Regularitási lemma alkalmazásai [1]

Néhány definició, jelölés. (X,Y) páros gráf élsűrűsége: $d(X,Y)=\frac{e(X,Y)}{|X|\cdot|Y|}$. G, H gráfokra a $H\subset G$ jelöli, hogy H részgráfja G-nek, de néha abban az értelemben is használjuk, hogy beágyazható. $||H\to G||$ a számozott beágyazások száma.

Definició: ε-regularitás Legyen $\varepsilon>0$. Adott a G gráf és annak két diszjunkt csúcshalmaza: $A\subset V$, $B\subset V$. Azt mondjuk, hogy (A,B) ε-reguláris pár ha minden olyan $X\subset A$, $Y\subset B$ halmazokra, melyre $|X|>\varepsilon|A|$ és $|Y|>\varepsilon|B|$, teljesül, hogy

$$|d(X,Y)-d(A,B)|<\varepsilon$$

Regularitási lemma

Tétel: regularitási lemma, Szemerédi 1978 Minden $\varepsilon>0$ és z egészre léteznek $M(\varepsilon,z)$ és $N(\varepsilon,z)$ egészek a következő tulajdonsággal: minden G gráfnak, melynek $n>N(\varepsilon,z)$ csúcsa van, létezik a csúcsoknak $k+1$ részre való particiója, hogy

$$V=V_0+V_1+V_2+\dots V_k$$

olyan, hogy $z\le k\le M(\varepsilon,z)$, $|V_0|<\varepsilon n$, $|V_1|=|V_2|=\cdots=|V_k|$ és εk^2 pár kivételével minden (V_i,V_j) pár ε-reguláris.

Tétel: használható alak Minden $\varepsilon>0$-ra létezik $M=M(\varepsilon)$, hogy ha $G=(V,E)$ gráf és $d\in[0,1]$ akkor létezik a V-nek particiója $k+1$ részre: $V_0,V_1,V_2,\dots,V_k$ és egy $G'\subset G$ részgráf a következő tulajdonságokkal: $k\le M$, $|V_0|\le\varepsilon|V|$, minden V_i $(i\ge1)$ ugyanakkora: $|V_i|=m$, $e(G'(V_i))=0$ minden $i\ge1$-re, $|E(G')|>|E(G)|-\frac{1}{2}(d+3\varepsilon)|V|^2$, minden $G'(V_i,V_j)$ pár ε-reguláris 0 vagy d-nél nagyobb sűrűséggel.

Megjegyzés: Ezután G'-ből elhagyjuk V_0-t és a rá illeszkedő éleket, így a kapott G'' gráfra teljesül, hogy $|E(G')|>|E(G)|-\frac{1}{2}(d+5\varepsilon)|V|^2$.

Az alábbi általánosabb is igaz:

Tétel: fokszám alak Minden $\varepsilon>0$-ra létezik $M=M(\varepsilon)$, hogy ha $G=(V,E)$ gráf és $d\in[0,1]$ akkor létezik a V-nek particiója $k+1$ részre: $V_0,V_1,V_2,\dots,V_k$ és egy $G'\subset G$ részgráf a következő tulajdonságokkal: $k\le M$, $|V_0|\le\varepsilon|V|$, minden V_i $(i\ge1)$ ugyanakkora: $|V_i|=m\le[\varepsilon|V|]$,

$$deg_{G'}(v)>deg_G(v)-(d+\varepsilon)|V| \text{ minden} v\in V$$

$e(G'(V_i))=0$ minden $i\ge1$-re, minden $G'(V_i,V_j)$ pár ε-reguláris 0 vagy d-nél nagyobb sűrűséggel.

[1] Ez az előadásjegyzet Komlós János és Simonovits Miklós Szemerédi's Regularity Lemma and its applications in graph theory című cikke alapján készült, a cikk megtalálható a http://www.math.ucsd.edu/ fan/teach/262/read/reg.pdf helyen

Megjegyzés: Általában a fokszám alak alkalmazása után elhagyjuk V_0-t és kapjuk $G" = G' - V_0$. Erre a $G"$-re továbbra is teljesül, hogy

$$deg_{G"}(v) > deg(v) - (d+\varepsilon)n - |V_0| \geq deg_G(v) - (d+2\varepsilon)n$$

minden $v \in V(G")$-re, így $e(G") > e(G) - (d+3\varepsilon)n^2/2$.

