1. fejezet

A sík darabolásai

DEF. A sík **darabolásának** nevezzük a G síkbarajzolt gráfot, ha minden él két különböző lappal érintkezik. (Ez azzal ekvivalens, hogy a gráfnak nincs szétvágó éle, azaz kétszeresen élösszefüggő.)

Megjegyzés: Megengedünk végtelenbe nyúló éleket (félegyeneseket) is; ezek egy közös „végtelen távoli” pontra illeszkednek.

Síkdarabolás nyilvántartása legcélszerűbben a lapok, élek és csúcsok egy-egy rekordban tárolásával történhet a következőképen:

csúcs: koordináták plusz a rá illeszkedő élek ciklikus körüljárásban (az élekre mutató pointerek kétszer körbeláncolt listája)

él: két pointer a végpontokra
meredekség (ha szükséges. Pl. ha az él félegyenes, akkor kell.)
két pointer az érintkező lapokra

lap: rá illeszkedő élek ciklikus körüljárásban (az élekre mutató pointerek kétszer körbeláncolt listája)

1. Milyen méretű lehet az adatstruktúra a pontszám függvényében?
2. Hogyan tárolnál *egyetlen* poligont?
3. (folytatás) És egy poliédert a *térben*?
4. Hogyan tárolnád a *tér* egy darabolását?

1.1. Pont helyének visszakeresése.

A következő típusú kérdéseket vizsgáljuk a továbbiakban:

hogy lehet eldönteni adott pontról, benne van-e adott (konvex vagy nem feltétlenül konvex) sokszögben vagy poliéderben; illetve a sík vagy tér adott darabolásának mely lapjára ill. cellájába esik.

5. Adott egy konvex sokszög a pontok körbeláncolt listájával. Hogyan döntenéd el, hogy egy — koordinátáival megadott — pont benne van-e?
6. (folytatás) Ha sok pontot kell vizsgálni, de a poligon mindig ugyanaz, célszerű olyan adatstruktúrát keresni, amiből $o(n)$ időben válaszolhatsz. Mutass ilyet!
7. Hogyan döntenéd el *nem feltétlenül konvex* sokszögről, hogy tartalmaz-e egy adott pontot?

Bináris keresés síkdarabolásban.

Ha síkdarabolásban keresünk egy adott pontot tartalmazó lapot, nem látszik jobb módszer, mint minden lapot egyenként megnézni, benne van-e a pont. Ez kb. élszámnyi, azaz $O(n)$ lépés. Jobb a helyzet, ha sok pont helyének kereséséhez keresünk adatstruktúrát.

Adott: A sík tetszőleges darabolása.
Keresendő: Adatstruktúra, melynek alapján a sík tetszőleges pontjáról gyorsan (azaz $o(n)$ időben) eldönthetjük, melyik lapon van.

Megjegyzés: A továbbiakban feltesszük, hogy az élek egyike sem függőleges. Ez a módszer leírását megkönnyíti, ugyanakkor az általánosságot nem csorbítja; pl. az ábrát képzeletben alkalmasan elforgathatjuk egy picit pozitív irányban. Technikailag a forgatás nem is szükséges, elég, ha a függőleges egyenesek jobb oldalát tekintjük „magasabban levő"–nek.

A következőkben ismertetendő módszer ötlete bináris keresés. Ehhez a lapokat „alulról felfelé" számozzuk; csak az a kérdés, mi van „lent" és mi „fent". Előfordulhat ugyanis, hogy egy lapnak egy másik alatt is és felette is van pontja. Ezért a számozást csak speciális, ú.n. *monoton* darabolásokra végezzük:

DEF. A sík egy darabolása **monoton**, ha bármely függőleges egyenes minden lapot legfeljebb egy intervallumban metsz.

8. Bizonyítsd be, hogy ez azzal ekvivalens, hogy minden csúcsból indul él jobbra is és balra is. (Persze ehhez szükséges egy „végtelen távoli" pont.)

9. Mutasd meg, hogy egy nem monoton darabolás monotonná tehető $\leq n$ él hozzávételével $O(n \log n)$ időben!

DEF. Egy síkdarabolás L_1 lapja akkor van az L_2 lap alatt, ha vannak azonos x–koordinátájú pontjaik, pl. $P_1(x, y_1) \in L_1$ és $P_2(x, y_2) \in L_2$, hogy $y_1 < y_2$.
Közvetlenül egymás alatt vannak, ha emellett még közös élük is van.

10. Mutasd meg, hogy monoton darabolásokra a fenti reláció
    a) antiszimmetrikus;
    b) körmentes.

    Megjegyzés: Sajnos a tranzitivitás nem igaz; szerencsére a körmentesség is elég lesz a továbbiakban. (Ennek alapján lehetne „tranzitív lezártat" definiálni, de erre nem lesz szükségünk.)

11. Adott monoton daraboláshoz hogyan határoznád meg a „közvetlenül egymás alatt levés" (irányított vagy irányítatlan) gráfját lineáris időben?

12. Bizonyítsd be, hogy
    a) a fenti relációra nézve *pontosan egy* minimális (és egyetlen maximális) lap van (abban az értelemben, hogy nincs más lap alatta ill. felette);
    b) ezek a lapok x irányban „végtelentől végtelenig" mennek!

13. Keress $O(n)$–es algoritmust monoton darabolás lapjainak olyan számozására 0–tól $l-1$–ig, hogy minden lap kisebb számot kapjon, mint a felette levők!

14. Legyen adva a sík tetszőleges monoton darabolása, amiben nincs függőleges él. Jelölje S_k a k–nál kisebb indexű lapok egyesítését a legalább k indexű lapok egyesítésétől elválasztó élek halmazát! ($1 \leq k \leq l-1$.) Mutasd meg, hogy S_k–nak minden függőleges egyenesen éppen egy pontja van!

15. (folytatás) Hogyan keresnéd meg $1 \leq k \leq l-1$–re a fenti S_k–kat?

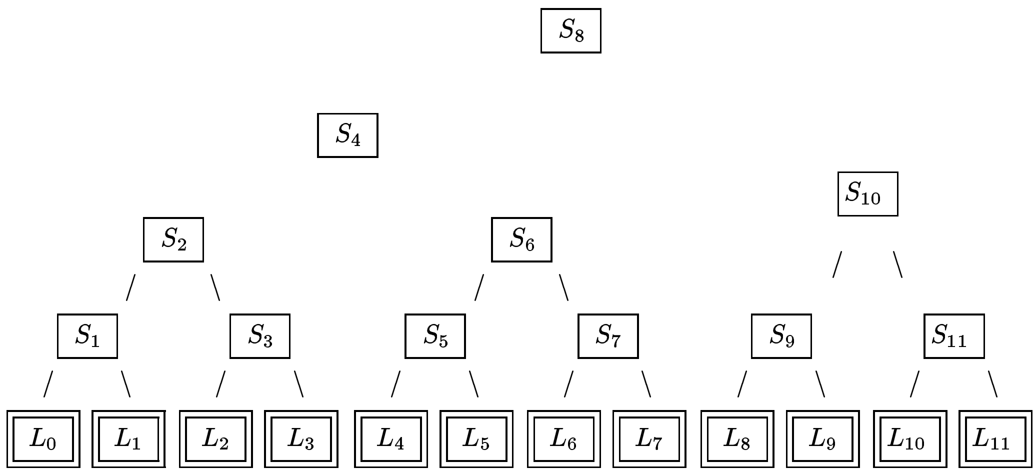
1.1.1.A. ALGORITMUS.

I. **Építés:**

1. Rendezd a pontokat x koordinátáik szerint növekvőleg!
2. Ha a darabolás nem monoton, finomítsd olyanná!
3. Számozd a lapokat „alulról felfelé”!
4. Minden $1 \le k \le l-1$–re keresd meg a k–nál kisebb indexű és a legalább k indexű lapok egyesítését elválasztó S_k élsorozatot és tárold a csúcsait a k–adik rendezett tömbben!

   Az első három lépés legfeljebb $O(n \log n)$ idő. A negyedik $l = O(n)$–szer $O(n)$, azaz a teljes építés $O(n^2)$.

II. **Adott pont helyének keresése:** k szerinti bináris kereséssel eldöntöd, melyik S_k és S_{k+1} között van a pont. Egy S_k vizsgálata („belső ciklus”): bináris keresés a csúcsok koordinátái szerint. Ez $\log n$ db. $\log n$–es ciklus; a keresés $O(\log^2 n)$ lépés. (1. Ábra.)



1. Ábra. Bináris keresés $l = 12$ lap esetén.
Az i–edik lapot L_i, a k–adik szeparáló élsorozatot pedig S_k jelöli.

Megjegyzés: egy él többször is bekerülhet az adatstruktúrába. Ez növeli $O(n^2)$–re a helyet is és az építés idejét is. (A korábbi lépések mind $O(n \log n)$ idejűek voltak.)
A következőkben ezen próbálunk javítani:

16. Ha az L_i és L_j lapok közvetlenül egymás alatt vannak, az őket elválasztó élre a keresés során melyik S_k–nál van szükség?

17. (folytatás) Hogyan számolnád a fenti k–t
   a) $O(\log n)$ időben;
   *b) $O(n)$ előkészítés után bármely $0 \le i < j \le l-1$ párra $O(1)$ időben? (Minden aritmetikai és bit–művelet megengedett.)

1.1.1.B. ALGORITMUS.

Építés:

1-2-3. Ugyanaz, mint az előbb.

4. „Topologikus söprés”:
   A végtelen távoli pontból indulva járd be az éleket balról jobbra (a „balról jövő megelőzi a jobbra menőt” részben rendezés szerint növekvőleg)! Amikor új élhez érsz, ami az i-iedik és j–edik lapot választja el, tedd az élet abba az S_k–ba, melyre $k = \mathrm{lkkő}(i,j)$. Így ez a lépés $O(1)$ idő élenként, azaz $O(e) = O(n)$ idő összesen.

Megjegyzés: A fenti S_k–k további finomításával $O(n)$ tárban elhelyezhető, $O(\log n)$ idejű visszakeresést biztosító módszer is található.

18. Konvex poliéderről hogyan döntenéd el, hogy a tér adott pontja benne van-e?
19. (folytatás) És ha *sok pont* vizsgálatához kell adatstruktúra, lehetőleg kis tárigénnyel?

1.2. Darabolás egyenesekkel

Adott: a síkban n egyenes.
Keresendő: az általuk meghatározott síkdarabolás pontjai, élei és lapjai a szokásos adatstruktúrával (kiegészítve minden szakasznál azzal, melyik egyenesnek része és minden egyenesről nyiivántartva, mely szakaszokra esett szét).

