleton gráf maximális független részhalmazai

A független halmazok című rész egyik tétele szerint a Hoffman-Singleton gráf maximális F független részhalmazai legfeljebb 15 csúcsúak és ha ekkorák akkor minden más csúcsnak pontosan ugyanannyi F-beli szomszédja van, nevezetesen három.

Láttuk, hogy a 15 darab Fano-sík egy 15 csúcsú független halmazt alkot. Most leírjuk az összes független halmazt.

1.eset: (1 darab) A 15 darab F_i egy 15 csúcsú független halmazt alkot.

2.eset: (7 darab) Azon háromelemű halmazok (egyenesek) amelyek egy adott elemet (pl.: 1-est tartalmazzák), ez $\binom{6}{2} = 15$ elemű halmaz, semely kettő nem diszjunkt, így ezek valóban egy 15 elemű független halmazt alkotnak. Ilyenből hét darab van aszerint, hogy az $1, 2, \ldots, 7$ közül melyik a közös elem. Ezen független halmazok mindegyike diszjunkt az 1.esetbelitől.

3.eset: (15 darab) Egy $F \in F^-$ pontosan 7 darab $F_i \in F^+$ metsz három elemben, a többi 8-at nem metszi. Legyen tehát a 15 csúcsú független halmaz az F 7 egyenese és a 8 $F_j \in F^+$ amit nem metsz F. Az egyenesek nincsenek összekötve, mert bármely kettő metszete 1 elemű így nem diszjuktak, a többi meg éppen a választás miatt nincs összekötve.

Mivel $|F^-| = 15$, így 15 ilyen 15 csúcsú független halmaz van. Ezek mindegyike 8-ban metszi az első esetbeli független halmazt.

4.eset: (35 darab) Vegyünk egy e egyenest, ez össze van kötve három Fano-síkkal (egyszerűség kedvéért F_1, F_2, F_3) és négy egyenessel (egyszerűség kedvéért e_1, e_2, e_3, e_4). Az e_1, e_2, e_3, e_4-nek további 6-6 csúccsal van összekötve e kivűl, ezek egy 24 csúcsú 3-reguláris gráfot alktnak és itt kell lennie az $F_4, F_5, \ldots, F_{15}$ mindegyikének vagyis egy 24 csúcsú 3-reguláris gráfban van egy 12 csúcsú független halmaz, ez csak úgy lehet ha ez a gráf páros és a másik 12 csúcs is független halmazt alkot. Ezek kiegészítve F_1, F_2, F_3-mal egy 15 csúcsú független halmazt alkot.

Mivel e-t 35 féleképpen választhatjuk meg, így ez 35 különböző 15 csúcsú független halmazt ad, mindegyiknek három közös csúcsa van az eredetivel.

5.eset: (42 darab)

Felvetődik a kérdés, hogy megtaláltunk-e mindet már vagy ezt a felsorolást folytatjuk még. Ezt válaszolja meg a következő tétel:

Tétel: Pontosan száz darab 15 csúcsú független halmaz van a Hoffman-Singleton-gráfban.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy legfeljebb 100 15 csúcsú független halmaz van a Hoffman-Singleton-gráfban. Mivel ennyit már mutattunk, ez éppen azt jelenti, hogy pontosan 100 darab van.

A bizonyítás a harmadik esetben megkonstruált 15 csúcsú független halmazok létezésének gondolatmenetét követi. Megmutatjuk, hogy minden csúcs legfeljebb 70 15 csúcsú független halmazban nincs benne. Ez azért igaz, mert ha egy csúcs nincs benne egy 15 csúcsú független halmazban akkor pontosan három szomszédja van benne a halmazban, ez a 3 csúcs $\binom{7}{3} = 35$ féleképpen választható ki. A maradék 12 csúcs pedig legfeljebb kétféleképpen választható ki abból a bizonyos 24 csúcsú gráfból (miért?). Tehát egy adott csúcs legfeljebb 70 15 csúcsú független halmazban nincs benne. Legyen n a 15 csúcsú független halmazok száma. Legyen az

$$S = \{(x, I) | x \not\in I, |I| = 15 \text{ független halmaz}\}$$

Tudjuk, hogy $50 \cdot 70 \geq |S| = 35n$. Tehát $n \leq 100$.