Definició redukált gráfra: adott egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráf és a V csúcshalmaznak egy P partíciója $V_1, V_2, \ldots V_k$ halmazokra, továbbá adott ε, d. Ekkor a következőképpen definiáljuk a redukált gráfot: a csúcshalmaza a $V_1, \ldots V_k$ halmazok és V_i össze van kötve a V_j-vel ha a (V_i, V_j) pár ε-reguláris legalább d sűrűséggel. (Tipikusan a használható vagy fokszám alak után kapott $G"$ gráf redukált gráfját vizsgáljuk.)

Néhány állítás.

1. Állítás: a sűrűség konvexitása Adott egy páros gráf A és B színosztályokkal. Ekkor minden $k < |A|$, $l < |B|$ egészekre:

$$d(A,B) = \frac{1}{\binom{|A|}{k}\binom{|B|}{l}} \sum_{\substack{X \subset A, |X|=k \\ Y \subset B, |Y|=l}} d(X,Y)$$

Megjegyzés: Ez alapján elég az ε-regularitást az $|X| = [\varepsilon|A|] + 1$, $|Y| = [\varepsilon|B|] + 1$ teljesítő X, Y halmazokra ellenőrizni.

2. Állítás: nagy halmazba menő fokszámok nagyok Legyen (A, B) ε-reguláris pár d sűrűséggel. Ekkor minden $Y \subset B$, $|Y| > \varepsilon|B|$-re

$$|\{x \in A : deg(x, Y) \leq (d-\varepsilon)|Y|\}| \leq \varepsilon|A|$$

3. Állítás: metszet tulajdonság Tegyük fel, hogy $Y \subset B$ és $(d-\varepsilon)^{l-1}|Y| > \varepsilon|B|$, $l \geq 1$, ekkor

$$\left|\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_l) : x_i \in A,\ |Y \cap (\cap_{i=1}^{l} N(x_i))| \leq (d-\varepsilon)^l |Y|\right\}\right| \leq l\varepsilon|A|^l$$

Megjegyzés: Az utolsó két állításnak van $deg(x, Y) \geq (d+\varepsilon)|Y|$ változata is, de azokra nem lesz szükség.

4. Állítás: szeletre vonatkozó lemma Legyen (A, B) ε-reguláris pár d sűrűséggel. Valamely $\alpha > \varepsilon$-ra legyen $A' \subset A$, $|A'| \geq \alpha|A|$, $B' \subset B$, $|B'| \geq \alpha|B|$. Ekkor (A', B') ε'-reguláris pár ahol $\varepsilon' = \max(\varepsilon/\alpha, 2\varepsilon)$, továbbá d' sűrűségére teljesül, hogy $|d - d'| < \varepsilon$.

Kulcs lemma

Definició: Egy R gráf és t pozitív egész esetén az $R(t)$ gráfot úgy kapjuk, hogy minden csúcsot kicserélünk t független csúcsra és két t-es között behúzunk minden élet ha az eredeti gráfban a két csúcs között volt él, különben egyetlen élet se húzunk be.

Kulcs lemma: Egy G gráfhoz adott $d > \varepsilon > 0$ mellet elkészítjük az R redukált gráfját, ahol minden osztály m csúcsot tartalmaz. Legyen H az $R(t)$ egy részgráfja h csúccsal és maximális $\Delta > 0$ fokszámmal, továbbá legyen $\delta = d - \varepsilon$ és $\varepsilon_0 = \frac{\delta^\Delta}{2+\Delta}$. Ekkor ha $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ és $t - 1 \leq \varepsilon_0 m$ akkor $H \subset G$. Sőt

$$||H \to G|| > (\varepsilon_0 m)^h$$

Bizonyítás: A következő általánosabb becslést bizonyítjuk:

Ha $t - 1 \leq (\delta^\Delta - \Delta\varepsilon)m$ akkor $||H \to G|| > [(\delta^\Delta - \Delta\varepsilon)m - (t-1)]^h$.