20. Milyen méretű lesz az adatstruktúra? Azaz
    a) hány pont;
    b) hány él;
    c) hány lap keletkezhet legfeljebb?
21. (folytatás) És a teret legfeljebb hány részre vághatja n sík?

* 22. (folytatás) Mi a helyzet a d dimenziós tér n hipersíkjával?

1.2.1.A. ALGORITMUS.

Építés: egyenesenként.
Ha $n-1$ egyeneshez már felépítettük az adatstruktúrát:
1. Meghatározzuk a régi egyenesek metszéspontjait az n–edikkel.
2. Rendezzük a metszéspontokat pl. x koordinátáik szerint (ha az egyenes függőleges, akkor y szerint.)
3. Sorra véve a pontokat:
   a) megkeressük, melyik átmetszett régi szakaszon vannak; ezek helyett két–két új szakaszt fűzünk be a lapok (pozitív körüljárású) él–listájába, mégpedig egyiken az egyik élet előre, másikon a másikat. Meghatározzuk az új élek végpontjait.
   b) Szétvágjuk a bővített él–listákat, befűzve az n–edik egyenesre eső új éleket.

Idő: az első lépés $O(n)$ idejű; a második $O(n\log n)$. Ha a 3.a) lépést nem elég ügyesen csináljuk, az lesz a leghosszabb: minden átmetszett szakasz keresése $O(n)$ idő; összesen $O(n^2)$ lehet.
Ha minden egyeneshez kiegyensúlyozott dinamikus (pl. 2–3) fában tartjuk a szakaszait (vagy a rajta lévő metszéspontokat), akkor egy–egy új metszéspont adminisztrációjának ideje $O(\log n)$–re szorítható le; így e lépés teljes ideje $O(n\log n)$ lesz.
Végül a 3.b) lépés konstans idejű; összesen $O(n)$.
Az idő tehát egyenesenként $O(n\log n)$; az egész algoritmus $O(n^2\log n)$ ideig tart.

Azt gondolná az ember, hogy ennél gyorsabban nem is lehet; egy új egyenes hozzávételéhez, az új metszéspontok közötti szakaszok behúzásához kell egy rendezés, ami $\Omega(n\log n)$ idő. Szerencsére az első $n-1$ egyenesből felépített adadstruktúrában olyan sok információ van elrejtve, hogy a rendezés felesleges; a metszéspontok jó sorrendben „nyerhetők ki” belőle:

1.2.1.B. ALGORITMUS.

Építés: most is egyenesenként.
Ha $n-1$ egyeneshez már felépítettük az adatstruktúrát:
1. Keresd meg a régi egyenesek metszéspontjait az n–edikkel!
2. Határozd meg, hogy az új egyenes meredeksége melyik két régié közé esik; az általa metszett „bal szélső” (végtelen) lapot ezek (is) határolják. (Ha vannak az újjal párhuzamos régi egyenesek, akkor — felülről vagy alulról, vagy mindkét irányból — ők határolják ezt az első lapot. Ha pedig az egyenes függőleges, „bal szélső” helyett „legalsó” lapot keresünk.)
3. A „végtelen távoli” pontból indulva járd körül e lap éleit, míg olyat találsz, amin új metszéspont van. Itt adminisztrálj, mint az eredeti 3. lépésben.

4. Ismételd a megtalált metszéspontot tartalmazó másik lap körüljárását és az adminisztrációt, míg minden metszéspont elfogy.

Idő: az első lépés most is $O(n)$ idejű. Egy–egy megtalált metszéspontnál most is konstans idejű az adminisztráció; összesen $O(n)$. Az a kérdés tehát, hogy

> *mennyi ideig tart az n lap körüljárása; azaz hány éle lehet összesen az n–edik egyenes által átmetszett (régi) lapoknak?*

Megmutatjuk a következő feladatokban, hogy a válasz: $O(n)$. Így egy egyenes hozzávételekor $O(n)$ időt használunk el; a javított algoritmus lépésszáma $O(n^2)$.

Davenport-Schinzel sorozatok

Feltesszük a továbbiakban, hogy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ egyenesek után behúzott $\mathbf{e}_{k+1}$ egyenes vízszintes. (Ha nem, akkor az egész ábrát elforgatjuk.) Ugyancsak feltesszük, hogy más vízszintes egyenes nincs. (Ha lenne, ezt is megbillenthetnénk egy kicsit — csak annyira, hogy ne lépjen át meglevő metszéspontot — ez nem csökkenti a szakasz–számot). A vízszintes egyenes alatt ill. felett lévő síkrészekre „alsó” ill. „felső” félsíkként hivatkozunk. Ha $\mathbf{e}_{k+1}$ átmetsz egy L lapot, annak oldalélei **bal– ill. jobboldaliak** aszerint, hogy L–nek bal– vagy jobboldalára esnek. (Másképp: az oldalél egyenesétől L — a vízszintes $\mathbf{e}_{k+1}$ irányában mozogva — jobbra ill. balra van.)

DEF. Rendeljük $\mathbf{e}_{k+1}$–hez a következő, úgynevezett **Davenport–Schinzel sorozatokat**: az általa átmetszett lapok felső (alsó) bal (jobb) oldali élei balról jobbra sorra véve (a lapokat is és az egyes lapokon belül az éleket is balról jobbra) írjuk le, hogy az él milyen számú egyenesre esik. Négy sorozatot kapunk. Az $\mathbf{e}_{k+1}$ által átmetszett élek alul is, felül is számítanak (összesen négyszer). Egy egyenes egy sorozatba többször is bekerülhet; a „majdnem vízszintesek” akár „majdnem n–szer” is.

23. Bizonyítsd be, hogy az $\mathbf{e}_{k+1}$ hozzávételekor keletkező bal (jobb) felső (alsó) sorozatban nem fordul elő
    a) sem $\ldots, x, x, \ldots$;
    b) sem $\ldots, x, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, y, \ldots$ típusú rész.
24. (folytatás) Mutasd meg, hogy k elemből képezett, sem a), sem b) típusú részt nem tartalmazó sorozat legfeljebb $2k-1$ tagú lehet!
25. Bizonyítsd be, hogy egy egyenes által átmetszett sokszögek össz-élszáma $O(n)$.

Mutatunk egy közvetlen bizonyítást is az előző állításra.

DEF. Egy $\mathbf{e}_{k+1}$ által átmetszett lap legalsó és legfelső csúcsát a továbbiakban **távoli**-nak nevezzük. Ugyanezzel a névvel illetjük a lap rájuk illeszkedő két-két élét.
FONTOS: a bal (jobb) felső (alsó) kifejezéseket a továbbiakban csak a **nem–távoli** élekre értjük!

26. Bizonyítsd be, hogy egy $\mathbf{e}_i$ egyenesen legfeljebb egy nem távoli bal (jobb) felső (alsó) él lehet!
27. Bizonyítsd be ebből is, hogy egy egyenes által átmetszett sokszögek össz-élszáma $O(n)$.

2. fejezet

Dualitás

DEF. A sík **duális** vagy **pólus–poláris transzformációjának** nevezzük azokat a megfeleltetéseket, amelyek
- pontokhoz egyeneseket rendelnek;
- egyenesekhez pontokat rendelnek;
- illeszkedéstartóak.

Fontos szerepe lesz a továbbiakban a következő $\mathcal{D}$ hozzárendelésnek, ami a sík pontjait és a *nem függőleges* egyeneseket felelteti meg egymásnak:

$$P(a,b) \overset{\mathcal{D}}{\leftrightarrow} \mathbf{e}\colon y = 2ax - b.$$

$\mathcal{D}$–t **parabolikus pólus–poláris transzformáció**nak nevezzük. Az elnevezést a következő feladat a) állítása motiválja:

1. Mutasd meg, hogy
   a) ha P az $y = x^2$ parabola pontja, akkor a fenti $\mathcal{D}$ által hozzárendelt $\mathbf{e}$ egyenes a parabola P–beli érintője;
   b) ha $\mathbf{e} = \mathcal{D}(P) \mathrel{\phi} Q$, akkor $P \mathrel{\phi} \mathcal{D}(Q)$, azaz $\mathbf{e}$ pontjaihoz a transzformáció P–re illeszkedő egyeneseket rendel;
   c) ha a P pont az $\mathbf{f}$ egyenes felett van, akkor a $\mathcal{D}(f)$ pont a $\mathcal{D}(P)$ egyenes felett lesz.

   VIGYÁZAT! Nem a felső képe lesz felül! Ehelyett inkább „a pont az egyenes felett van” reláció marad meg.
2. (folytatás) Párhuzamos egyenesek milyen pontoknak felelnek meg?

DEF. $\mathbf{R}^d$ parabolikus pólus–poláris transzformációja a

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_d) \overset{\mathcal{D}}{\leftrightarrow} x_d = 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \ldots 2a_{d-1}x_{d-1} - a_d.$$

Megjegyzés: $d = 3$–ra ez a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloiddal, általában pedig az $x_d = \sum_1^{d-1} {x_i}^2$ „d dimenziós forgásparaboloiddal” van szoros kapcsolatban; az előző feladathoz hasonló állítások mondhatók egyenesek helyett síkokkal (ill. $d-1$ dimenziós hipersíkokkal).

Az egyenesek és pontok illeszkedésének axiómái szimmetrikusak; az „egyenes” és „pont” szavak egymással felcserélhetőek. Ebből következően

> *minden olyan tételnek, amiben csak a fenti két fogalom és az „illeszkedik” reláció szerepel, van egy duálisa, ami a két szó felcserélésével keletkezik.*

Az, hogy igaz állítás duálisa is igaz, éppen a fenti $\mathcal{D}$ duális megfeleltetés létezéséből igazolható a legegyszerűbben. (Az új alakzat duálisára alkalmazzuk az eredeti állítást.) Lássunk egy példát:

A kombinatorikus geometriai kérdések közül az egyik legrégebbi Sylvester sejtése, amit Gallai oldott meg:

1.Tétel. *Ha a sík $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontjai nincsenek mind egy egyenesen, akkor van olyan egyenes, ami pontosan két P_i–t tartalmaz.*

* 3. Igazold az 1.Tételt!

