Egyenesmentes halmazok AG(3,n)-ben

Ismert, hogy a SET játékban legfeljebb 20 kártyát lehet kitenni az asztalra úgy, hogy ne legyen benne SET. Kicsit tudományosabban: maximum 20 pontot lehet kiválasztani a térből, hogy semely három ne alkosson egyeneset. Még másképp: az $\mathbb{F}_3^4$ Abel-csoportban legfeljebb 20 elem választható ki, hogy semely három összege ne legyen 0. (Ha ugyanis három elem összege 0, akkor minden koordinátában vagy mind a három elem megegyezik vagy mind a három különbözik.) Ebben a jegyzetben azt vizsgáljuk, hogy mi van ha a kártyáknak nem négy, hanem n tulajdonságuk van. Az alábbi tételt fogjuk belátni.

Tétel: Az $\mathbb{F}_3^n$-ben legfeljebb $5 \cdot \frac{3^n}{n}$ elemet lehet kiválasztani, hogy semely három különböző elem összege ne legyen 0.

Megjegyzés: Ez $n = 1, 2, 3, 4, 5$-ra teljesen triviális eredmény, még 6-re sem túl erős, azonban nagyobb n-kre mutatja, hogy az elemek csak kis hányadát lehet kiválasztani úgy, hogy "ne legyen benne SET". A 5-es szorzótól eltekintve ez a legjobb ami tudható jelenleg; nem lehet azt sem tudni, hogy van-e $\varepsilon > 0$, hogy $(3-\varepsilon)^n$ felső becslést ad a problémánkban.

A tétel bizonyításához jó adag előkészítésre lesz szükségünk.

Előkészítés

Itt nagyon tömören bevezetjük az Abel-csoportok Fourier-elméletét. Éppen csak annyit fogunk bizonyítani, amennyi feltétlenül szükséges a bizonyításhoz.

Definició: Legyen $(G, +)$ Abel-csoport. $\xi:\ G \to \mathbb{C}$ a G Abel-csoport karaktere ha minden $x, y \in G$ esetén $\xi(x)\xi(y) = \xi(x+y)$ és $\xi(0) = 1$.

Megjegyzés: A karakterek maguk is Abel-csoportot alkotnak a $(\xi \cdot \eta)(x) := \xi(x)\eta(x)$ művelettel és a $\chi_0(x) \equiv 1$ egységelemmel. Ez a $\hat{G}$ csoport izomorf a G-vel; nekünk csupán arra lesy szüksgégünk, hogy $|\hat{G}| = |G|$.

Mi nekünk igazából csak $\mathbb{F}_p^n$ karaktereire lesz szükségünk $p = 3$ esetén, ebben az esetben könnyen leírhatjuk a karaktereket: minden $\xi \in \hat{G}$-hez hozzárendelhetünk egy $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{F}_p^n$ vektort, hogy $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ esetén

$$\xi(\underline{x}) = e^{\frac{2\pi i}{p}(\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)}.$$

Kezdjük egy egyszerű lemma bizonyításával, aminek messze menő következményei vannak.

Lemma: Fennáll a következő két azonosság.

$$\sum_{x \in G} \xi(x) = \begin{cases} |G| & \xi = \chi_0 \\ 0 & \xi \neq \chi_0 \end{cases}$$

$$\sum_{\xi\in\hat{G}}\xi(x)=\left\{\begin{array}{cc}|G| & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{array}\right.$$

Bizonyítás: Csak az első azonosságot bizonyítjuk, a másik analog módon bizonyítható. Ha $\xi=\chi_0$ akkor az állítás triviális: a G csoport minden eleme 1-t ad az összeghez. Ha $\xi\neq\chi_0$ akkor van olyan $y\in G$, melyre $\xi(y)\neq 1$, ekkor

$$\xi(y)\sum_{x\in G}\xi(x)=\sum_{x\in G}\xi(x+y)=\sum_{x\in G}\xi(x)$$

Mivel $\xi(y)\neq 0$ így $\sum_{x\in G}\xi(x)=0$.

