VÁRHATÓ ÉRTÉK MÓDSZER ÉS JAVÍTOTT VÉLETLEN

CSIKVÁRI PÉTER

Abstract. Ebben a jegyzetben a várható érték módszer néhány alkalmazását mutatjuk be.

1. Bevezetés

A matematikában igen gyakran szembesülünk azzal a problémával, hogy azt kell igazolnunk, hogy létezik egy bizonyos P tulajdonságú S struktúra. Az esetek nagy részében ekkor úgy járunk el, hogy megkonstruáljuk ezt az S struktúrát. Sajnos azonban ez az út nem mindig járható, néha csak egzisztencia bizonyítást tudunk adni az adott struktúra létezésére vagyis a létezésén kívűl nem sok mindent tudunk mondani. Az egyik legáltalánosabban használható módszer dolgok létezésének a bizonyítására a valószínűségi módszer. Ilyenkor azt mutatjuk meg, hogy egy alkalmasan választott valószínűségi térben pozitív valószínűséggel lesz az S struktúra P tulajdonságú.

Ebben a jegyzetben ennek a módszernek a két legtriviálisabb esetével foglalkozunk. Ezek közül is a várható érték módszer az egyszerűbb. Nagyon gyakran azt kell igazolnunk, hogy van egy olyan S struktúra, aminek egy $f(S)$ paramétere legalább ρ értékű. Ha találunk egy valószínűségi teret, amelyben egy véletlenül választott S strukturára éppen ρ az $f(S)$ várható értéke akkor pozitív valószínűséggel $f(S) \geq \rho$ és persze pozitív valószínűséggel $f(S) \leq \rho$.

A másik módszer egy kicsit rafináltabb ennél. Ekkor a véletlenül választott S struktúra még nem lesz jó, de csak kicsit lesz hibás, így azt még meg tudjuk javítani. Ez a gyakorlatban úgy működik, hogy $f(.)$ valamilyen módon éppen azt fogja mutatni, hogy mennyire rossz a struktúra (illetve ha adott egy $f(.)$ paraméter akkor készítünk egy $f'(.)$ paramétert ami egyszerre nézi $f(.)$-t és a hiba mértékét). Így ha ennek kicsi a várható értéke akkor pozitív valószínűséggel létezik kicsit hibás struktúra amit aztán megjavíthatunk.

Ez a módszer meglehetősen egyszerűnek tűnik, de a valóságban két egymással összefüggő dolog okozhatja a problémát. Az első dolog, hogy az embernek eszébe kell jutnia, hogy ezt a módszert alkalmazza és felejtse el a konstrukciót. A második pedig a valószínűségi tér megkonstruálása lehet nagyon trükkös. Az alábbiakban lássunk néhány példát, ezek között lesz nagyon triviális és lesz meglehetősen trükkös is.

Végezetül szeretném mindenkinek a figyelmébe ajánlani Noga Alon és Joel Spencer The Probabilistic Method című könyvét. Ez egy nagyon szépen megírt könyv, ezen jegyzetben szereplő összes állítás megtalálható ebben a könyvben és még sok további szép alkalmazása a valószínűségi módszernek.

2. Bemelegítés: nagy páros részgráf

2.1. **Tétel.** *Adott egy n csúcsú és $e(G)$ élű G gráf. Ekkor van G-nek olyan páros H részgráfja amelynek legalább $e(G)/2$ éle van.*

Bizonyítás. A tétel állítása úgy is újrafogalmazható, hogy adjuk meg G-nek egy $(A, V \setminus A)$ vágását, hogy a keresztbe menő élek száma $(e(A, V \setminus A))$ legalább $e/2$ legyen, ahol $e = e(G)$.