A tétel duálisa a következő:

2.Tétel. *Ha a sík* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *egyenesei nem mennek át mind egy ponton és nincs köztük két párhuzamos, akkor van olyan pont, ahol pontosan két* $\mathbf{e}_i$ *metszi egymást.*

Hogy jobban látszódjék a dualitás, kimondjuk a két tételt kissé más alakban:

1'.Tétel. *Ha a sík* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *pontjai nem illeszkednek mind egy egyenesre, de bármely kettőre illeszkedik egyenes, akkor van olyan egyenes, ami pontosan két* P_i*-re illeszkedik.*

2'.Tétel. *Ha a sík* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *egyenesei nem illeszkednek mind egy pontra, de bármely kettőre illeszkedik pont, akkor van olyan pont, ami pontosan két* $\mathbf{e}_i$*-re illeszkedik.*

Megjegyzés: Az 1'.Tételbe bekerült a semmitmondó „bármely kettőre illeszkedik egyenes" feltétel. Ezt elkerülhettük volna, ha a 2.Tételben a párhuzamos egyeneseket (minden irányhoz külön) egy–egy ideális ponttal kiegészítve képzeljük.

4. Bizonyítsd be a 2.Tételt kétféleképpen:
   a) közvetlenül;
   b) az 1.Tétel és a $\mathcal{D}$ duális transzformáció segítségével!

DEF. Azt mondjuk, hogy egy ponthalmazt a sík két egyenese ugyanúgy vág szét, ha az egyenes fölé eső pontok halmaza mindkét esetben azonos. Például a 0–tól különböző természetes számok halmazát az $y = x$ és $y = 2x$ egyenesek egyformán vágják ketté, de az $y = -x$ egyenes másképp (az alsó ill. felső pontok halmaza megcserélődött).

* 5. A sík n pontja legfeljebb hányféleképpen vágható szét egyenesekkel?

3. fejezet

Konvex halmazok

3.1. Alapfogalmak

DEF. A sík (tér, $\mathbf{R}^d$) egy K részhalmaza **konvex**, ha bármely $P_1, P_2 \in K$ pontpárral együtt a $\overline{P_1P_2}$ szakasz is K–ban van.

1. Konvex halmazok közös része konvex. (Akár végtelen sok konvex halmaz metszete is!)
2. Tetszőleges H ponthalmazhoz van olyan $\mathcal{C}(H)$ halmaz (és csak egy), ami
   i) konvex;
   ii) $\mathcal{C}(H) \supset H$
   iii) az i)–ii) tulajdonságokra legkisebb, azaz bármely konvex K–ra

$$K \supset H \;\Rightarrow\; K \supset \mathcal{C}(H).$$

DEF. A fenti $\mathcal{C}(H)$–t a H **konvex burkának** nevezzük.

3. Legyen A, B és C egy K konvex halmaz három pontja. Bizonyítsd be, hogy az általuk meghatározott teljes háromszöglap K–ban van!
4. (folytatás) Általánosíts!
5. Ha a P pont nincs benne a K *zárt* konvex halmazban, akkor van olyan zárt félsík (féltér), ami nem tartalmazza P–t, de K–t igen.
6. Bármely zárt konvex halmaz előáll félsíkok (félterek) metszeteként.
   Megjegyzés: Eszerint zárt halmaz konvex burkát az őt tartalmazó zárt félsíkok (félterek) közös részeként is definiálhatjuk.

DEF. A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok **konvex kombinációi** (vagy konvex lineáris kombinációi):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n\,, \qquad \text{ha } \lambda_i \geq 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \ \text{ és } \sum_1^n \lambda_i = 1.$$

Megjegyzés: Ha végtelen sok vektorunk van, akkor is *csak véges sok* szerepelhet a kombinációkban!

DEF. **Ponthalmaz konvex kombinációi** a helyvektorok konvex kombinációi.

7. Mutasd meg, hogy tetszőleges H halmaz konvex burka pontosan a pontok konvex kombinációiból áll!
8. Konvex halmaz vetülete (egyenesre, síkra, ..., hipersíkra) szintén konvex.
9. Az egyenes konvex halmazai pontosan az intervallumok.
10. A síkban (térben, $\mathbf{R}^d$–ben) tetszőleges K korlátos konvex halmazhoz és tetszőleges $\underline{i}$ irányhoz van olyan $\mathbf{e}$ egyenes (sík, hipersík), hogy
    i) $\mathbf{e}$ merőleges $\underline{i}$–re;
    ii) K–nak nincs pontja $\mathbf{e}$–től $\underline{i}$ irányban;
    iii) Bármilyen kevéssel mozdítjuk el $\underline{i}$–vel ellentétes irányban $\mathbf{e}$–t, az új egyenestől $\underline{i}$ irányban már lesz pontja K–nak.

DEF. A fenti **e**–t a K konvex halmaz $\underline{i}$ irányú **támaszegyenesének** (támaszsíkjának, támasz-hipersíkjának) nevezzük.

Tétel. *Konvex halmaz határának bármely pontjára illeszkedik támaszegyenes (támaszsík, támasz-hipersík).*

(A bizonyítást lásd a „Helly tétel alkalmazásai” c. rész végén.)

3.2. Affin kombinációk. Radon tétele.

DEF. A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok **affin kombinációi** (vagy affin lineáris kombinációi):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n\,, \qquad \text{ha } \sum_1^n \lambda_i = 1.$$

DEF. **Ponthalmaz affin kombinációi** a helyvektorok affin kombinációi.

(A konvex kombinációknál tehát annyival általánosabbak ezek, hogy a λ_i–k negatívak is lehetnek. Például két pont (vektor) konvex kombinációi az összekötő szakasz pontjai, affin kombinációik a rajtuk átmenő egyenes összes pontja.)

Megjegyzés: Ha végtelen sok vektorunk van, akkor is *csak véges sok* szerepelhet a kombinációkban!

DEF. A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok **affin összefügőek**, ha valamelyikük a többi affin kombinációja. **Affin függetlenek,** ha nem összefüggőek.

11. Bizonyítsd be, hogy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ akkor és csak akkor affin összefüggőek, ha van olyan nem–triviális lineáris *(nem affin!)* kombinációjuk, amelyre

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \underline{0} \ \text{ és } \sum_1^n \lambda_i = 0.$$

12. Bizonyítsd be, hogy az $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok akkor és csak akkor affin összefüggőek (ill. függetlenek), ha a $v_0 - v_1, v_0 - v_2, \ldots, v_0 - v_n$ vektorok lineárisan összefüggnek (ill. függetlenek)!
13. A sík (tér, $\ldots, \mathbf{R}^d$) bármely négy (öt, $\ldots, d+2$) vektora affin összefüggő.

Radon tétele. *A sík (tér, $\ldots, \mathbf{R}^d$) bármely négy (öt, $\ldots, d+2$) pontja két részre osztható úgy, hogy a részek konvex burkainak legyen közös pontja.*

14. Igazold Radon tételét!

3.3. Konvex burok keresése a síkban

Adott: a $H = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ véges ponthalmaz a síkban.
Keresendő: $\mathcal{C}(H)$, a halmaz konvex burka (azaz a csúcsok, megfelelő körüljárásban).

15. Mi a feladat duálisa és hogyan oldanád azt meg $O(n^2)$ időben?

A csomag–kötöző algoritmus.

3.3.1. ALGORITMUS.

1. Válaszd ki a legkisebb x koordinátájú pontot!
2. Nevezd ezt aktuális pontnak; legyen az aktuális meredekség $-\infty$.
3. Kösd össze az aktuális pontot a többivel és keresd ki az aktuálisnál meredekebb összekötő szakaszok közül a legkisebb meredekségűt (ha több van, akkor a leghosszabbat)! Ennek végpontja lesz a konvex burok következő (aktuális) pontja; a szakasz meredeksége az aktuális meredekség.
4. Amíg adódik újabb pont, ismételd a 3. lépést!
5. Legyen az aktuális pont újra a legkisebb x koordinátájú és az aktuális meredekség $+\infty$.
6. Ismételd a 3. lépést legkisebb meredekség helyett legnagyobbal, amíg eljutsz az utolsó pontba!

Idő: $O(h \cdot n)$, ahol h a konvex burkon levő csúcsok száma. Ez legrosszabb esetben szintén $O(n^2)$, de ha valami információnk van a pontok eloszlásáról, akkor jobb is lehet. Például egy négyzetben egyenletes eloszlás esetén h várható értéke $O(\log n)$, körlemezen egyenletes eloszlásnál $\sqrt[3]{n}$, normális eloszlásra $\sqrt{\log n}$.

Két gyors algoritmus.

A következő algoritmusok előre rendezett pontok esetén lineáris időben működnek. (Ha rendezni kell őket, az persze $O(n \log n)$ idő.) Az algoritmusokat arra a speciális esetre ismertetjük, ha nincs két azonos x koordinátájú pont. Az általános eljárást lásd a feladatok között.

3.3.2.A. ALGORITMUS.(Pontok hozzávétele egyenként.)

1. Rendezd a pontokat x koordinátáik szerint növekvőleg! (Feltesszük a továbbiakban, hogy a számozás már ilyen.)
2. Az első három pont konvex burka triviális.
3. $k = 4$–től n–ig végezd el a következőket:
4. Kösd össze P_k–t P_{k-1}–gyel;
5. Mozgasd az összekötő szakasz kezdőpontját (eredetileg P_{k-1}–et) a $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ pontok (már meghatározott) konvex burkán felfelé addig, amíg a meredekség csökken;
6. Mozgasd az összekötő szakasz kezdőpontját (eredetileg P_{k-1}–et) a korábbi konvex burkon lefelé addig, amíg a meredekség nő;
7. Megkaptad $P_1, P_2, \ldots, P_k$ konvex burkát. Ismételd a 4. lépéstől az eggyel növelt k–ra.

Idő: Látszólag most is $\Theta(n^2)$. (P_k hozzávételekor előfordulhat, hogy $\Theta(n)$ korábbi pontot kell átlépnünk.) Valójában a rendezés kivételével (ez $O(n \log n)$) a többi lépés **lineáris**! Nézhetjük ugyanis a dolgok másik oldalát: egy pontot csak egyszer ugorhatunk át! (Ha átugrottuk, kikerül a konvex burokból és már soha nem térhet vissza.) Így minden ponthoz (P_k szerepében) két megtalált határ–szakasz tartozik; P_{k-1} szerepében pedig legfeljebb egy átugrás. Eszerint a rendezésen kívül minden típusú lépésből összesen is csak $O(n)$ történik.

16. Módosítsd az algoritmust úgy, hogy egymás alatti pontok esetén is működjön!

3.3.2.B. ALGORITMUS. („Oszd meg és uralkodj!")