Megjegyzés: Mivel mindenhol egyenlőségnek kell állnia, így minden csúcs pontosan 70 15 csúcsú független halmazban nincs benne, bármely három szomszédja pontosan két 15 csúcsú független halmazban van benne és minden a 3. esetben látott 24 csúcsú részgráf páros gráf két 12 csúcsú osztállyal. Ennek érdekes következmény a következő kicsit technikai jellegű tétel ami később segíteni fog a Petersen-részgráfok számának meghatározásában.

Tétel: Legyen G' a Hoffman-Singleton-gráf egy 10 csúcsú részgráfja aminek egy Petersen-gráftól legfeljebb egy él hiányával különbözik. Ekkor pontosan 15 éle van és egy Petersen-gráfot feszít ki.

Bizonyítás: Legyen a következő a szereposztás: v_1 csúcs szomszédai v_2, v_2, v_4, v_i szomszédai v_{2i+1}, v_{2i+2} ha $i = 2, 3, 4$, továbbá a $v_5v_7, v_7v_9, v_9v_6, v_6v_8, v_8v_{10}$ élek megvannak. Azt kell bizonyítani, hogy v_5v_{10} is benne van G'-ben. Tegyük fel, hogy nincs behúzva ez az él. v_5, v_{10} nincs összekötve, így van közös szomszédjuk, legyen ez v_{11}. v_{11} nincs összekötve v_1-gyel, mert különben $v_1v_2v_5v_{11}v_1$ négy hosszú kör lenne. Tehát van v_1 és v_{11}-nek közös szomszédja. Ez lehet v_2, v_3, v_4 valamelyike vagy egy új v_{12}. Ekkor $v_5, v_6, \ldots, v_{11}$ benne vannak v_2, v_3, v_4, v_{12} v_1-től különböző szomszédai által meghatározott 24 csúcsú páros gráfban. Ez viszont nem lehet, mert $v_5v_7v_9v_6v_8v_{10}v_{11}v_5$ hét hosszú kört feszít ki és páratlan kör nem lehet páros gráfban.

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Tétel: Hoffman-Singleton-gráfban 525 Petersen-gráf van.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a Hoffman-Singleton-gráf minden éle 45 darab Petersen-gráf van benne, ebből már következni fog az állítás.

Legyen xy a gráf egy éle x további szomszédai legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_6$, míg y további szomszédai legyenek $y_1, \ldots, y_6$. x_i és y_j nincsenek összekötve, a közös szomszédjuk legyen u_{ij}. Tegyük fel, hogy u_{ij} össze van kötve u_{kl}-lel. Ekkor az előző tételt alkalmazva az $x, y, x_i, x_k, y_j, y_l, u_{ij}, u_{il}, u_{kj}, u_{kl}$ által feszített gráfra ami az $u_{kj}u_{il}$ él hiján Petersen-gráfot feszít, kapjuk, hogy $u_{kj}u_{il}$ él is benne van a gráfban.

Tehát xy él a következő Petersen-gráfokban van benne: legyen x további két tetszőleges szomszédja x_i és x_k (ezeket $\binom{6}{2}$ féleképpen választhatjuk ki). A fentiek szerint ha u_{ij} össze van kötve u_{kl}-lel akkor $u_{kj}u_{il}$ él is össze van kötve. Ezeket kiegészítve y_j, y_l csúcsokkal kapunk egy Petersen-gráfot. Mivel x_i x-től különböző szomszédait 3 féleképpen lehet bepárosítani megfelelően, így xy $15 \cdot 3 = 45$ Petersen-gráfban van benne.

Legyen $S = \{(e,P)|\; e \in E(P),\; P$ Petersen-gráf, $e \in E(G)\}$, ahol G a Hoffman-Singleton-gráf. A Hoffman-Singleton-gráfnak 175 éle van, a Petersen-gráfnak 15 Petersen-gráfok száma legyen n. Ekkor

$$175 \cdot 45 = |S| = 15n$$

Tehát $n = 525$ Petersen-gráf van a Hoffman-Singleton-gráfban.