$\square$

Ezután már bevezethetjük a Fourier-transzformált fogalmát:

Definició: Az $f:G\to\mathbb{C}$ függvény Fourier-transzformáltja az $\hat{f}:\hat{G}\to\mathbb{C}$ függvény, melyre

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{x\in G}f(x)\xi(x).$$

Erre számos azonosság áll fenn, most csak azt a néhányat bizonyítjuk, amire szükségünk lesz.

Lemma: Legyen $f,g:G\to\mathbb{C}$. Ekkor

$$\hat{f}(\chi_0)=\sum_{x\in G}f(x) \tag{1}$$

Az alábbi azonosságot Plancherel-azonosságnak hívják:

$$\sum_{x\in G}f(x)\overline{g(x)}=\frac{1}{|G|}\sum_{\xi\in G}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} \tag{2}$$

Speciális esetét $f=g$-re pedig Parseval-azonosságnak:

$$\sum_{x\in G}|f(x)|^2=\frac{1}{|G|}\sum_{\xi\in G}|\hat{f}(\xi)|^2 \tag{3}$$

Bizonyítás: Az első állítás triviális. A harmadik pedig a második állítás speciális esete, így csak azt kell bizonyítani.

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\xi\in G}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}=\frac{1}{|G|}\sum_{\xi\in\hat{G}}\left(\sum_{x\in G}f(x)\xi(x)\right)\left(\sum_{y\in G}\overline{g(y)}\ \overline{\xi(y)}\right)=$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \hat{G}} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(x)\overline{g(y)}\xi(x-y) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(x)\overline{g(y)} \sum_{\xi \in \hat{G}} \xi(x-y) =$$

$$= \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}$$

Az utolsó sorban felhasználtuk az előző lemmát, mely szerint $\sum_{\xi \in \hat{G}} \xi(x-y)$ csak akkor nem 0 ha $x - y = 0$ azaz $x = y$ és ekkor pontosan $|G|$-vel egyenlő.

$\square$

Megjegyzés: Az alábbi azonosság szintén nagyon fontos, nekünk azonban nem lesz szükségünk rá. Az f, g függvények konvolucióján az alábbi függvényt értjük:

$$(f \star g)(x) := \sum_{y \in G} f(y)g(x-y)$$

Ekkor

$$\widehat{(f \star g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

minden $\xi \in \hat{G}$-re.

Szükségünk lesz még néhány definicióra mielőtt a bizonyításba belefogunk.

Definició: Az $A \subset G$ halmaz karakterisztikus függvénye

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in A \\ 0 & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

Ekkor persze értelmezhető $\hat{A}(\xi)$ is, így a következő definiciónak is van értelme.

Definició: Legyen $\eta \in (0,1)$. Az A halmaz η-uniform ha

$$\sup_{\chi_0 \neq \xi \in \hat{G}} |\hat{A}(\xi)| \leq \eta N$$

ahol $|G| = N$.

Megjegyzés: Látni fogjuk, hogy egy halmaz minél kisebb η-val η-uniform, annál véletlenszerűbb.

A tétel bizonyítása

A tétel bizonyításához két lemmát founk bizonyítani, ezek bizonyos értelemben éppen egymás ellen fognak dolgozni. Az első lemma arról fog gondoskodni, hogy ha az A halmaz kellően véletlenszerű, akkor sok $(a_1, a_2, a_3) \in A^3$ hármas van, amire $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ vagy ami ezzel ekvivalens $\mathbb{F}_3^n$-ben, $a_1 + a_2 = 2a_3$, azaz számtani sorozatot alkotnak. A második lemma pedig éppen arról fog szólni, hogy ha az A halmaz nem elég véletlenszerű, akkor nem is egyenletes: van az $\mathbb{F}_3^n$-nek, mint affin térnek egy altere, amely az A halmaz sok elemét tartalmazza, így viszont egy indukciós bizonyításra van lehetőség.