1. Mint előbb, most is rendezd a pontokat x koordinátáik szerint növekvőleg! (Feltesszük a továbbiakban, hogy a számozás már ilyen.)
2. Ha legfeljebb három pont van, a konvex burok triviális.
3. Rekurzíve határozd meg $P_1, P_2, \ldots, P_{\lfloor n/2 \rfloor}$ és a maradék ponthalmaz konvex burkát!
4. Kösd össze a $P_{\lfloor n/2 \rfloor}$ és $P_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ pontokat!

5. Amíg a két pontot összekötő szakasz valamelyik végpontjának felső szomszédja a szakasz felett van, mozgasd azt a végpontot felfelé!
6. Amíg az eredeti két pontot összekötő szakasz valamelyik végpontjának alsó szomszédja a szakasz alatt van, mozgasd azt a végpontot lefelé!

Idő: Az előző elemzés ötletével itt is $O(n)$ az $O(n \log n)$–es rendezés után.

* 17. Legyenek adva az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ egyenesek (melyek között nincs függőleges). Tegyük fel, hogy nem a *teljes* síkdarabolásra vagy kíváncsi, hanem csak arra a részre, amelyik *az összes* $\mathbf{e}_i$ *felett* helyezkedik el. Mutass
   (a) $O(n^2)$;
   (b) $O(n \log n)$ idejű algoritmust!
   (c) Találj olyant is, ami *meredekség szerint rendezett egyenesek esetén* $O(n)$ idejű!

3.4. Konvex burok keresése a térben és magasabb dimenzióban

A három dimenziós térben van $O(n)$ idejű konvex burok kereső algoritmus. Ezt itt terjedelmi okokból nem részletezzük, de a továbbiakban ismertnek tételezzük fel és rendszeresen használjuk.

18. Tegyük fel, hogy a tér $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontjainak duálisai az $a_1, a_2, \dots, a_n$ síkok. Jelölje $b_1, b_2, \dots, b_m$ a $\mathcal{C}(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$ konvex burok alsó lapjait tartalmazó síkokat (tehát azokat, amelyek a burok alatt helyezkednek el), továbbá $B_1, B_2, \dots, B_m$ az a_i (nem függőleges) síkok fölé eső térrész csúcsait. Ekkor
   (a) a b_i–k és B_i–k egymás duálisai;
   (b) a b_i–re és b_j–re eső lapok pontosan akkor szomszédosak, ha a B_i és B_j pontokat él köti össze.
19. Határozd meg a tér adott n darab nem–függőleges síkja fölé eső térrész lapjait, éleit és csúcsait
   (a) $O(n^2)$ időben;
   (b) $O(n \log n)$ időben!

A d **dimenziós térben** van $O(n^{\lceil d/2 \rceil})$ idejű konvex burok kereső algoritmus.

3.5. Alsó becslések

Alsó becslés a síkban

Első célunk annak igazolása, hogy a síkbeli konvex burok keresésének időigénye mindenféle értelemben $cn \log n$. (Ebből persze ugyanilyen alsó becslés adódik a térre is.)

20. Mutasd meg, hogy konvex burok kereső algoritmussal rendezni is lehet!

Eszerint az algoritmus időigénye valóban legalább $cn \log n$.
Mi a helyzet, ha csak azt várjuk az algoritmustól, hogy a csúcsokat megadja (de a sorrendet nem feltétlenül)? Persze ekkor a fenti ötlet nem működik. Bebizonyítjuk azonban, hogy ekkor is érvényben marad ugyanez az alsó becslés.
A módszert először egy egyszerűbb problémán mutatjuk be.

Tétel: (Ben–Or). *Ahhoz, hogy* n *számról csupán magukra a számokra vonatkozó „kisebb-egyenlő-nagyobb” döntések sorozatával eldöntsük, mindegyik különböző-e, legalább* $c \cdot n \log n$ *lépés szükséges* (és annyi persze elégséges is, pl. ha rendezünk).

Bizonyítás: Képzeljük az n számot az n-dimenziós euklideszi tér egy pontja koordinátáinak.

DEF. Algebrai döntési fa (r–edfokú): minden csúcsában az adatokból képzett egy–egy legfeljebb r–edfokú polinomról döntjük el, negatív vagy 0 vagy pozitív. Egyes levelekben „IGEN”, másokban „NEM” jel található, mint az algoritmus válasza a döntési problémára.
Megjegyzés: Az algebrai döntési fa tehát nem magát az algoritmust modellezi, csak a döntések struktúráját. Természetesen, ha segítségével alsó becslés adódik a döntések számára, akkor ez alsó becslés lesz a teljes lépésszámra is.
A Ben–Or–tételben szereplő feladatot megoldó algoritmusokat elsőfokú döntési fa modellezi.

21. Legyen egy döntési fa magassága h.
    (a) Mit jelent ez az általa modellezett algoritmus lépésszámára?
    (b) Hány levele lehet (legfeljebb) a fának?

DEF. Döntési fa egy L leveléhez tartozó pontok halmaza: $\mathbf{R}^n$ azon pontjai, amelyek koordinátáit adatként adva az algoritmusnak, a fának ebbe a levelébe érkezünk.

22. Bizonyítsd be, hogy az egy levélbe érkező pontok halmaza konvex.
23. Korrekt választ adó algoritmus esetén az egy „IGEN” levélbe érkező összes pontra a koordináták ugyanolyan nagyság szerinti sorrendben vannak. (Azaz ha az egyik pontra $x_i > x_j$, akkor a többire is; persze a sorrend általában se nem növekvő, se nem csökkenő.)
24. Bizonyítsd be Ben–Or tételét!

Most rátérünk a konvex burok keresés bonyolultságának alsó becslésére.

Tétel: (Ben–Or). *Legyen adva a síkon n darab pont. Ahhoz, hogy legfeljebb r–edfokú döntésekkel megállapíthassuk, mindegyikük csúcsa-e a konvex burkuknak, legalább $c \cdot n \log n$ döntés szükséges.*

Megjegyzés: A természetes algoritmusoknál az összehasonlítás alapja a pontokat összekötő szakaszok meredeksége. Ha például az $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ törtet hasonlítjuk az $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$ törthöz, ez az összehasonlítás (a nevezőkkel való átszorzás után) másodfokú. A tételben magasabb (de fix) fokúakat is megengedünk.
Bizonyítás: Ezúttal rendeljük hozzá az n darab síkbeli ponthoz a koordinátáikkal meghatározott $\mathbf{R}^{2n}$–beli pontot. Ekkor az egy „IGEN” levélbe érkező ($\mathbf{R}^{2n}$–beli) pontok olyan ($\mathbf{R}^2$–beli) pont–n–eseknek felelnek meg, amelyek mindnyáján csúcsai a konvex buroknak. Van értelme tehát ezek ciklikus sorrendjéről beszélni. (Ez azt jelenti, hogy az n–edik pontban ülve, milyen sorrenben látjuk balról jobbra a többi $n-1$–et.)

25. Hány ciklikus sorrendje van n elemnek?

Segédtétel (Milnor és Thom tétele). *A $2n$ dimenziós teret h darab r–edfokú döntés legfeljebb $(2r)^{2n+h}$ összefüggő részre osztja.*

26. Mutasd meg, hogy korrekt választ adó algoritmus esetén az egy „IGEN” levélbe érkező pontoknak megfelelő pont–n–esek legfeljebb $(2r)^{2n+h}$ különböző ciklikus sorrendet határozhatnak meg.
27. Bizonyítsd be a második Ben–Or–tételt is!

Alsó becslés d dimenzióban. A momentum–görbe.

DEF. d dimenziós **momentumgörbének** nevezzük (és a rövidség kedvéért MG–vel jelöljük) a következő, valós t paraméterezésű görbét:

$$\varphi(t) := (t, t^2, t^3, \dots, t^d) \in \mathbf{R}^d$$

28. Az $\mathbf{R}^d$-beli momentumgörbe tetszőleges $d+1$ különböző pontja általános helyzetű.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $k \le d/2$ és $P_1, P_2, \dots, P_k$ a d-dimenziós MG különböző pontjai. Ekkor létezik olyan H hipersík R^d-ben, amely pontosan ezen pontokban érinti a a MG-t, azaz amelynek ezek és csak ezek a közös pontjai a MG-vel és a MG a H hipersík egyik oldalán helyezkedik el.*

29. Legyenek a tételben szereplő pontok paraméterei $t_1, t_2, \ldots, t_k$, azaz maguk a pontok $P_i(t_i^1, t_i^2, \ldots, t_i^d)$. A

$$p(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - t_i)^2$$

egyváltozós polinomot kifejtve — alkalmas c_i együtthatókkal —

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{2k} t^{2k} + c_{2k+1} t^{2k+1} + \ldots + c_d t^d$$

alakot kapunk. Bizonyítsd be, hogy a

$$c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_d x_d = 0$$

egyenletű H hipersík megfelel a tétel követelményeinek!
(Itt természetesen $c_{2k} = 1$ és $c_i = 0$ ha $i > 2k$.)

30. $\mathbf{R}^{2k}$-ban tetszőleges n természetes számra megadhatók $P_1, \ldots, P_n$ pontok úgy, hogy közülük bármely k a $\mathcal{C}(P_1, \ldots, P_n)$ egy $k-1$ dimenziós burkolóját határozza meg.

31. $\mathbf{R}^{2k}$-ban a konvex burok keresése legalább $\Omega(n^k)$ idő.

3.6. Nagy konvex sokszögek

Nagy konvex sokszög létezése

Következő témakörünk alapkérdése:

Igaz-e, hogy elég sok (általános helyzetű) pont közül kiválasztható nagy konvex sokszög?

Precízebben:

Létezik-e minden m–hez olyan K, hogy ha $n \geq K$ pont közül semelyik három sincs egy egyenesen, akkor kiválasztható m darab, amelyek egy konvex m–szög csúcsait alkotják?

A problémát Erdős és Szekeres vetette fel; az itt következő eredmények is tőlük származnak. Kiinduló észrevételük a következő volt:

32. A sík öt általános helyzetű pontja között mindig van négy, amelyek konvex négyszöget határoznak meg.

A kérdés e feladatban szereplő, igen speciális esetének segítségével (és felhasználva Ramsey tételét) megoldották az általános problémát is:

* 33. Bizonyítsd be, hogy a sejtés minden m–re igaz!

Következő kérdésük a legkisebb alkalmas K meghatározása lett volna. A továbbiakban ezt $K(m)$–mel jelöljük. Sajnos ennek értékét nem sikerült pontosan meghatározniuk; megoldottak viszont egy rokon feladatot, amiből jó becslés adódott $K(m)$–re is.