Hoffman-Singleton-gráf részgráfjai

Láttuk, hogy van F_1 és F_2 két maximális független halmaz, melyek metszete 8 csúcsú. Mivel minden F_1/F_2-beli csúcsnak pontosan három F_2-beli szomszédja van, illetve minden F_2/F_1-beli csúcsnak pontosan három F_1-beli szomszédja van es ezek független halmazok, így $F_1 \cap F_2$-t elhagyva kapunk egy $7-7$ csúcsú 3-reguláris páros gráfot, ez éppen egy Fano-sík pont-egyenes illeszkedési gráfja (más nem lehet, miért?). Megmutatjuk, hogy ha Hoffman-Singleton-gráf (P, E)-részgráfja izomorf a Fano-sík pont-egyenes illeszkedési gráfjaval akkor megkapható a fenti eljárással.

Tétel: Legyen (P, E)-gráf a Hoffman-Singleton részgráfja, ami izomorf a Fano-sík pont-egyenes illeszkedési gráfjával. Ekkor a Hoffman-Singleton gráf felbomlik $T, (P, E), C$ gráfokra a következőképpen

(i) $|T|$=8, $|C|$=28, $V(T), V(P, E), V(C)$ páronként diszjunkt és uniójuk kiadja a Hoffman-Singleton-gráf csúcshalmazát.

(ii) T üres gráf és T és (P, E) között nem megy él, T minden csúcsa pontosan 7 C-belivel van összekötve

(iii) C minden csúcsa pontosan két T-belivel, pontosan 1 P illetve 1 E-belivel és három C-belivel van összekötve.

Bizonyítás: P bármely két csúcsának van közös szomszédja, nevezetesen egy "egyenes" es persze bármely két E-beli csúcsnak van egy közös E-beli szomszédja. Tehát bármely nem (P, E)-beli csúcsnak legfeljebb $1-1$ szomszédja van a P illetve E csúcshalmazban. Másrészt viszont ha $p \in P$ és $e \in E$ nincs összekötve akkor van egy közös szomszédjuk a Hoffman-Singleton-gráfban, 7×4 ilyen pont-egyenes pontpár van, ezek mindegyikéhez tartozik egy "közös szomszéd". Az előző megjegyzés szerint ezeknek azonban mind különbözőnek kell lennie. Ez a 28 "közös szomszéd" fogja alkotni C csúcshalmazát. A maradék $50-(7+7)-28=8$ csúcs alkotja T csúcshalmazát.

Vegyük észre, hogy minden (P, E)-beli csúcsnak megvan mind a hét szomszédja: három E illetve P-beli és 4 C-beli szomszédja van minden csúcsnak. Ebből máris következik, hogy T es (P, E) között nem megy él. Megmutatjuk, hogy T maga is egy független halmaz, ez egy ravasz cseresznyeleszámlálás következménye lesz. Számoljuk le azon cseresznyéket, melyek középső csúcsa C-ben, két vége T illetve P-ben van. Legyen $t \in T$ és $p \in P$, t és p nincs összekötve tehát van egy közös szomszédjuk, ez a közös szomszéd azonban nem lehet se T-ben, sem P-ben, sem E-ben, tehát csak C-ben lehet! Vagyis a cseresznyék száma $8 \times 7 = 56$. Most becsüljük egy kicsit máskent, tegyük fel, hogy C csúcsai $c_1, \ldots c_{28}$ és az i.-edik csúcsnak d_i szomszédja van T-ben. Az i.-edik csúcsnak pontosan egy P-beli szomszédja van, így a ráilleszkedő fenti tipusú cseresznyék száma éppen d_i. Tehát a cseresznyék száma éppen $\sum_{i=1}^{28} d_i$. Másrészt

$$56 = cs = \sum_{i=1}^{28} d_i = e(T, C) = \sum_{j=1}^{8} e(t_j, C) \leq 8 \times 7 = 56.$$

Tehát egyenlőségnek kell állnia az egyenlőtlenségben vagyis minden T-belinek 7 C-beli szomszédja van, így T-n belül már nem is mehet él.