Ez valóban általánosabb, mert $\delta^\Delta = (2+\Delta)\varepsilon_0 \geq 2\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, így $(\delta^\Delta - \Delta\varepsilon)m \geq 2\varepsilon_0 m \geq \varepsilon_0 m + t - 1$ azaz $(\delta^\Delta - \Delta\varepsilon)m - (t-1) \geq \varepsilon_0 m$.

A H gráf $v_1, \ldots, v_h$ csúcsát egyesével ágyazzuk be G-be. A v_j számára fenntartunk egy folyamatosan zsugordó C_{ij} halmazt amihez tartozik, v_j végső helyét csak a j.-edik időpontban választjuk ki. A 0. lépésben C_{0j} a természetesen adódó m-elemű halmaz. Tehát minden j-re $|C_{0j}| = m$. Az algoritmus az i.-edik időpontban két lépésből áll.

1. lépés: Veszünk egy $v_i \in C_{i-1,i}$ csúcsot úgy, hogy $deg_G(v_i, C_{i-1,j}) > \delta|C_{i-1,j}|$ minden olyan $j > i$-re, amelyre $\{v_i, v_j\} \in E(H)$
2. lépés: Átírjuk a halmazokat: minden $j > i$-re legyen

$$C_{ij} = \begin{cases} C_{i-1,j} \cap N(v_i) & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E(H) \\ C_{i-1,j} & \text{különben} \end{cases}$$

Ha $i < j$ legyen $d_{ij} = |\{l \in [i] \ : \ \{v_l, v_j\} \in E(H)\}|$.

Egyszerű észrevétel, hogy ha $d_{ij} > 0$ akkor $|C_{ij}| > \delta^{d_{ij}} m$. (Ha $d_{ij} = 0$ akkor $|C_{ij}| = m$.)

Ha $i < j$ akkor $|C_{ij}| > \delta^\Delta m > \varepsilon m$. Mivel nagy halmazba menő fokszámok nagyok, ezért a v_i választásának $C_{i-1,i}$ halmaznak $\Delta\varepsilon m$ kivételével minden csúcs megfelel a fokszám feltételeknek, továbbá persze az $R(t)$ adott osztálybeli többi csúcsát sem választhatjuk, így v_i választására legalább

$$|C_{i-1,i}| - \Delta\varepsilon m - (t-1) > (\delta^\Delta - \Delta\varepsilon)m - (t-1)$$

lehetőség van. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés: Valójában nem használtuk ki az ε-regularitást teljes erősségében, csak az alábbi egyoldali változatát:

$$\text{ha } X \subset A, \ |X| > \varepsilon|A|, \ Y \subset B, \ |Y| > \varepsilon|B| \ \text{ akkor } \ e(X,Y) > \delta|X||Y|$$

Megjegyzés: A legtöbb alkalmazásban először alkalmazzuk a Regularitási lemmát, majd megkonstruáljuk a redukált gráfot. Aztán erre alkalmazunk egy klasszikus gráfelméleti tételt (például a König-Hall tételt, Dirac-tételt vagy a Turán-tételt). Majd valamilyen a Kulcs lemmához hasonló tétellel visszahúzzuk az eredményt a redukált gráfról az eredetire.