Egy $v \in V(G)$ csúcsot tegyünk $1/2$ valószínűséggel A-ba és $1/2$ valószínűséggel $V \setminus A$-ba. (Tehát definiáltuk a valószínűségi teret, választottunk egy véletlen A halmazt.) Legyen

$$X = e(A, V \setminus A)$$

valószínűségi változó. Nekünk azt kell megmutatni, hogy pozitív valószinűséggel $X \geq e/2$. Ehhez elég megmutatni, hogy $\mathbb{E}X = e/2$. Ez valóban így van: minden $f \in E(G)$ élre legyen X_f az az indikátor valószínűségi változó, amely 1 ha f az $(A, V \setminus A)$ vágásban van és 0 ha nem. Ekkor

$$X = \sum_{f \in E(G)} X_f.$$

Így a várható érték linearítása miatt

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\left(\sum_{f \in E(G)} X_f\right) = \sum_{f \in E(G)} \mathbb{E}X_f.$$

(Figyelem, itt nem kell a valószínűségi változóknak függetlennek lennie.) Másrészt minden $f \in E(G)$ esetén $\mathbb{E}X_f = 1/2$ ugyanis az f él két végpontja $1/2$ valószínűséggel van ugyanabban a kupacban és $1/2$ valószínűséggel különböző kupacokban vagyis $1/2$ valószínűséggel $X_f = 1$ és $1/2$ valószínűséggel 0. Tehát

$$\mathbb{E}X = \sum_{f \in E(G)} \mathbb{E}X_f = \sum_{f \in E(G)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e(G).$$

Ezzel kész vagyunk. □

3. Diagonális Ramsey-számok

3.1. **Tétel.** *Az n, k pozitív egészekre teljesül, hogy $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Ekkor $R(k,k) > n$. Speciálisan $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ ha $k \geq 3$.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy létezik K_n-nek olyan színézese, amely nem tartalmaz sem piros, sem kék K_k-t. Színezzünk minden élet $1/2 - 1/2$ valószínűséggel kékre illetve pirosra. Becsüljük annak a valószínűségét, hogy a színezés rossz vagyis létezik kék vagy piros K_k. Legyen $S \subset V(G)$, melyre $|S| = k$, továbbá legyen A_S az az esemény, hogy az S által feszített részgráf minden éle kék vagy piros. Ekkor

$$\mathbb{P}r(\text{színezés rossz}) \leq \sum_{|S|=k} \mathbb{P}r(A_S) = \binom{n}{k}\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}}.$$

A feltétel szerint $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, így annak a valószínűsége, hogy a színezés jó pozitív.

Megmutatjuk, hogy $k \geq 3$ esetén $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ értékre teljesül a feltétel. Valóban,

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k!}2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{2^{k^2/2}}{k!}2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{2^{(k+2)/2}}{k!} < 1.$$

ha $k \geq 3$. □

4. Független halmaz

4.1. **Tétel.** *Legyen G gráf csúcsainak fokai $d_1, \ldots, d_n$. Legyen $\alpha(G)$ a G gráf legnagyobb független halmazának a mérete. Ekkor*

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$

Bizonyítás. Vegyük a csúcsoknak egy véletlen $\pi \in S_n$ sorrendjét. Egy adott sorrendben karikázzuk be azon csúcsokat, amelyek megelőzik minden szomszédjukat az adott sorrendben. Legyen $X(\pi)$ az a valószínűségi változó, hogy a π sorrendben hány csúcsot karikáztunk be. Egy adott $v \in V(G)$ csúcs esetén legyen az X_v indikátor valószínűségi változó, hogy a v csúcsot bekarikáztuk-e vagy sem (vagyis 1 ha bekarikáztuk és 0 ha nem). Ekkor $X = \sum_{v \in V(G)} X_v$, így

$$\mathbb{E}X = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}X_v.$$

Adott $v \in V(G)$ esetén $\mathbb{E}X_v = \frac{1}{d_v+1}$ ugyanis a v csúcs és a szomszédai sorrendje is véletlen lesz az összes csúcsok sorrendjében, így annak a valószínűsége, hogy a v lesz az első csúcs a $(d_v + 1)$ csúcs közül éppen $\frac{1}{d_v+1}$. Tehát

$$\mathbb{E}X = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}X_v = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$