Mivel P es T együtt egy maximális független halmazt alkot ezért minden C-belinek pontosan három szomszédja van $P \cup T$-ben. Ugyanakkor tudjuk, hogy minden C-belinek egy szomszédja van P-ben (és egy E-ben), ebből következik, hogy kettő szomszédja van T-ben és $7 - 2 - 1 - 1 = 3$ C-ben.

Megjegyzés: Pontosan ugyanígy bizonyítható, hogy ha az F_7 testre epített projektív sík incidencia gráfja részgrafja a 3250 csúcsú utolsó Hoffman-Singleton gráfnak akkor a legnagyobb független halmaz mérete 400 csúcsú a gráfban.

Tétel: Előző tételben szereplő C gráf 3-reguláris 7 bőségű, vagyis a legkisebb köre 7 hosszú.

Bizonyítás: Mivel C a Hoffman-Singleton-gráf részgráfja 3 illetve 4 hosszú kör nem lehet benne. Következőkben kizárjuk az 5 illetve 6 hosszú kör létezését is.

Tegyük fel, hogy $v_1v_2v_3v_4v_5$ egy 5 hosszú kör C-ben, ekkor a körön kivűl már nem lehet közös szomszédjuk. Ugyanakkor mindegyiknek két szomszédja van a 8 csúcsú T halmazban, ezek nem lehetnek mind diszjunktak.

Hasonlóan járunk el a hat csúcsú kör esetében is. Legyen $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ egy hat csúcsú kör. Ekkor csak (v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_6) pároknak lehet közös szomszédja nekik is csak legfeljebb 1, így ha mindegyiknek két szomszédja van T-ben akkor T-nek legalább $3 \times 3 = 9$ eleműnek kéne lenni, de csak 8 elemű, ellentmondás.

Hét hosszú kör valóban van benne, mert ha 8 lenne a legkisebb kör hossza akkor a Moore-korlát szerint legalább 30 csúcsa lenne.

Megjegyzés: Ezt a gráfot Coxeter-gráfnak hivják.

Tétel: Legyen $C_7 \subset C$ a Coxeter-gráf egy 7-hosszú köre. Ekkor P illetve E minden csúcsának van szomszédja C_7-ben. Továbbá T pontosan egy csúcsa nincs összekötve C_7 egyetlen csúcsával sem, a többi csúcs mindegyike pontosan két csúccsal van összekötve.

Bizonyítás: Legyenek C_7 csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_7$. Tegyük fel, hogy valamelyik P-beli csúcsnak nincs szomszédja C_7-ben, mivel minden v_i-nek pontosan egy szomszédja van P-ben ez csak úgy lehet, hogy valamely $p \in P$-nek legalább két szomszédja van C_7-ben. Ez azonban csak úgy lehet ha pontosan két szomszédja van és ez a két szomszéd két "átellenes" csúcs a 7 hosszú körön. Tegyük fel, hogy p-nek szomszédja v_1 és v_4. Ekkor p, v_1, v_2, v_3, v_4 meghatároz egy 5-hosszú kört, így ezeknek már nem lehet több közös csúcsa, speciálisan v_1, v_2, v_3, v_4 T-beli szomszédai mind különbözőek. Legyenek T elemei úgy számozva, hogy v_i szomszédai t_{2i-1}, t_{2i} $(i = 1, 2, 3, 4)$. Mivel v_5-nek és v_3, v_4-nek T-ben nincs közös szomszédja, ezért feltehető, hogy v_5 T-beli szomszédai t_1 és t_3. Hasonlóan v_6-nak nincs közös szomszédja v_1, v_4, v_5-tel T-ben, így egyik szomszédja t_4, a masik t_5 vagy t_6, szimmetria miatt feltehető, hogy t_5. Hasonlóan feltehető, hogy t_7 szomszédai t_6 és t_7 T-ben.