Néhány alkalmazás

Tétel (Erdős-Stone 1946): Tetszőleges $p > 2$-re és $t \geq 1$-re

$$ex(n, K_p(t, \dots, t)) = (1 - \frac{1}{p-1})\binom{n}{2} + o(n^2)$$

Bizonyítás: Legyen $\beta > 0$ és G_n-nek legyen több, mint $(1 - \frac{1}{p-1} + \beta)\frac{n^2}{2}$ éle, ahol n elég nagy. Alkalmazzuk a regularitási lemma használható alakját $d = \frac{\beta}{2}$ és $\varepsilon = (\frac{\beta}{10})^{pt}$. Legyen $G'' = G' - V_0$ és legyen R a G'' gráf redukált gráfja ε, d paraméterekkel. Ekkor

$$\frac{e(R)}{k^2/2} \geq \frac{e(G'')}{n^2/2} > 1 - \frac{1}{p-1}$$

Ekkor a Turán-tétel szerint R tartalmaz p-klikket. Ekkor a Kulcs-lemma szerint G_n tartalmaz $K_p(t, \dots, t)$ ha n elég nagy, ehhez az kell, hogy $\varepsilon_0 = \frac{\delta^\Delta}{2+\Delta} \geq \varepsilon$ és $t - 1 \leq \varepsilon_0 m$. $\delta = \frac{\beta}{2} - (\frac{\beta}{10})^{pt}$, $\Delta = (p-1)t$, így

$$\varepsilon_0 = \frac{(\frac{\beta}{2} - (\frac{\beta}{10})^{pt})^{(p-1)t}}{2 + (p-1)t} \geq \frac{(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{10})^{(p-1)t}}{2 + (p-1)t} = \frac{(\frac{2\beta}{5})^{(p-1)t}}{2 + (p-1)t} = \frac{4^{(p-1)t}}{2 + (p-1)t}(\frac{\beta}{10})^{(p-1)t} \geq (\frac{\beta}{10})^{pt} = \varepsilon$$

A második egyenlőtlenség pedig elég nagy m-re teljesül.

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Valójában az alábbi erősebb tételt bizonyítottuk.

Tétel: Legyen H egy gráf h csúcson p kromatikus számmal. Legyen $\beta > 0$ adott és legyen $\varepsilon = (\frac{\beta}{6})^h$. Ha n elég nagy és G_n gráfra teljesül, hogy

$$e(G_n) > (1 - \frac{1}{p-1} + \beta)\frac{n^2}{2}$$

akkor a Szemerédi tétel használható alakjánál kapott $M(\varepsilon)$-nal

$$||H \to G_n|| > \left(\frac{\varepsilon n}{M(\varepsilon)}\right)^h$$

Tétel: Minden $\beta > 0$-ra és H egyszerű gráfra létezik egy $\gamma = \gamma(\beta, H) > 0$ a következő tulajdonságokkal: ha G_n gráf legfeljebb $\gamma n^{v(H)}$ példányát tartalmazza H-nak akkor kitörölhető legfeljebb βn^2 éle, hogy a kapott gráf H-mentes.

Bizonyítás: Legyen $h = v(H)$ és $\varepsilon = (\frac{\beta}{3})^h$, továbbá válasszuk $\gamma = (\frac{\varepsilon}{M(\varepsilon})^h$. Tegyük fel, hogy n elég nagy és alkalmazzuk a regularitási lemma fokszám alakját $d = \beta$-val, és legyen $G'' = G" - V_0$. Megmutatjuk, hogy G'' H-mentes. Legyen R a G'' redukált gráfja. Ha G'' tartalmazza H egy példányát, akkor R maga is tartalmazza H-t vagy legalábbis egy H' gráfot, melyre $H \subset H'(h)$. Ekkor azonban a Kulcs lemma adja, hogy

$$||H \to G_n|| > (\varepsilon m)^h > (\varepsilon n/k)^h \geq (\varepsilon n/M(\varepsilon))^h = \gamma n^h$$

ellentmondás. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Három tagú számtani sorozat

Állítás: Az alábbiak ekvivalensek:
(1) (A $(6,3)$-tétel, Ruzsa-Szemerédi 1976) Ha H_n 3-unifom hipergráf n csúcson olyan, hogy semely 6 pontja nem tartalmaz 3 vagy annál több élet, akkor $e(H_n) = o(n^2)$.
(2) Ha G_n gráf minden éle pontosan egy háromszögben van benne akkor $e(G_n) = o(n^2)$.
(3) (feszített matching) Ha G_n n feszített matching uniója akkor $e(G_n) = o(n^2)$.
(G egy M matchingje feszített ha minden olyan él, ami két M-beli csúcsot köt össze M-beli.)