Tehát pozitív valószínűséggel X legalább ekkora. Másrészt tetszőleges sorrend esetén a bekarikázott csúcsok független halmazt alkotnak ugyanis ha lenne egy él két bekarikázott csúcs között akkor a sorrendben hátrébb levőt nem karikáztuk volna be. Tehát

$$\alpha(G) \geq \mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$

Ezzel kész vagyunk. □

4.2. **Megjegyzés.** A fenti tételből könnyedén levezethető a Turán-tétel.

5. Gráfok nagy kromatikus számmal és girthszel

5.1. **Tétel.** *Tetszőleges (k, ℓ) számpárra létezik olyan G gráf, melynek kromatikus száma legalább k és a legrövidebb kör hossza nagyobb, mint ℓ.*

Bizonyítás. Legyen $G(n,p)$ az a véletlen gráf, amlynek n csúcsa van és minden csúcspárt egymástól függetlenül $p = p(n)$ valószínűséggel beválasztjuk a gráf élei közé és $1-p$ valószínűséggel nem. Ebben a bizonyításban legyen $p = n^{-\alpha}$, ahol $\alpha \geq 0$ később megválasztandó paraméter. Először is becsüljük az ℓ-nél rövidebb körök számát. Egy adott $v_1 v_2 \ldots v_r$ csúcsok akkor alkotnak kört ha $v_i v_{i+1}$ $(r+1=1)$ mindegyike él, ennek a valószínűsége p^r. Nyilván a $v_1 v_2 \ldots v_r$ csúcssorozatot $n(n-1)\ldots(n-r+1)$ féleképpen választhatjuk ki, csak arra kell figyelni, hogy ugyanezt a kört megszámoltuk $2r$-szer (elforgatva és tükrözve). Legyen X a legfeljebb ℓ hosszú körök száma egy véletlen gráfban és $X(v_1 \ldots v_r)$ $(r \leq \ell)$ az az indikátor valószínűségi változó, hogy $v_1 \ldots v_r$ egy kör alkot vagy sem. Így

$$X = \sum_{r,\ v_1 \ldots v_r} X(v_1 \ldots v_r).$$

Tehát
$$\mathbb{E}X=\sum_{r,\ v_1\dots v_r}\mathbb{E}X(v_1\dots v_r)=$$
$$\sum_{r=3}^{\ell}\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{2r}p^r\le\sum_{r=3}^{\ell}\frac{(np)^r}{2r}.$$
Legyen $M=\sum_{r=3}^{\ell}\frac{(np)^r}{2r}$. Tegyük fel, hogy p megfelelő megválasztásával M-t kicsinek tudjuk választani, ekkor pozitív valószínűséggel a legfeljebb ℓ hosszú körök száma legfeljebb M lesz, így mindegyik ilyen körröl kidobva egy csúcsot kapunk egy legalább $n-M$ csúcsú gráfot amiben nincs legfeljebb ℓ hosszú kör. Valójában nekünk egy kicsit ügyesebbnek kell lenni: az kell nekünk, hogy nagy valószínűsége legyen annak, hogy kevés legfeljebb ℓ hosszú kör legyen. Szerencsére ezt azonnal megkapjuk: legalább $1/2$ valószínűséggel a legfeljebb ℓ hosszú körök száma legfeljebb $2M$. (Persze, ha több, mint $1/2$ valószínűséggel a legfeljebb ℓ hosszú körök száma legalább $2M$, akkor a várható érték nagyobb lenne M-nél.)

