Négy négyzetszám tétel

Ebben a jegyzetben meghatárrozzuk a pontos számát egy n pozitív egész négy négyzetszám összegére való felbontásainak számát, azaz megadjuk a

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = n,\ a_i \in \mathbb{Z}\}$$

halmaz elemszámát. Jelöljük ezt a számot $R(n)$-nel. Vegyük észre, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(n)x^n = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^4 = (1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots)^4$$

Először határozzuk meg csak

$$(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots)^2$$

együtthatóit. Erre szerencsére van egy közismert képlet.

Tétel:

$$(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots)^2 = 1 + 4\left(\frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^5}{1-x^5} - \dots\right)$$

Bizonyítás: A bal oldal azt számolja meg, hogy n-t hányféleképpen lehet felírni két négyzetszám összegére. A jobboldalon $\frac{x^k}{1-x^k} = x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots$, így itt x^n egyyütthatója $n > 0$ esetén $4(d_1(n) - d_3(n))$, ahol $d_1(n)$ az n $4k+1$, $d_3(n)$ az n $4k+3$ alakú osztóinak számát jelöli. Jólismert, hogy ez a két kifejezés, az n két négyzetszám összgére való felbontásainak száma és $4(d_1(n) - d_3(n))$, megegyezik.

□

Célszerű lesz bevezetni az $u_r = \frac{x^r}{1-x^r}$ jelölést. Ezzel a jelöléssel $1 + u_r = \frac{1}{1-x^r}$ és $u_r(1+u_r) = \frac{x^r}{(1-x^r)^2}$. Bebizonyítunk még néhány azonosságot.

Lemma:

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m(1+u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$$

Bizonyítás:

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m(1+u_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(1-x^m)^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{nm} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=1}^{\infty} x^{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} nu_n$$

□

Lemma:
$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}u_{2m}(1+u_{2m}) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{4n-2}$$
Bizonyitas:
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}x^{2m}}{(1-x^{2m})^2} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\sum_{r=1}^{\infty}rx^{2mr} = \sum_{r=1}^{\infty}r\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}x^{2mr} =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{rx^{2r}}{1+x^{2r}} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{rx^{2r}(1-x^{2r})}{1-x^{4r}} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{rx^{2r}(1+x^{2r})-2rx^{4r}}{1-x^{4r}} =$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{rx^{2r}}{1-x^{2r}} - \frac{2rx^{4r}}{1-x^{4r}}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}(ru_{2r}-2ru_{4r}) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{4n-2}$$

$\square$

Tétel: Legyen
$$L = L(x,\vartheta) = \frac{1}{4}ctg(\frac{1}{2}\vartheta) + u_1\sin\vartheta + u_2\sin(2\vartheta) + \dots$$
$$T_1 = T_1(x,\vartheta) = (\frac{1}{4}ctg(\frac{1}{2}\vartheta))^2 + u_1(1+u_1)\cos\vartheta + u_2(1+u_2)\cos(2\vartheta) + \dots$$
$$T_2 = T_2(x,\vartheta) = \frac{1}{2}(u_1(1-\cos\vartheta) + 2u_2(1-\cos(2\vartheta)) + 3u_3(1-\cos(3\vartheta)) + \dots)$$
Ekkor $L^2 = T_1 + T_2$.

Bizonyítás:
$$L^2 = \left(\frac{1}{4}ctg(\frac{1}{2}\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty}u_n\sin(n\vartheta)\right)^2 = (\frac{1}{4}ctg(\frac{1}{2}\vartheta))^2 + \sum_{n=1}^{\infty}u_n ctg(\frac{1}{2}\vartheta)\sin(n\vartheta) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_m u_n\sin(m\vartheta)\sin(n\vartheta) =$$
$$= (\frac{1}{4}ctg(\frac{1}{2}\vartheta))^2 + S_1 + S_2$$
Felhasználva az
$$\frac{1}{2}ctg(\frac{1}{2}\vartheta)\sin n\vartheta = \frac{1}{2} + \cos\vartheta + \cos(2\vartheta) + \dots + \cos((n-1)\vartheta) + \frac{1}{2}\cos(n\vartheta)$$
valamint az
$$2\sin(m\vartheta)\sin(n\vartheta) = \cos((m-n)\vartheta) - \cos((m+n)\vartheta)$$

azonosságokat S_1, S_2-t a következő alakba írhatjuk (lásd Appendix).

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{1}{2} + \cos\vartheta + \cos(2\vartheta) + \cdots + \cos((n-1)\vartheta) + \frac{1}{2}\cos(n\vartheta) \right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_m u_n (\cos((m-n)\vartheta) - \cos((m+n)\vartheta))$$

Így

$$L^2 = (\frac{1}{4} ctg(\frac{1}{2}\vartheta))^2 + C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\vartheta)$$

ahol a C_i-k a következő kifejezések:

$$C_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1+u_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n u_n$$

$$C_k = \frac{1}{2}u_k + \sum_{l=1}^{\infty} u_{k+l} + \frac{1}{2}\sum_{m-n=k} u_m u_n + \frac{1}{2}\sum_{n-m=k} u_m u_n - \frac{1}{2}\sum_{m+n=k} u_m u_n.$$