Bizonyítás: (1) és (2) ekvivalenciája triviális.

(3) $\Rightarrow$ (2) Minden (2)-beli gráf felbontható n feszítet matching uniójára: legyen $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ a k matchingben ha $\{v_i, v_j, v_k\}$ háromszöget alkot G_n-ben. Ekkor valóban n feszített matchinget kapunk, melynek G_n az uniója. Így (3) szerint $e(G_n) = o(n^2)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Vegyünk fel n darab új pontot. A k. új pontot kössük össze a k. matching csúcsaival. Sajnos az így kapott gráf élei még nagyon sok háromszögben lehetnek benne. Ez az új gráf csak akkor teljesítené (2) feltételeit ha az eredeti gráfban nem volt háromszög. Javítás: az eredeti G gráfban van olyan G^* páros gráf, amely G éleinek legalább a felét tartalmazza (miért?). Ez a G^* is n feszített matching uniója, így alkalmazhatjuk rá az előbb leírt konstrukciót és a kapott gráf már teljesíti (2) feltételeit. Így $3E(G)/2 \leq 3e(G^*) = o((2n)^2)$, azaz $E(G) = o(n^2)$.

Tétel (feszített matching) Ha G_n n feszített matching uniója akkor $e(G_n) = o(n^2)$.

Bizonyítás: Többet fogunk bizonyítani: legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $n \geq 2M(\varepsilon)/\varepsilon^2$. Ha G_n k feszített matching uniója akkor $e(G_n) < 4\varepsilon n^2 + k\varepsilon n$.

Alkalmazzuk a Regularitási lemma használható alakját $d = 2\varepsilon$-nal, és legyen $G'' = G - V_0$. Megmutatjuk, hogy minden G''-beli feszített matching legfeljebb εn élet tartalmaz.

Legyen M egy feszített matching G''-ben és legyen $U = V(M)$ M csúcshalmaza, $U_i = U \cap V_i$. Legyen $I = \{i : |U_i| > \varepsilon|V_i|\}$, továbbá legyen $L = \cup_{i \in I} U_i$ és $S = U - L$. Ekkor persze $|S| < \varepsilon n$. Ha tehát $|U| > 2\varepsilon n$ akkor $|L| > |U|/2$, tehát létezik $u, v \in L$ szomszédosak M-ben. Legyen $u \in V_i$ és $v \in V_j$. Ekkor az R redukált gráfban van él V_i és V_j között, azaz a sűrűség több, mint 2ε közöttük. Mivel U_i és U_j legalább εm elemű, így közöttük a sűrűség legalább ε. Ez azonban több, mint $\varepsilon|U_i||U_j| \geq \min\{|U_i|, |U_j|\}$ élet jelent, ez ellentmond M feszítettségének. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Tétel (Roth): Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik egy $n_0 = n_0(\varepsilon)$, hogy ha $n \geq n_0$, $A \subset \{1, \ldots, n\}$ és $|A| > \varepsilon n$ akkor A tartalmaz 3 hosszú számtani sorozatot.

Bizonyítás: Jelölje $r_3(n)$ azt a legnagyobb számot, amelyhez létezik egy $A \subset \{1, \ldots, n\}$ 3-hosszú számtani sorozat mentes halmaz, hogy $|A| = r_3(n)$. Továbbá jelölje $f(k, n)$ azt a legnagyobb számot, ahány éle lehet k feszített matching uniójának n ponton. Előbbiek szerint elég nagy n-re

$$f(k, n) < 4\varepsilon n^2 + k\varepsilon n$$

Megmutatjuk, hogy $r_3(n) \leq f(n, 5n)/n$. Így ha n elég nagy akkor

$$r_3(n) \leq (4\varepsilon(5n)^2 + 5n\varepsilon n)/n = 105\varepsilon n$$

Legyen $a_1, \ldots a_R (\leq n)$ a maximális hosszúságú sorozat, amely nem tartalmaz 3-hosszú számtani sorozatot, $R = r_3(n)$. Tekintsük a következő gráfot: $G_{5n} = (A, B, E)$, $A = [2n]$, $B = [3n]$ és

$$E \subset A \times B \quad E = \{(x + a_i, x + 2a_i) : \ x \in [n], i \in [R]\}$$