Mielőtt rátérnénk p megválasztására nézzük meg, hogyan becsülhető a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma. Itt azt az egyszerű észrevételt teszük, hogy
$$\chi(G)\ge\frac{n}{\alpha(G)},$$
ugyanis minden színosztály független halmazt feszít, így méretük legfeljebb $\alpha(G)$ méretű. Tehát ahhoz, hogy $\chi(G)$ nagy legyen, elég biztosítani, hogy $\alpha(G)$ kicsi legyen. Becsüljük annak a valószínűségét, hogy $\alpha(G)\ge s$. Egy s méretű S halmazra legyen A_S az az esemény, hogy S nem feszít élet. Ekkor
$$\mathbb{P}r(\alpha(G)\ge s)\le\sum_{|S|=s}\mathbb{P}r(A_S)=\binom{n}{s}(1-p)^{\binom{s}{2}}\le n^s(1-p)^{\binom{s}{2}}\le(ne^{-p(s-1)/2})^s.$$
(Az utolsó lépésben azt használtuk, hogy $1+x\le e^x$ teljesül minden x valós számra, ez egy meglehetősen standard becslés ami nem is rossz ha x kicsi.) Most mar látható, hogy mit kell szem előtt tartanunk: legyen M kicsi (konkrétan $o(n)$), amihez az kell, hogy p kicsi legyen, másrészt legyen s nem túl nagy, de $ne^{p(s-1)/2}<1$. Ez könnyedén elérhetjük, legyen $p=n^{\theta-1}$ ahol $\theta=\frac{1}{2\ell}$ és $s=\lceil\frac{3}{p}\log n\rceil$. Ekkor
$$M=\sum_{r=3}^{\ell}\frac{(np)^r}{2r}\le n^{\theta\ell}\sum_{r=3}^{\ell}\frac{1}{2r}\le n^{1/2}\log n\le\frac{n}{4}$$
ha n elég nagy. Míg
$$\mathbb{P}r(\alpha(G)\ge s)\le(ne^{-p(s-1)/2})^s\le 1/4$$
ha n elég nagy. Mivel $\mathbb{P}r(X\ge 2M)\le 1/2$ és $\mathbb{P}r(\alpha(G)\ge s)\le 1/4$, ezért pozitív valószínűséggel létezik egy gráf, melyben a legfeljebb ℓ hosszú körök száma kevesebb, mint $n/2$ és $\alpha(G)\le s$. Most dobjunk ki minden legfeljebb ℓ hosszú körről 1 pontot és legyen G^* a kapott gráf. Ekkor a G^* gráfnak legalább $n/2$ csúcsa van és nincs benne legfeljebb ℓ hosszú kör. Továbbá mivel $\alpha(G^*)\le\alpha(G)$ (hiszen G^* feszített részgráfja G-nek) így
$$\chi(G^*)\ge\frac{|V(G^*)|}{\alpha(G^*)}\ge\frac{n/2}{3n^{1-\theta}\log n}=\frac{n^{\theta}}{6\log n}.$$
Ha n elég nagy akkor ez nagyobb, mint k. Ezzel kész vagyunk. □

6. Keresztmetszési szám

6.1. **Tétel** (Ajtai-Chvátal-Newborn-Szemerédi; Leighton). *Adott G egyszerű gráf n csúcson e éllel. Legyen $X(G)$ a G gráf keresztezési száma. Ha $e \geq 4n$ akkor*

$$X(G) \geq \frac{e^3}{64n^2}.$$

Bizonyítás. Emlekeztető: egy egyszerű n csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n-6$ éle van. Így egy n csúcsú e élű gráfnak legalább $e-(3n-6)$ élpárja keresztezi egymást (miért?). Tehát

$$X(G) \geq e(G) - 3v(G).$$

(Itt a $+6$ nem lesz fontos számunkra.) A trükk az, hogy ezt az egyenlőtlenséget nem az eredeti gráfra használjuk hanem egy véletlen feszített részgráfjára. Legyen $0 \leq p \leq 1$ és tekintsük azt a G_p véletlen gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát p valószínűséggel megtartjuk és $1-p$ valószínűséggel kitöröljük. Az élek természetesen a megtartott csúcsok között mennek. Nézzük meg, hogy G_p-nek várhatóan hány csúcsa, éle és keresztezése lesz. Nyilván