Konvex ívek.

Ha az ember megpróbál adott pontokból nagy konvex részt összerakni, és két kis ponthalmazt már talált, ezek nem feltétlenül illeszthetők össze egy nagy konvex darabbá. Ehhez az is szükséges, hogy „egymás felé" legyenek nyitottak; pl. az egyik lefelé, a másik felfelé. (Persze önmagában még ez sem elégséges!)

DEF. A $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ pontsorozat **konvex (konkáv) ív,** ha az x koordináták növekvőek és a $\overline{Q_i Q_{i+1}}$ szakaszok meredeksége monoton nő (csökken). Másszóval akkor, ha van olyan konvex (konkáv) függvénygörbe, amelyre a Q_i pontok illeszkednek.

* 34. Mutasd meg, hogy ha $n \geq R_2{}^3(k,l)$ általános helyzetű pont között nincs kettő egymás alatt, akkor tartalmaznak vagy k pontú konvex, vagy l pontú konkáv ívet!

35. (folytatás) Milyen becslés adódik $K(m)$–re az előző feladatból?

Lehetséges, hogy kevesebb pont nem is elég? Megpróbáltak nagy ponthalmazt találni, amiben nincs se k pontú konvex ív, se l pontú konkáv.

* 36. Mutass $\binom{k+l-4}{k-2}$ ilyen pontot!

Ennél többet nekik sem sikerült találniuk. Bebizonyították hát, hogy nem is lehet:

Tétel. (Erdős–Szekeres) *Ha a sík $\binom{k+l-4}{k-2}+1$ általános helyzetű pontja között nincs kettő egymás alatt, akkor tartalmaznak vagy k pontú konvex, vagy l pontú konkáv ívet!*

37. Milyen becslés adódik $K(m)$–re a tételből?

A fenti tétel bizonyításához egy Ramsey–típusú segédtételt használtak.

DEF. Rendeljünk a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokon adott teljes gráf éleihez tetszőlegesen $w(P_iP_j)$ súlyokat! Az $i_0 < i_1 < \ldots < i_r$ indexek által meghatározott pontsorozat szomszédos tagjait összekötő $\mathbf{e}_j = (P_{i_{j-1}}P_{i_j})$ élek **monoton növő (csökkenő) élláncot** alkotnak, ha $w(\mathbf{e}_1) \leq w(\mathbf{e}_2) \leq \ldots \leq w(\mathbf{e}_r)$ (illetve ha $w(\mathbf{e}_1) \geq w(\mathbf{e}_2) \geq \ldots \geq w(\mathbf{e}_r)$).

Erdős–Szekeres Lemma. *Ha $n \geq \binom{k+l-4}{k-2}+1$, akkor a fenti súlyozott élű teljes gráfban vagy van k pontú monoton növő, vagy van l pontú monoton csökkenő lánc.*

38. Mutasd meg, hogyan következik a lemmából a tétel!

A lemma bizonyítása:

I. Rendeljünk hozzá minden $\mathbf{e}$ élhez egy $\langle a(\mathbf{e}), b(\mathbf{e})\rangle$ számpárt úgy, hogy $a(\mathbf{e})$ ill. $b(\mathbf{e})$ jelöli a leghosszabb olyan növő ill. csökkenő éllánc hosszát, melynek első tagja $\mathbf{e}$.

II. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{e}_1 = (P_iP_{j_1})$ jobb az azonos kezdőpontú $\mathbf{e}_2 = (P_iP_{j_2})$ élnél, ha $a(\mathbf{e}_1) \geq a(\mathbf{e}_2)$, $b(\mathbf{e}_1) \geq b(\mathbf{e}_2)$ és legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú.

III. Az $\mathbf{e}$ él a P_i kezdőpontból nézve maximális, ha nincs vele azonos kezdőpontú, nála jobb él.

IV. Végül minden $0 \leq i \leq n$ –re rendeljük hozzá a P_i ponthoz a következő halmazt:

$$H_i = \{\langle a(\mathbf{e}), b(\mathbf{e})\rangle \quad | \quad \mathbf{e} \text{ kezdőponja } P_i \text{ és onnan nézve maximális}\}.$$

Vizsgáljuk meg a fenti H_i–k tulajdonságait:

39. Bizonyítsd be, hogy
   (i) $i \neq j$–re $H_i \neq H_j$;
   (ii) H_i-t egyértelműen meghatározzák a számpárokban szereplő a-k ill. b-k halmazai.

40. (folytatás) Bizonyítsd be a fenti feladat segítségével az Erdős–Szekeres lemmát!

Újra a konvex sokszögek.

** 41. Mutass 2^k általános helyzetű pontot, amelyek között nincs konvex $k+2$–szög!

Az előző és a 37. feladat szerint tehát

$$2^{m-2}+1 \leq K(m) \leq \binom{2m-4}{m-2}+1 = O(4^m/\sqrt{m}).$$

Sejtés: a bal oldali egyenlőtlenség az éles.

3.7. Maximális konvex sokszög keresése

Adott: Tetszőleges véges ponthalmaz a síkban úgy, hogy nincs három pont egy egyenesen. Feltesszük, hogy nincs két azonos x koordinátájú pont. (Ha lenne, elforgatjuk az ábrát.)

Keresendő: A ponthalmaz maximális számú olyan pontja, melyek konvex sokszög csúcsai.

Az előzőek szerint nagy ponthalmazból sok ilyen pont választható. De hogy találjuk meg a lehető legtöbbet?

A feladatra két algoritmust ismertetünk. Közös bennük, hogy mindkettő konvex és konkáv íveket keres a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ponthalmazban. Közös végpontú konvex és konkáv ívek összeolvasztása adja a maximális oldalszámú konvex sokszög csúcsait. (**Konvex (konkáv) ív**nek nevezzük a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ pontsorozatot, ha van olyan konvex (konkáv) függvénygörbe, amelyre a Q_i pontok illeszkednek.)

3.7.1. ALGORITMUS.(Dinamikus programozás.)

1. Rendezd a P_i pontokat x koordinátáik szerint!
2. Két darab háromdimenziós tömböt használunk. Ha $i < j < k$, akkor

$$K^+(i,j,k) = \text{max. konvex } P_i, \ldots, P_j, P_k \text{ ív élszáma } (P_j \text{ az utolsó előtti pont});$$
$$K^-(i,j,k) = \text{max. konkáv } P_i, \ldots, P_j, P_k \text{ ív élszáma } (P_j \text{ az utolsó előtti pont}).$$

Inicializálás: Minden $1 \le i < k \le n$–ra legyen $K^+(i,i,k) := K^-(i,i,k) := 1$.
Feltöltés:
Minden $i \le n-2$–re
Minden $i+2 \le k \le n$–re
Minden $i < j < k$–ra

$$K^+(i,j,k) := \begin{cases} 1 + \max\limits_{i \le t < j} \{K^+(i,t,j) \mid P_t P_j P_k \text{ konvex}\} & \text{, ha } P_i P_j P_k \text{ konvex;} \\ 0 & \text{, ha nem.} \end{cases}$$

és hasonlóan

$$K^-(i,j,k) := \begin{cases} 1 + \max\limits_{i \le t < j} \{K^-(i,t,j) \mid P_t P_j P_k \text{ konkáv}\} & \text{, ha } P_i P_j P_k \text{ konkáv;} \\ 0 & \text{, ha nem.} \end{cases}$$

3. **Output**

$$\max_{i<k} \left\{ \max_{i<j<k} K^+(i,j,k) + \max_{i<j<k} K^-(i,j,k) \right\}$$

Tárigény: $O(n^3)$.
Idő: $O(n^4)$. Ugyanis a tömbök egy–egy elemének meghatározásához $O(n)$ idő kell (legfeljebb n darab számból kell a maximálisat keresni); összesen $O(n^4)$. A többi lépés (n^2 pont rendezése $O(n^2 \log n)$, inicializálás $O(n^2)$, n^2 darab maximum keresés $O(n^3)$) ennél rövidebb.

(Lásd még a következő duális problémát megoldó jobb algoritmust.)

3.7.0.1. A duális probléma

DEF. A sík egyeneseinek adott halmaza (melyek között nincs függőleges) **homokóra**, ha bármelyik belemetsz vagy az összes többi fölötti, vagy az összes többi alatti síkrészbe. (Úgy is mondhatjuk, hogy mindegyiknek van szakasza vagy az összes egyenes alatt, vagy az összes felett lévő síkrész határán.)

Megjegyzés: Ha az egyenesek alatti síkrészt a homokóra alsó, a felettük lévőt a felső üvegének képzeljük, érthetővé válik az elnevezés. Az előbi határát alkotó éleket alsó ívnek, az utóbbit határolókat felső ívnek nevezzük a továbbiakban.

Adott: tetszőleges véges egyeneshalmaz a síkban úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Feltesszük, hogy nincs köztük függőleges. (Ha van, elforgatjuk az ábrát.)
Keresendő: maximális számú olyan egyenes, amelyek homokórát alkotnak.

42. Mutasd meg, hogy ez a probléma az előző, konvex sokszöget kereső kérdés duálisa.

3.7.2. ALGORITMUS.(Egyben újabb algoritmus maximális konvex sokszög keresésére.)

1. Rendezd az adott $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ egyeneseket meredekségük szerint növekvőleg!
2. Építsd fel az általuk meghatározott síkdarabolás adatstruktúráját az 1.2.1.B. $O(n^2)$ idejű algoritmus szerint.
3. Minden $\mathbf{e}$ egyenesre csináld a következőket:
   3.1. a darabolás minden szakaszára számolj ki két értéket: ha $\mathbf{e}$ a homokóra legkisebb meredekségű egyenese, akkor a szakasz a homokórának $\mathbf{e}$–től számított hányadik egyenesén lehet az alsó ill. a felső íven. (Maga $\mathbf{e}$ a nulladik egyenes.)

   Ez a következőképpen történik:
   Inicializálás: $\mathbf{e}$ minden szakaszára írj 0–t!
   Ciklus:
   az $\mathbf{e}$–nél meredekebb $\mathbf{f}$ egyenesekre növekvő meredekségük sorrendjében
      határozd meg $\mathbf{f}$ metszéspontját $\mathbf{e}$–vel;
      indulj el a metszéspontból $\mathbf{f}$–en mindkét irányban;
      az $\mathbf{f}$ egyenes innen induló szakaszaira írj 1–et;
      ha x–et írtál utoljára és olyan szakaszt metszel, melyen $y > 0$ van,
      írj $\mathbf{f}$ onnan kifelé induló szakaszára $\max\{x, y+1\}$–et!