Tétel: Az $A \subset G$ halmaz elemszáma $|A| = \alpha N$ ($|G| = N$) és tegyük fel, hogy A η-uniform. Legyen

$$M = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 = 2a_3\}$$

Ekkor

$$||M| - \alpha^3 N^2| \leq \eta \alpha N^2.$$

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy az A halmaz elemeit egymástol függetlenül α valószinűséggel választjuk. Ekkor $|A|$ várhatóan αN nagyságú lesz és $|M|$ várható értéke $\alpha^3 N^2$, ugyanis annak a valószinűsége, hogy egy egyenes mindhárom eleme A-ban van α^3 és N^2 egyenes van (két elem meghatároz pontosan egy egyenest). (A várható érték lineáris: $|M| = \sum_{a_1+a_2+a_3=0} I(a_1, a_2, a_3 \in A)$, így $E|M| = \sum_{a_1+a_2+a_3=0} EI(a_1, a_2, a_3 \in A) = \sum_{a_1+a_2+a_3=0} \alpha^3 = \alpha^3 N^2$.) Tehát minél kisebb az η, annál inkább véletlenszerű A viselkedése.

Bizonyítás:

$$|M| = \sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \sum_{a_3 \in A} \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \hat{G}} \xi(a_1 + a_2 - 2a_3) = \sum_{\xi \in \hat{G}} \frac{1}{|G|} \left(\sum_{a_1 \in A} \xi(a_1) \right) \left(\sum_{a_2 \in A} \xi(a_2) \right) \left(\sum_{a_3 \in A} \xi(-2a_3) \right) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{A}(\xi) \hat{A}(\xi) \hat{A}(-2\xi) = \frac{|A|^3}{|G|} + \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \neq \chi_0} \hat{A}(\xi) \hat{A}(\xi) \hat{A}(-2\xi)$$

Itt $\frac{|A|^3}{|G|} = \alpha^3 N^2$, igy

$$||M| - \alpha^3 N^2| \leq \frac{1}{N} \sum_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(\xi) \hat{A}(\xi) \hat{A}(-2\xi) \right| \leq \frac{1}{N} \sup_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(\xi) \right| \sum_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(\xi) \right| \left| \hat{A}(-2\xi) \right| \leq$$

Alkalmazzuk a Cauchy-egyenlőtlenséget:

$$\leq \frac{1}{N} \sup_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(\xi) \right| \left(\sum_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(\xi) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(-2\xi) \right|^2 \right)^{1/2} \leq$$

Most használjuk fel, hogy az A halmaz η-uniform:

$$\leq \frac{1}{N} \eta N \left(\sum_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(\xi) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\xi \neq \chi_0} \left| \hat{A}(-2\xi) \right|^2 \right)^{1/2} =$$

Ezt tovább írhatjuk felhásznalva a Parseval-azonosságot:

$$= \frac{1}{N} \eta N \left(N \sum_{x \in G} A(x)^2 \right)^{1/2} \left(N \sum_{x \in G} A(-2x)^2 \right)^{1/2} = \eta (N|A|)^{1/2} (N|A|)^{1/2} = \eta N |A| = \eta \alpha N^2$$

Ezzel bebizonyítottuk az allítást.

$\square$

Megjegyzés: Látható, hogy a $\xi = \chi_0$ karakter tag adja a főtagot, ami éppen a "várhato érték", az összes többi karakter pedig a hibatagot. Ez a bizonyítás jól demonstrálja a Fourier-elmélet erejét (pedig igazából nem is nagyon használtuk ki).

Következmény: Az $A \subset G$ halmaz elemszáma $|A| = \alpha N$ ($|G| = N$) és tegyük fel, hogy A η-uniform. Ekkor $|M| > (\alpha^3 - \eta\alpha)N^2$. Ha $\eta = \frac{\alpha^2}{2}$ és $N > \frac{2}{\alpha^2}$ akkor létezik a, d, melyekre $d \neq 0$ és $(a, a+d, a+2d) \in A$.