$$\mathbb{E}v(G_p) = pv(G) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}e(G_p) = p^2 e(G),$$

hiszen annak a valószínűsége, hogy egy csúcs megmarad az p, annak a valószínűsége, hogy egy él megmarad (vagyis egyik végpontját sem töröljük ki) p^2. Kicsit óvatosabbnak kell lennünk $\mathbb{E}X(G_p)$ kiszámolásával, valójában ezt csak becsülni fogjuk. Kiindulva G egy optimális lerajzolásából minden keresztezés p^4 eséllyel marad meg, ennyi a valószínűsége annak, hogy a keresztmetsző élpár egyetlen csúcsat sem töröltük ki. Tehát G optimális lerajzolásából kiindulva $p^4 X(G)$ lesz a keresztmetszések számának várható értéke. Viszont lehet, hogy G_p-nek van egy jobb lerajzolása, mint amit G-ből kapnánk, így mi a következő egyenlőtlenséget állíthatjuk:

$$\mathbb{E}X(G_p) \leq p^4 X(G).$$

Tehát

$$p^4 X(G) - p^2 e(G) + 3pv(G) \geq \mathbb{E}X(G_p) - \mathbb{E}e(G_p) + 3\mathbb{E}v(G_p) =$$
$$= \mathbb{E}(X(G_p) - e(G_p) + 3v(G_p)) \geq 0.$$

Tehát $p^4 X(G) - p^2 e(G) + 3pv(G) \geq 0$ minden $0 \leq p \leq 1$ esetén. Válasszuk p-t $\frac{4v(G)}{e(G)}$-nek, ez a feltételek szerint legfeljebb 1. Ekkor

$$X(G) \geq p^{-2} e(G) - 3p^{-3} v(G) = \frac{e(G)^3}{64v(G)^2}.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás. □

Mivel az előbbi tételnél nem magátol érthetődő, hogy mire jó, ezért nézzük meg egy következményét. (Utána ennek a következménynek is egy nagyon elegáns következményét fogjuk látni.)

Adott néhány pont és egyenes a síkon. A pontok halmaza legyen $\mathcal{P}$, az egyeneseké $\mathcal{L}$. A pont-egyenes illeszkedések száma éppen az amire az ember gondol:

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{L}) = |\{(P, L) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \mid P \in L\}|.$$

Legyen $I(n,m)$ a maximális illeszkedések száma ha n pont van és m egyenes:

$$I(n,m) = \max_{|\mathcal{P}|=n, |\mathcal{L}|=m} I(\mathcal{P}, \mathcal{L}).$$

Az alábbi tétel $I(n,m)$-re ad jó becslést.

6.2. **Tétel** (Szemerédi-Trotter).

$$I(n,m) \leq 4(m^{2/3}n^{2/3} + m + n).$$

Bizonyítás. Tekintsük azt a G gráfot, melynek csúcsai a pontok (vagyis $\mathcal{P}$ elemei) és két pont össze van kötve ha egy $\mathcal{L}$-beli egyenesen szomszédos pontok. Ekkor ezen G gráf csúcsainak a száma n. Nezzük meg, hogy hány éle van. Ha egy egyenesen k pont van akkor ez meghatároz $k-1$ darab élet. Ezt összeadva az összes egyenesre, azt kapjuk, hogy ezen gráf éleinek száma $I(\mathcal{P},\mathcal{L}) - m$. Vegül becsülhetjük az $X(G)$ számot: két el metszete akkor fordulhat elő ha két egyenes metszi egymást, így legfeljebb $\binom{m}{2}$ a keresztmetszések száma. Ha $e(G) < 4n$ akkor

$$I(\mathcal{P},\mathcal{L}) < 4n + m < 4(m^{2/3}n^{2/3} + m + n).$$

Ha $e(G) \geq 4n$ akkor használhatjuk az előző tételt:

$$\binom{m}{2} \geq X(G) \geq \frac{e(G)^3}{64n^2} = \frac{(I(\mathcal{P},\mathcal{L}) - m)^3}{64n^2}.$$