   3.2. Minden $\mathbf{f}$ egyenesre add össze a két végtelen szakaszra írt számokat!
   (Ezzel meghatároztad, mekkora homokórának lehet $\mathbf{e}$ a legkisebb és $\mathbf{f}$ a legnagyobb meredekségű egyenese.)

   3.3. Vedd ezen összegek maximumát!
4. A különböző $\mathbf{e}$ egyenesekre kapott maximumok közül vedd a legnagyobbat!

Tár: a darabolás nyilvántartásához $O(n^2)$ hely kell.
Idő: a 3.1. lépés belső ciklusa (egyetlen egyenes szakaszainak végigjárása) $O(n)$ idő. Végrehajtva minden $\mathbf{f}$–re, a 3.1. lépés $O(n^2)$. Ezt minden $\mathbf{e}$–re meg kell csinálni: $O(n^3)$. A többi lépés rövidebb.

4. fejezet

A Helly tételkör.

4.1. Helly tételei.

Helly tétele a síkban. *Ha a sík $K_1, K_2, \ldots, K_n$ konvex halmazai közül bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

1. Mutasd meg, hogy az állítás igaz $n = 4$–re!
2. (folytatás) Bizonyítsd be Helly tételét!

Helly tétele egyéb dimenziókban is kimondható. Közismert az egydimenziós változat:

3. Ha a számegyenes véges sok (pl. legyenek zártak, de más típusokra is igaz) intervalluma közül bármely kettő egymásba metsz, akkor van olyan pont, ami minden intervallumban benne van.

Helly tétele d dimenzióban. *Ha $\mathbf{R}^d$ $K_1, K_2, \ldots, K_n$ konvex halmazai közül bármely $d+1$–nek van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

4. Mutasd meg, hogy az állítás igaz $n = d + 2$ darab halmazra!
5. (folytatás) Bizonyítsd be az általános d dimenziós Helly–tételt!
6. Mutass az egyenesen (síkban, térben, $\mathbf{R}^d$–ben)
   a) korlátos, de nem zárt;
   b) zárt, de nem korlátos konvex halmazokból *végtelen sokat*, amelyek között bármely kettő (három, négy, $\ldots, d+1$) egymásba metsz, mégsincs az összesnek közös pontja. (Vagyis további feltételek nélkül végtelenre nem általánosítható a Helly–tétel!)

Végtelen Helly–tétel d dimenzióban. *Ha $\mathbf{R}^d$ akárhány zárt korlátos konvex halmaza közül bármely $d+1$–nek van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

(A bizonyítás egy analitikus segédtételből következik:
Ha $\mathbf{R}^d$ akárhány korlátos zárt halmaza közül bármely véges soknak van közös pontja, akkor az összesnek is van.

(Ez a Borel–féle fedési lemmával ekvivalens.)
Megjegyzés: Érdekes (és gyakran hasznos), hogy elég *egyetlen* halmazról megkövetelni a korlátosságot:

Erős végtelen Helly–tétel d dimenzióban. *Ha $\mathbf{R}^d$ akárhány zárt konvex halmaza közül bármely $d+1$–nek van közös pontja a korlátos zárt konvex H–ban, akkor az összesnek is van.*

7. Bizonyítsd be az erős végtelen változatot a véges tételből és az említett analitikus segédtételből!

* 8. Tegyük fel, hogy az egységkörvonal (egységgömbfelület) néhány, akár végtelen sok zárt félkör–vonala (félgömb–felülete) közül bármely háromnak (négynek, $\ldots d+1$–nek) van közös *belső* pontja. Mutasd meg, hogy ekkor az összesnek is van közös (esetleg *határ*)pontja!

4.2. Jung tétele.

A probléma:

mekkora körrel fedhető egy síkbeli ponthalmaz, ha a benne előforduló legnagyobb távolság D?

9. Fedhető-e biztosan
   a) $r = D/2$ sugarú körrel;
   b) $r = D$ sugarú körrel?
10. Ha egy H háromszög leghosszabb oldala a, akkor H befoglalható alkalmas középpontú $r = a/\sqrt{3}$ sugarú körbe!
11. Adott véges ponthalmazról hogyan döntenéd el, hogy lefedhető-e adott r sugarú körrel?

Jung tétele. *Ha egy síkbeli ponthalmazban nincs D–nél nagyobb távolság, akkor a halmaz lefedhető $D/\sqrt{3}$ sugarú körrel.*

12. Bizonyítsd be Jung tételét véges halmazokra!
13. (folytatás) Bizonyítsd be Jung tételét tetszőleges végtelen halmazokra is!
14. Általánosítsd Jung tételét
   *a) a térre;
   **b) d dimenzióra!

4.3. További alkalmazások.

15. Legyen K konvex halmaz és $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tetszőleges síkbeli (térbeli, ..., $\mathbf{R}^d$–beli) pontok. Tegyük fel, hogy akárhogy választva három (négy, ..., $d+1$) darab P_i–t, K eltolható úgy, hogy mindhármat (négyet, ..., $d+1$–et) fedje. Bizonyítsd be, hogy alkalmas eltoltja *egyszerre* fedi az összes pontot!
16. (folytatás) Igaz-e a fenti állítás végtelen sok pontra?
17. * Bizonyítsd be, hogy a sík (tér, ..., $\mathbf{R}^d$) bármely korlátos konvex halmazának van olyan pontja, mely a rajta átmenő húrokat legfeljebb 2:1 (3:1, ..., d:1) arányban osztja!
18. Mutasd meg, hogy ha egy P pont nem belső pontja egy H háromszögnek (tetraédernek, szimplexnek), akkor van olyan P–ből induló egységvektor, ami a P–ből az $X \in H$ pontokra mutató vektorokkal derék- vagy tompaszöget zár be.
19. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy konvex halmaz határának bármely pontjára illeszkedik támaszegyenes (támaszsík, támasz-hipersík).

4.4. Blaschke tétele.

DEF. A sík (tér, $\mathbf{R}^d$) korlátos H halmazához és tetszőleges $\underline{i}$ irányához a H halmaz $\underline{i}$ **irányú szélességének** nevezzük az $\underline{i}$–re merőleges támaszegyenesek (síkok, hipersíkok) távolságát.
Jelölése: $b_H(i)$.

DEF. A korlátos H halmaz **szélessége** az $\underline{i}$ irányú szélességek infimuma/minimuma.
Megjegyzés: A minimum mindig létezik.
Jelölése: b_H.

20. Mennyi a szélessége egy
   a) körnek;
   b) téglalapnak;
   c) háromszögnek;
   *d) szabályos tetraédernek;
   **e) szabályos d–dimenziós szimplexnek?

A következő kérdést fogjuk most vizsgálni:
mekkora körlemezt tartalmaz egy b szélességű konvex alakzat?

Az ember először $b/2$ sugarú (b átmérőjű) körre gondolna, de egy szabályos háromszög beírt körének sugara csak a magasság harmada. Háromszögekre ez a legrosszabb lehetőség:

21. Mutasd meg, hogy b_H szélességű háromszög beírt körének sugara $\varrho \geq b_H/3$.

Blaschke tétele. *b szélességű zárt korlátos konvex halmaz mindig tartalmaz $b/3$ sugarú körlemezt. (Ha a halmaz nem zárt, akkor is tartalmaz megfelelő méretű nyíltat.)*

22. Hogyan döntenéd el adott konvex sokszögről, hogy tartalmaz-e (alkalmas középpontú) adott ϱ sugarú körlemezt?
23. Bizonyítsd be Blaschke tételét konvex *sokszögekre*.
* 24. (folytatás) Bizonyítsd be a tételt tetszőleges zárt korlátos konvex halmazokra!
25. Általánosítsd Blaschke tételét
   a) a térre;
   b) d dimenzióra!
26. Mutasd meg, hogy minden b szélességű, *középpontosan szimmetrikus* zárt korlátos konvex halmaz tartalmaz $b/2$ sugarú körlemezt!

4.5. Ponthalmazok centruma

Egy kört (gömböt, d–dimenziós gömböt) a középpontján átmenő *bármely* egyenes (sík, hipersík) pontosan egyforma részekre vágja. Ugyanez igaz a középpontosan szimmetrikus alakzatokra és szimmetria–középpontjukra. Általában, ha a halmaz nem szimmetrikus, hasonló állítás nem várható. Esetleg abban bízhatunk, hogy — alkalmas pontra — a részek *mérete* nem nagyon tér el egymástól. De mennyi lehet a „nem nagyon”?

Egy háromszög (tetraéder, szimplex) csúcsai köré írt kis körlemezek (tömör gömbök) közül egyet mindig el lehet választani a többitől, a sík (tér) bármely előre megadott pontján átmenő egyenessel (síkkal). Nem várható tehát jobb arány, mint 2:1 (3:1, $\ldots, d:1$). Kérdés, hogy van-e még kevésbé szimmetrikus alakzat?

DEF. A sík (tér, $\mathbf{R}^d$) egy korlátos ponthalmazának **centruma** olyan pont, amelyen átmenő bármely egyenes (sík, hipersík) által levágott darabok (a *zárt* félsíkokba, félterekbe eső részek) mérete az eredetinek legalább $\frac{1}{3}$–a ($\frac{1}{4}$–e, $\ldots$, $\dfrac{1}{d+1}$–ed része).
Megjegyzés: Csak korlátos halmazokkal foglalkozunk. Ezen belül két alap–eset érdekes:
(i) ha a halmazok véges sok pontból állnak; ekkor a részek mérete a darabszámuk;
(ii) ha területük pozitív; akkor ez a mérőszám.
(Hasonló állításokat mondhatnánk — de most nem mondunk — görbék ívhosszára, súlyozott pontok összsúlyára, térfogatra, felületre, stb.)

Tétel. *Minden korlátos ponthalmaznak van centruma.*

27. Egy nyílt vagy zárt félsíkra (féltérre) mondjuk azt, hogy **rossz**, ha benne a halmaznak kevesebb, mint $1/3$ ($1/4, \ldots, 1/(d+1)$–ed) része van. Mutasd meg, hogy egy pont akkor és csak akkor nem centrum, ha valamely rossz nyílt félsíkban (féltérben) van!

28. (folytatás) Bizonyítsd be a fenti tételt!