Ekkor G_{5n}-nek pontosan Rn éle van és a következő n matching uniója:
$M_x = \{(x + a_i, x + 2a_i) : i \in [R]\}$. Ezek feszített matchingek G_{5n}-ben:
$x + 2a_i = y + 2a_r$ és $x + a_j = y + a_r$ akkor $x - y = a_r - a_j = 2a_r - 2a_i$ azaz $2a_i = a_r + a_j$ ellentmond a sorozat definiciójának. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Ramsey-Turán K_4-re

Tétel (Ramsey-Turán K_4-re, Szemerédi 1972) Ha G_n nem tartalmaz K_4-t és $o(n)$ független csúcsa van akkor $e(G_n) < \frac{1}{8}n^2 + o(n^2)$

Bizonyítás: A bizonyítás a következő két triviális állításon múlik:

[1] Legyen $G = (A \cup B, E)$, $|A| = |B| = m$ és tegyük fel, hogy
(i) $G(A, B)$ ε-reguláris legalább $\beta + \varepsilon$ sűrűséggel, ahol $\beta > 1/2$, $\varepsilon > 0$,
(ii) $\alpha(G) < (2\beta - 1)m$
Ekkor $K_4 \subset G$.

[2] Legyen $G = (A \cup B \cup C, E)$, $|A| = |B| = |C| = m$ és tegyük fel, hogy
(i) $G(A, B)$ ε-reguláris legalább $\beta + \varepsilon$ sűrűséggel, ahol $\beta > \varepsilon > 0$, és ugyanez teljesül (A, C) és (B, C) párokra.
(ii) $\alpha(G) \leq \beta^2 m$
Ekkor $K_4 \subset G$.

Ebből már következik az állítás: tegyük fel, hogy valamely ε-ra

$$e(G_n) > \left(\frac{1}{8} + 5\varepsilon\right) n^2$$

végtelen sok n-re. Legyen n olyan nagy, hogy

$$\alpha(G_n) < \frac{\varepsilon^2}{M(\varepsilon)} - 1 \ \text{ és } n \geq \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Alkalmazzuk a regularitási lemma használható alakját $d = 2\varepsilon$-nal. Legyen $G'' = G' - V_0$ és R a redukált gráfja. Ekkor $e(G'') > (1/8 + \varepsilon)n^2$.

Továbbá

$$\alpha(G_n) < \varepsilon^2 \left(\frac{n}{M(\varepsilon)} - 1 \right) \leq \varepsilon^2 \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \leq \varepsilon^2 m$$

I. eset Ha R-nek több, mint $k^2/4$ éle van akkor a Turán-tétel szerint van benne háromszög. Ekkor alkalmazhatjuk [2]-t $\beta = \varepsilon$-nal és kapjuk, hogy $K_4 \subset G$.

II. eset

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} d(V_i, V_j) = e(G'')/m^2 \geq e(G'')k^2/n^2 > (1/8 + \varepsilon)\, k^2$$

Mivel ezen sűrűségek közül legfeljebb $k^2/4$ nem 0, ezért az átlaguk legalább $d = 1/2 + 4\varepsilon$. Tehát van olyan pár, ahol a sűrűség legalább d. Legyen H az a gráf, amely ezt a reguláris párt tartalmazza és a csoportokon belül visszatesszük az éleket. Erre a H-ra alkalmazzuk [1]-t $\beta = d - \varepsilon = 1/2 + 3\varepsilon$, mivel

$$\alpha(H) < \alpha(G_n) < \varepsilon m < (2\beta - 1)m$$

így $K_4 \subset G_n$.

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés: Bollobás és Erdős 1976-ban bebizonyította, hogy az 1/8 nem javítható.