Így

$$I(\mathcal{P},\mathcal{L}) \leq (32m^2n^2)^{1/3} + m < 4(m^{2/3}n^{2/3} + m + n).$$

Tehát

$$I(n,m) \leq 4(m^{2/3}n^{2/3} + m + n).$$

□

6.3. **Megjegyzés.** Valójában nagyon keveset használtunk ki abból, hogy egyeneseket tekintettünk, csak az kellett, hogy két egyenesnek legfeljebb egy metszéspontja van. Tekinthettünk volna köröket is vagy tetszőleges legfeljebb d fokú síkgörbéket is, ezeknek is korlátos sok metszéspontja van. Természetesen a tételben a konstansok romlottak volna, de egy $O_d(n^{2/3}m^{2/3} + n + m)$ alakú becslés továbbra is teljesül az illeszkedési számra.

A következőkben egy szép alkalmazását adjuk a Szemerédi-Trotter tételnek. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ véges halmaz. Legyen

$$A + A = \{a + a' \mid a, a' \in A\}$$

és

$$A \cdot A = \{a \cdot a' \mid a, a' \in A\}.$$

Ha $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ akkor $A + A = \{2, \ldots, 2n\}$ vagyis $|A + A| = 2n - 1$. Ekkor azonban $|A \cdot A| = \frac{n^2}{(\log n)^\alpha}$. Ha $A = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}\}$ akkor $|A \cdot A| = 2n - 1$, de $|A + A| = \binom{n}{2}$. Vagyis az az érzése támad az embernek, hogy az egyik halmaz a kettő közül nagy lesz akármit csinálunk. Ezt sejtésként is megfogalmazták:

6.4. **Sejtés** (Erdős-Szemerédi). Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $c(\varepsilon)$, hogy tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ véges halmaz esetén

$$|A + A| + |A \cdot A| \geq c(\varepsilon)|A|^{2-\varepsilon}.$$

A sejtés bizonyításától nagyon messze állunk. A következő eredmény óriási áttörésnek számított 1997-ben.

6.5. **Tétel** (Elekes)**.** *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ véges halmaz. Ekkor*

$$|A+A| \cdot |A \cdot A| \geq c|A|^{5/2},$$

speciálisan

$$|A+A| + |A \cdot A| \geq c'|A|^{5/4}.$$

Bizonyítás. Legyen $P = \{(a,b) \mid a \in A+A, b \in A \cdot A\}$. Ez egy ponthalmaz a síkon, melynek mérete $|A+A||A \cdot A|$.

Tekintsük azon egyeneseket, melyek a következő alakúak:

$$\ell_{a,b} = \{(x,y) \mid y = a(x-b)\},$$

ahol $a, b \in A$. Ezen egyenesek halmaza legyen L. Ekkor $|L| = |A|^2$. Minden ilyen egyenes tartalmaz $|A|$ pontot P-ből: $(b+c, ac) \in \ell_{a,b}$ ha $c \in A$. Így $I(P,L) \geq |A|^3$. A Szemerédi-Trotter tétel szerint

$$|A|^3 \leq 4((|A+A| \cdot |A \cdot A|)^{2/3}(|A|^2)^{2/3} + |A+A| \cdot |A \cdot A| + |A|^2).$$

Ebből már adódik az állítás kis számolás után. $\square$

6.6. **Megjegyzés.** Jelenleg a csúcs eredmény Solymosi József nevéhez fűződik:

$$|A+A| + |A \cdot A| \geq c(\varepsilon)|A|^{4/3-\varepsilon}.$$