Lehet-e jobbat mondani *konvex* halmazokra? A szabályos háromszög súlypontján átmenő egyenesek példája azt mutatja, hogy nem várható jobb, mint az egész alakzat $4/9$–ed része. Ez viszont mindig el is érhető:

Tétel. *A sík tetszőleges konvex halmazának területét a súlypontján átmenő bármely egyenes 4:5 vagy egyenletesebb arányban osztja.*

5. fejezet

Ponthalmazok egyenletes szétvágásai

A következő általános kérdés speciális eseteit vizsgáljuk:

Mennyire egyenletesen lehet néhány halmazt egyszerre, egyetlen egyenessel szétvágni?

Megjegyzés: Mint a centrum létezésénél, most is csak korlátos halmazokkal foglalkozunk, éspedig:
(i) ha a halmazok véges sok pontból állnak; ekkor a részek mérete a darabszámuk;
(ii) ha területük pozitív; akkor ez a mérőszám.
(Itt is igazak hasonló állítások görbék ívhosszára, súlyozott pontok összsúlyára, stb.)

1. Tetszőleges adott $\underline{i}$ irány esetén a sík (tér, $\mathbf{R}^d$) bármely korlátos H halmaza két részre vágható $\underline{i}$–re merőleges egyenessel (síkkal, hipersíkkal), hogy a két *nyílt* félsík (féltér) mindegyikébe a halmaznak legfeljebb fele essen.
(Ha terület szerint vágunk, akkor — mivel a határra eső rész mértéke 0 — mindkét darab pontosan az eredeti fele lesz. Darabszám szerint ezt nem mindig biztosíthatjuk; pl. ha sok pont kevés párhuzamos egyenesen helyezkedik el.)
2. (folytatás) Igaz-e hasonló állítás, ha az egyenes (sík, hipersík) irányát nem szabjuk meg, de át kell mennie egy adott P ponton?
3. Legyen a H síkbeli halmaz korlátos, például az origó körüli M sugarú körlemez része. Az $\underline{i}$ irányt jellemezzük az x tengely pozitív felével bezárt szöggel, φ–vel. Az $\underline{i}$–re merőleges egyenesek közül azt, amelyik H–t két egyenlő területű részre vágja és ezek közül az origóhoz a lehető legközelebb van, jelölje $\mathbf{f}(\varphi)$. Végül ennek távolsága az origótól legyen $d(\varphi)$. Mutasd meg, hogy
a) valóban létezik az adott irányú felező egyenesek között az origóhoz legközelebbi;
b) távolságuk, $d(\varphi)$, folytonos függvénye φ–nek.

DEF. A sík (tér, $\mathbf{R}^d$) néhány korlátos halmazának **sonkás–szendvics vágása** egy egyenes (sík, hipersík), ha mindkét felére minden halmaznak legfeljebb a fele esik.

(Az elnevezés abból a problémából ered, hogy egy sonkás szendvics szétvágható-e egyetlen egyenes vágással úgy, hogy a sonkát is és a kenyeret is két egyenlő nagyságú részre vágjuk.)

Tétel. *A sík (tér, $\mathbf{R}^d$) bármely két (három, ..., d) korlátos halmazának van sonkás–szendvics vágása.*

Megjegyzés: Eszerint még akkor is szétvágható a szendvics, ha rajta a sonka mellett (alatt, felett) sajt is van; sőt akkor is, ha a sajtot a boltban felejtettük.

A továbbiakban csak a kétdimenziós eset bizonyításával foglalkozunk.

4. Legyen H_1 és H_2 a sík két pozitív területű korlátos halmaza és — az előző feladathoz hasonlóan — jelölje $\mathbf{f}(\varphi)$ a H_1 halmaz φ irányú felező egyenesét; $t_2(\varphi)$ pedig legyen a H_2–ből $\mathbf{f}(\varphi)$ bal oldalára eső rész területe. Mutasd meg, hogy $t_2(\varphi)$ folytonos!
5. (folytatás) Bizonyítsd be a kétdimenziós „sonkás–szendvics vágás” tételt korlátos halmazok területére!

5.1. Véges ponthalmazok sonkás–szendvics vágásai.

6. Bizonyítsd be a kétdimenziós „sonkás–szendvics vágás” tételt véges halmazok darabszámára is!
7. (folytatás) Mutasd meg, hogy olyan sonkás–szendvics vágó egyenes is van mindig, ami (a két halmazból összesen) legalább két pontot tartalmaz!
8. Hogy lehet adott $\underline{i}$ irányról eldönteni, van-e $\underline{i}$ irányú sonkás–szendvics vágás?

Adott: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ és $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ pontok a síkban.
Keresendő: a két ponthalmaz sonkás–szendvics vágása.

5.1.1.A. ALGORITMUS.

I. Az $\binom{n+m}{2}$ pontpár összekötő egyeneseit rendezd növekvő meredekség szerint!
II. Legyen a legkisebb meredekség az aktuális irány! Az előző feladat megoldását követve vetítsd a pontokat!
III. Ha van az aktuális irányban sonkás–szendvics vágás, STOP. Egyébként tovább.
IV. Legyen a következő meredekség az aktuális irány! Vetítsd a pontokat és vissza a III. részre.

(Hogy miért áll le az algoritmus? Erre az a biztosíték, hogy van sonkás–szendvics vágás.)
Idő: Az I. lépés: $O(n^2+m^2)$ meredekség rendezése: $O\big((n^2+m^2)\log(n+m)\big)$.
II–III–IV. lépés: $O(n^2+m^2)$–szer vetítés és vizsgálat: $O(n^3+m^3)$.

5.1.1.B. ALGORITMUS.

Az I. lépés ugyanaz, mint az előbb, de most minden irányhoz egy–egy listába fűzzük azon párhuzamos egyeneseket, amiken van legalább két pont. Továbbá minden ilyen egyeneshez listába fűzzük a ráeső pontokat az egyenes iránya szerint sorbarakva őket.
II. és III. mint előbb, de a vetületeket egy tömbben tároljuk, elsősorban $\underline{i}$–re merőleges irányú „koordináta” szerint növevően, ezen belül $\underline{i}$ irányú „koordináta” szerint csökkenőleg.
IV. helyett nem vetítünk újra, hanem a vetület–tömb előző aktuális irányú állapotából számoljuk az újat; megfordítjuk az új aktuális irányú egyenesek listáinak megfelelő szakaszokat. (Könnyű belátni, hogy így valóban az új vetület–sorrendet kapjuk.)
Idő: Az I. és II. lépés: $O\big((n^2+m^2)\log(n+m)\big)$.
III. minden egyes alkalommal $O(1)$, mert a középső elemek közvetlenül kivehetők. Összesen $O(n^2+m^2)$.
IV–ben van az igazi változás. Egy–egy forgatás sokáig tarthat ugyan, de *minden elempárt csak egyszer fordíthatunk meg!* Összesen $O(n^2+m^2)$ ez is.
A teljes idő tehát $O\big((n^2+m^2)\log(n+m)\big)$.

5.2. A sonkásszendvics–fa

Adott: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok a síkban.
Keresendő: adatstruktúra, amiből tetszőleges egyenesről gyorsan eldönthető, mely P_i-ket tartalmazza.

Megjegyzés: $O(n)$ idejű lenne a pontok egyenkénti vizsgálata mindenféle adatstruktúra nélkül. Ennél jobbat szeretnénk. Jelöljük k–val azt, hány pont esik az adott egyenesre. Ha véletlenül $k=n$ (vagy majdnem annyi), akkor persze a megtalált P_i–k felsorolása is $\Theta(n)$ lépés; $o(n)$–es algoritmus nem várható. Amire esély van: maga a keresés $o(n)$, a felsorolás $O(k)$. Találjunk tehát $o(n)+O(k)$ lépésben működő adatstruktúrát!

5.2.1.A. ALGORITMUS.

A sonkásszendvics–fa tárigénye $O(n)$; építési ideje $O(n \log n)$.
A keresés idejét $f(n)$–nel jelölve

$$f(n) = f(n/2) + f(n/4) + O(\log n),$$

tehát

$$f(2^m) = f(2^{m-1}) + f(2^{m-2}) + O(m).$$

Innen — a Fibonacci–számokhoz hasonlóan — a $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jelöléssel $f(2^m) = O(\Phi^m)$, azaz a keresés ideje

$$f(n) = O(n^\alpha),$$

ahol $\alpha = \log_\Phi 2 < 0,69$.

5.2.1.B. ALGORITMUS.

Pólus–poláris transzformációval a duális feladat:

Adott: a sík n egyenese.
Keresendő: Adatstruktúra, amiből bármely pontról gyorsan eldönthető, mely egyenesek tartalmazzák.

Erre már van algoritmusunk: az 1.2.1.B. algoritmus meghatározza a sík darabjait; ezekből az 1.1.1.B. algoritmus építi a megfelelő adatstruktúrát a bináris kereséshez.

Tár: $O(n^2)$.
Építés: $O(n^2)$.
Keresés: $O(k + \log^2 n)$.

Megjegyzés: A sonkásszendvics–fa kisebb tárigényű és gyorsabban építhető, de lassabb a visszakeresés; a duális adtstruktúra nagyobb, lassabban is épül, de a keresés gyorsabb.

6. fejezet

Voronoi–diagrammok

6.1. A „posta–probléma”.

Adott: A sík n pontja: $P_1, P_2, \dots, P_n$.
Keresendő: adatstruktúra, amiből bármely $Q \in \mathbf{R}^2$ pontra gyorsan — $o(n)$ időben — kikereshető(ek) a hozzá legközelebbi P_i pont(ok).

Megjegyzés: A probléma neve a következő, szokásos interpretációból ered. Képzeld el, hogy az utcán odalép hozzád valaki és megkérdezi: „Jó napot kívánok, hol van itt a legközelebbi postahivatal?” Ha agyadban (vagy inkább a zsebedben, kis cédulákon) rendszerezés nélkül, ömlesztve van az összes budapesti posta címe, akkor nincs jobb módszered, mint mindegyikről egyenként megállapítani (esetleg csak közelítőleg) az adott helytől való távolságukat, és megnevezni a legközelebbit. Ilyen értelemben lineárisnál jobb algoritmus nem várható. A valóságban persze nem így keresel; az információk rendszerezve („preprocesszálva”) vannak az emberi agyban.

Célszerű például minden egyes P_i–hez meghatározni a sík azon darabját, amelynek pontjaihoz éppen P_i van a legközelebb. Jelöljük ezeket a tartományokat $\mathcal{C}_i$–vel ($i = 1, 2, \dots, n$)!

DEF. Adott $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontokhoz a sík azon darabolása, melynek tartományai a fenti $\mathcal{C}_i$ halmazok, a ponthalmaz **Voronoi–diagrammja**.