Bizonyítás: A triviális (x, x, x) megoldásokból $|A| = \alpha N$ van. Ha $\eta = \frac{\alpha^2}{2}$ es $N > \frac{2}{\alpha^2}$, akkor $(\alpha^3 - \eta\alpha)N^2 > \alpha N$, így van M-ben nem triviális megoldás is.

$\square$

Megmutatjuk, hogy ha az A halmaz nem η-uniform, akkor van egy affin altér, amely A sok pontját tartalmazza, erre az altérre aztán alkalmazhatjuk az indukciót.

Lemma:(sűrűségnövelés) Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{F}_p^n$, $|A| = \alpha N$ ($N = p^n$). Tegyük fel továbbá, hogy A nem η-uniform azaz létezik $\xi \neq \chi_0$, hogy $|\hat{A}(\xi)| > \eta N$. Legyen $H = \langle \xi \rangle^{\perp} = \{h : \ \xi(h) = 1\}$ és $h(x) = \frac{H(x)}{|H|}$. Ekkor $\sup_x (A \star h)(x) \geq \alpha + \frac{\eta}{2}$.

Megjegyzés:

$$(A \star h)(x) = \sum_{x \in G} A(y)h(x-y) = \sum_{x' \in H+x} A(x')h(x-x') = \frac{1}{|H|} \sum_{x' \in H+x} A(x') = \frac{|A \cap (H+x)|}{|H|}$$

Bizonyítás: Legyen $h \in H$, ekkor $\xi(x) = \xi(x)\xi(h) = \xi(x+h)$ vagyis H, mint részcsoport mellékosztályain ξ állandó. Legyen $H_j = H + x$ ahol $j = 0, 1, \ldots, p-1$ a teljes mellékosztályrendszer. Ekkor

$$\hat{A}(\xi) = \sum_{j=0}^{p-1} |A \cap H_j| \omega^j = \sum_{j=0}^{p-1} (|A \cap H_j| - \alpha |H|) \omega^j$$

Legyen $a_j = |A \cap H_j| - \alpha|H|$. Tehát $\sum_j |a_j| \geq |\hat{A}(\xi)| \geq \eta N$. Másrészt a definició miatt $\sum_j a_j = 0$. Így $\sum_J (a_j + |a_j|) \geq \eta N$. Tehát létezik k, melyre $|a_k| + a_k \geq \frac{\eta N}{p}$. Erre a k-ra a_k-ank pozitívnak kell lenni és így $a_k \geq \frac{\eta N}{2p} = \frac{\eta}{2}|H|$, azaz $\frac{|A \cap H_k|}{|H|} \geq \alpha + \frac{\eta}{2}$.

$\square$

Tétel bizonyítása: Dimenzióra menő indukcióval bizonyítunk. Az allítas triviális $n = 1, 2, 3, 4, 5$-re, így feltehetjük, hogy $n > 5$. Tehát tegyük fel, hogy adott $A \subset F_3^n$, melyre $|A| = \alpha N$ ahol $\alpha = \frac{5}{n}$ és $N = 3^n$. Legyen $\eta = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{25}{4n^2}$.

Tudjuk, hogy ha A η-uniform és $N > \frac{2}{\alpha^2} = \frac{2n^2}{25}$ akkor az első tétel következményeként A tartalmaz nem-triviális háromtagú számtani sorozatot. Mivel $3^n > \frac{2n^2}{25}$ minden pozitív egész n-re, így ebben az esetben kész vagyunk.

Ha A nem η-uniform akkor van olyan $n-1$ dimenziós affin altere amelyben A sűrűsége legalább

$$\alpha + \frac{\eta}{2} = \frac{5}{n} + \frac{25}{4n^2} > \frac{5}{n-1}$$

(ezutóbbi egyenlőtlenség $n > 5$-re teljesül). Így ekkor indukció miatt vagyunk készen.

$\square$