Itt az első két tag S_1-ból származik, az utolsó három tag S_2-ből. Így

$$C_k = \frac{1}{2}u_k + \sum_{l=1}^{\infty} u_{k+l} + \sum_{l=1}^{\infty} u_l u_{k+l} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} u_l u_{k-l}.$$

Felhasználunk néhány az u_i-kre vonatkozó azonosságot:

$$u_l u_{k-l} = \frac{x^l}{1-x^l}\frac{x^{k-l}}{1-x^{k-l}} = \frac{x^k}{1-x^k}\frac{1-x^k}{(1-x^l)(1-x^{k-l})} =$$

$$= \frac{x^k}{1-x^k}\frac{(1-x^l)+(1-x^{k-l})-(1-x^l-x^{k-l}+x^k)}{(1-x^l)(1-x^{k-l})} =$$

$$= u_k(1+u_l+1+u_{k-l}-1) = u_k(u_l+u_{k-l}+1).$$

Hasonlóan

$$u_{k+l} + u_k u_{k+l} = u_{k+l}(1+u_l) = \frac{1}{1-x^l}\frac{x^{k+l}}{1-x^{k+l}} = \frac{x^k}{1-x^k}\frac{x^l(1-x^k)}{(1-x^l)(1-x^{k+l})} =$$

$$= \frac{x^k}{1-x^k}\left(\frac{1}{1-x^l} - \frac{1}{1-x^{k+l}}\right) = u_k(u_l - u_{k+l}).$$

Így

$$C_k = u_k(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}(u_l - u_{k+l}) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1}(u_l + u_{k-l} + 1)) =$$

$$= u_k\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k} u_l - \frac{1}{2}(k-1) - \sum_{l=1}^{k-1} u_l\right) = u_k\left(u_k + 1 - \frac{k}{2}\right).$$

Tehát

$$L^2 = (\frac{1}{4}ctg(\frac{1}{2}\vartheta))^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nu_n + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(u_k + 1 - \frac{k}{2}\right)\cos(k\vartheta) =$$

$$= (\frac{1}{4}ctg(\frac{1}{2}\vartheta))^2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(1+u_k)\cos(k\vartheta) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} ku_k(1-\cos(k\vartheta)).$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

□

Most írjunk be a tételbe $\vartheta = \frac{\pi}{2}$-t. Ekkor

$$L(x, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} + u_1 - u_3 + u_5 - u_7 + \dots$$

$$T_1(x, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{16} - u_2(1+u_2) + u_4(1+u_4) - u_6(1+u_6) + \dots$$

$$T_2(x, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}u_1(1-0) + \frac{2}{2}u_2(1-(-1)) + \frac{3}{2}u_3(1-0) + \frac{4}{2}u_4(1-1) + \dots$$

Tehát

$$L(x, \frac{\pi}{2})^2 = T_1(x, \frac{\pi}{2}) + T_2(x, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{16} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_{2n}(1+u_{2n}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(4n-2)u_{4n-2}$$

Ez a második lemma szerint

$$\frac{1}{16} - \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{4n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(4n-2)u_{4n-2} =$$

$$= \frac{1}{16} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{4n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{4n-2}$$

Tehát

$$(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots)^2 = 1 + 16\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{4n-2} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)u_{2n-1} =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(16\sum_{\substack{d \,|\, m \\ d=4k+2}}\frac{d}{2} + 8\sum_{\substack{d \,|\, m \\ d=2k+1}} d\right)x^m =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(8\sum_{\substack{d \,|\, m \\ 4\nmid d}} d\right)x^m$$

Ezutóbbi kifejezésre fennáll

$$8\sum_{\substack{d \,|\, m \\ 4\nmid d}} d = \begin{cases} 8\sigma(n) & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 24\sigma(r) \text{ ha } n = 2^\alpha r, & r \text{ páratlan}, \ \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Tehát $R(n) = \begin{cases} 8\sigma(n) & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 24\sigma(r) \text{ ha } n=2^\alpha r, & r \text{ páratlan}, \ \alpha\geq 1 \end{cases}$.

Appendix

A bizonyítás során felhasználtuk az alábbi azonosságot:

Lemma:

$$\frac{1}{2}ctg\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\sin(n\vartheta)=\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos(2\vartheta)+\cdots+\cos((n-1)\vartheta)+\frac{1}{2}\cos(n\vartheta)$$

Bizonyítás: Az állítást teljes indukcióval látjuk be. $n=1$-re a következő átalakítás miatt teljesül az állítás:

$$\frac{1}{2}ctg\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\sin\vartheta=\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)}2\cos\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)=\cos^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)-1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\vartheta$$

Ezután az indukciós lépéshez a következő azonosságot kell bizonyítani:

$$\frac{1}{2}ctg\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)(\sin((n+1)\vartheta)-\sin(n\vartheta))=\cos(n\vartheta)+\cos((n+1)\vartheta)$$

Ezt pedig könnyen ellenőrizhetjük ha felhasználjuk

$$ctg\left(\frac{1}{2}\alpha\right)=i\frac{e^{\frac{1}{2}i\alpha}-e^{-\frac{1}{2}i\alpha}}{e^{\frac{1}{2}i\alpha}-e^{-\frac{1}{2}i\alpha}}=i\frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1}$$

valamint

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\quad\text{es}\quad\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

azonosságokat.

□