Vegyük észre, hogy ekkor már bármely két összekötetlen v_i-nek megvan a közös szomszédja, így E-beli szomszédjaik mind különbözőek (E es C_7 között 7 él megy, de egy E-belinek legfeljebb egy C_7-beli szomszédja van). Legyen p E-beli szomszédai e_1, e_2, e_3. Ekkor e_1-nek $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7$ egyike sem lehet szomszédja, különben háromszög vagy négyszög keletkezne, például e_1v_3 él esetén $pe_1v_3v_4p$ négy hosszú kör lenne. Tehát csak v_6 lehet e_1 szomszédja, de ugyanez áll e_2, e_3-ra, ez ellentmond a fenti észrevételnek. Ez az ellentmondás mutatja, hogy P-ben nem lehet közös szomszédja v_1 és v_4, általánosabban semely két v_i-nek. Mivel P es E szerepe szimmetrikus, így ez teljesül E-re is.

Már csak a T-re vonatkozó állítást kell bizonyítani. Mivel v_1 és v_4 nincs összekötve, ezért van egy közös szomszédjuk. Ez a w közös szomszéd nem lehet C-ben, mert akkor $wv_1v_2v_3v_4w$ 5 hosszú kör lenne, de C-ben nincs 5 hosszú kör. Előbbiek alapján nem lehet w sem P, sem E-ben, tehát csak T-ben lehet. Tehát a C_7 kör bármely két átellenes csúcsának van egy közös szomszédja T-ben. Ez csak úgy lehet ha T-beli csúcsok megfelelő indexelésével v_1 szomszédja t_1, t_2, v_4 szomszédai t_2, t_3, v_7 szomszédai t_3, t_4, v_3 szomszédai t_4, t_5, v_6 szomszédai t_5, t_6, v_2 szomszédai t_6, t_7, v_5 szomszédai t_7, t_1 (ezutóbbi azért, mert v_1 és v_5-nek van közös szomszédja). Ezzel bebizonyítottuk a T-re vonatkozó allítást is.

Hoffman-Singleton gráf körei

Állítás: (i) A Petersen-gráfnak $\frac{10\cdot 3\cdot 2\cdot 2}{10} = 12$ 5-hosszú és $\frac{10\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{12} = 10$ 6-hosszú köre van.

(ii) A Hoffman-Singleton-gráfnak $\frac{50\cdot 7\cdot 6\cdot 6}{10} = 1260$ 5-hosszú és $\frac{50\cdot 7\cdot 6\cdot 6\cdot 5}{12} = 5250$ 6-hosszú köre van.

Bizonyítás: Triviális.

Tétel: Legyen P_1, P_2 a Hoffman-Singleton-gráf két Petersen-részgráfja. Tegyük fel, hogy $|P_1 \cap P_2| \geq 6$. Ekkor $P_1 = P_2$.

Bizonyítás: Legyen $|P_1 \cap P_2| = u$ es $|P_1/P_2| = |P_2/P_1| = v = 10 - u$. A feltétel szerint $u \geq 6$ vagyis $v \leq 4$. Mivel P_2/P_1 minden csúcsából pontosan egy él megy P_1-be, így a P_2/P_1 által kifeszített gráf minden csúcsa legalább másodfokú, így tartalmaz kört, de az legalább 5-hosszúnak kell lennie, így $v \geq 5$, ellentmondás.

Tétel: A Hoffman-Singleton gráf minden 6-hosszú köre pontosan egy Petersen-gráfban van benne.

Bizonyítás: Számoljuk le a (C_6, P) párok számát, ahol C_6 a Hoffman-Singleton-gráf egy 6-hosszú köre, P egy Petersen részgráfja és $C_6 \subset P$. Ez egyrészt 525×10, mert 525 Petersen-részgráf van, mindegyiknek pontosan 10 6-hosszú köre van. Másrészt ez legfeljebb 5250, mert 5250 6-hosszú kör van és az előző tétel szerint mindegyiket legfeljebb egy Petersen-gráf tartalmazza. Tehát ez utóbbi becslésben egyenlőségnek kell állnia, így minden 6-hosszú kör pontosan egy Petersen-gráfban van benne.