1. Mutasd meg, hogy a Voronoi–diagramm minden $\mathcal{C}_i$ tartománya
   a) a P_iP_j $(j \neq i)$ szakaszok felező merőlegesei által határolt félsíkok metszete;
   b) konvex sokszög.
2. Mennyi a Voronoi–diagramm tárigénye; azaz n pont esetén hány határvonal és azoknak hány metszéspontja keletkezhet legfeljebb?

Algoritmus–vázlat a „posta–problémához”:
 I. Keresd meg a ponthalmaz Voronoi–diagrammját;
 II. Építsd fel hozzá az 1.1.1.B. algoritmus adatstruktúráját!

A II. lépés $O(n \log n)$ ideig tart, mert az előző feladat szerint a Voronoi–diagramm mérete lineáris; az adatstruktúrából a visszakeresés $O(\log^2 n)$ idő. De hogyan kereshető a Voronoi–diagramm? Ezt a következő szakaszban vizsgáljuk.

6.2. A Voronoi–diagramm meghatározása.

A feladat:

Adott: A sík n pontja: $P_1, P_2, \dots, P_n$.
Keresendő: a ponthalmaz Voronoi–diagrammja.

Egy egyszerű (de lassú) módszer.

Az 1. feladat alapján könnyen adódik egy (nem optimális) algoritmus. (Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a pontok y koordinátái mind különbözőek; általában persze nem azok, tehát a függőleges felező merőlegeseket külön kell kezelni.)

6.2.1.A. ALGORITMUS.

Minden $i = 1 \ldots n$–re

az 1.2.1.B. algoritmust használva készítsd el a P_iP_j $(j \neq i)$ szakaszok felező merőlegesei által meghatározott síkdarabolást, benne a $\mathcal{C}_i$ konvex sokszöggel. Minden $\mathcal{C}_i$ minden határ–szakaszáról tárold, hogy mely P_j–vel készült felező merőlegesnek darabja.

Végül rakd össze a lapokat egy szokásos adat–struktúrába.

Tár: Az adatstruktúra mérete $O(n)$.
Idő: Az egyenes–darabolás algoritmusát n–szer kell végrehajtani; $n \cdot O(n^2) = O(n^3)$.

3. Javítsd meg az algoritmust $O(n^2 \log n)$ idejűre a 3.17. feladat alapján!

A „ki–a–térbe–és–vissza" algoritmus.

Az algoritmus ötlete: a síkból a $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ponthalmazt felvetítjük a $z = x^2+y^2$ forgásparaboloidra és az így keletkező $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ pontokra alkalmazzuk a pólus–poláris megfeleltetést. (Ez utóbbi most csak annyit jelent, hogy a pontokban érintősíkot illesztünk a paraboloidhoz.) A síkok feletti térrész lapjainak vetülete — meglepő módon — éppen a keresett Voronoi–diagramm lesz. Lássuk ezt részletesen:

Legyen $P(a, b)$ és $Q(c, d)$ két tetszőleges pont a síkban. Tekintsük a $z = x^2+y^2$ forgásparaboloid felettük lévő pontjait, $P^*(a, b, a^2+b^2)$–t és $Q^*(c, d, c^2+d^2)$–t. Legyen S az a sík, amely a P^* pontban érinti a paraboloidot; végül e síknak és a Q–ból induló függőleges egyenesnek a döféspontját jelöljük D–vel.

4. Bizonyítsd be, hogy a függőleges $\overline{Q^*D}$ szakasz hossza csak az alapsíkban lévő $\overline{PQ}$ szakasz hosszától függ, annak helyétől nem; éspedig
$$\overline{Q^*D} = \overline{PQ}^2.$$
(Az állítás érdekes következménye, hogy ha egy forgásparaboloid és egy henger tengelyei párhuzamosak, akkor a metszetgörbe egy síkban van; mindig egy ellipszis. Ugyanez másképp: a forgásparaboloid síkmetszeteiként adódó ellipszisek vetületei az alapsíkon mindig körök.)

5. (folytatás) A $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ponthalmazból a fenti módon készített $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*$ pontokban illesszünk $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*$ érintősíkokat a paraboloidhoz! Legyen Q az alapsík tetszőleges pontja; felette a paraboloidon Q^*. A Q–ból induló függőleges egyenes és a p_i^* síkok döféspontjait jelöljük D_i–vel. Mutasd meg, hogy a D_i–k közül az(ok) van(nak) a legmagasabban — azaz Q^*–hoz legközelebb —, amely(ek) a Q–hoz legközelebbi P_i pont(ok)ból származnak!

Tétel. *A p_i^* síkok fölé eső térrész lapjainak vetületei éppen a $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ponthalmaz Voronoi–-diagrammjának $\mathcal{C}_i$ lapjai.*

(A bizonyítás az előző feladatból nyilvánvaló.)

6. Mennyi ideig tart a tételben szereplő térrész szokásos adatstruktúrájából a vetület adatsruktúrájának felépítése?

6.2.1.B. ALGORITMUS.

I. Számold ki a P_i^* pontok z–koordinátáit;
II. Határozd meg a konvex burkukat;
III. Dualizáld az alsó részt;
IV. Végül felejtsd el a z–koordinátákat!

Tár: $O(n)$.
Idő: A második rész dominál; ideje $O(n \log n)$.

7. A P_i és P_j pontok felező merőlegese pontosan akkor választja el a Voronoi–diagramm két *végtelen* tartományát (akkor és csak akkor tartalmazza a diagramm egy félegyenesét), ha P_i és P_j a konvex burok határának szomszédos pontjai. (Ha több pont is eshet egy egyenesre, akkor ez úgy értendő, hogy a határ azonos szakaszán vannak és köztük további P_k nem lehet.)

6.3. Delaunay háromszögelések

DEF. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ponthalmaz **Delaunay háromszögelése** (jelölése $D\Delta$):

$$\overline{P_iP_j} \text{ szakasz } \in D\Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \text{felező merőlegesén van éle VD–nek.}$$

Ez nem mindig valódi háromszögelés!! Előfordulhat, hogy a síkdarabok között háromnál több oldalúak is lesznek. Ezek mindig húrsokszögek (azaz csúcsaik egy körön vannak). Ilyenkor a $D\Delta$ **elfajuló**; ha pedig minden darabja háromszög, akkor **valódi**.

DEF. (ekvivalens): Minden korlátos tartomány húrsokszög és körülírt körének belseje üres (azaz nem tartalmaz további P_i–t).

8. Bizonyítsd be, hogy $\overline{P_iP_j}$ szakasz $\in D\Delta \iff \exists$ körlemez, aminek belseje üres és a körvonalon csak P_i és P_j van.

9. Mutasd meg, hogy a két definíció valóban ekvivalens!

10. A $D\Delta$–nek $O(n)$ éle van.

Algoritmus $D\Delta$ keresésére

6.3.1. ALGORITMUS.
Adott: $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbf{R}^2$
Keresendő: $D\Delta$

I. Számold ki a 18. feladatban szereplő P_i^* pontok z–koordinátáit;
II. Határozd meg a konvex burkukat és vedd annak alsó részét;
III. Végül felejtsd el a z–koordinátákat!

Tár: $O(n)$.
Idő: A második rész dominál; ideje $O(n \log n)$.
Az algoritmus a 3.18. feladat szerint valóban a $D\Delta$–t adja.

A legközelebbi szomszédok gráfja

Adott: A sík n pontja: $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
Keresendő: minden P_i–hez a hozzá legközelebbi P_j pont(ok halmaza).

Látszólag nincs gyorsabb módszer, mint minden pár távolságát kiszámítani és így $\Theta(n^2)$ lépésben megkeresni a legközelebbi szomszédokat.

11. Mutasd meg, hogy a legközelebbi szomszédok gráfja
    a) része $D\Delta$–nek;
    b) $O(n)$ élű;
    c) $O(n \log n)$ időben meghatározható.

Euklideszi minimális feszítő fák

Adott: A sík n pontja: $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
Keresendő: olyan fa, melynek csúcsai a P_i–k és éleinek összhossza minimális.

Itt is úgy tűnik, ki kell számítani minden egyes távolságot; az előzőek után azonban nem meglepő, hogy gyorsabban is lehet:

12. (a) Bizonyítsd be, hogy $D\Delta$ minden euklideszi minimális feszítő fa minden élét tartalmazza;
    (b) mutass $O(n \log n)$–es algoritmust!

7. fejezet

Megoldások

7.1. Megoldások az 1. fejezethez

1.1. $e \leq 3n - 6$; $l \leq 2n - 4$, ha az esetleges „végtelen távoli” pont is beszámít n–be.

1.2. A csúcsok kétszer körbeláncolt listájával.

1.3. Ugyanúgy, mint a sík darabolásait.

1.4. A tér darabjaihoz (nevezzük ezeket *celláknak*) szintén egy–egy rekordot rendelünk a határoló lapok listájával. A lapokhoz szintén kell két–két pointer az általuk határolt cellákra.

1.6. A pontokat pl. x-koordinátáik szerint rendezve, bináris kereséssel $O(\log n)$ idő alatt megtalálod, melyik két csúcspár között menő oldalakról kell eldöntened, hogy a pont alattuk ill. felettük van-e. Ez utóbbi $O(1)$ ideig tart.

1.7. Húzz a pontból félegyenest, pl. függőlegesen! Ha a sokszögnek páros sok éle metszi, akkor a pont kívül van; ha páratlan, belül. Vigyázz a félegyenesre eső *csúcsokkal!*

1.8. Ha egy csúcsból nem indul él pl. jobbra (és — feltevésünk szerint — függőlegesen sem), akkor az őt „körülfogó” lap megsérti a feltételt. Visszafelé, ha pl. az L lap az $x = a$ egyenest nem egy intervallumban metszi, akkor $\exists P(a, y_1), P(a, y_2) \in L$ és $Q(a, z) \notin L$, hogy $y_1 < z < y_2$. Kössük ekkor össze P_1–et és P_2–t egy, az L belsejében haladó folytonos Γ görbével (még törött vonal is van ilyen). Γ–nak van legutolsó, Q alatti pontja, pl. $S_1(a, w_1)$; majd található ezen pont után egy első, Q feletti pontja is, pl. $S_2(a, w_2)$. Ekkor $w_1 < z < w_2$ és Γ-nak az S_1 és S_2 közötti része már végig az $x = a$ egyenes azonos, pl. jobb oldalán halad. Az ezen ív által határolt részben van jobb szélső csúcs; ebből nem indulhat él jobbra.

1.9. Képzeletben „söpörd végig” a síkot balról jobbra egy függőleges egyenessel és minden pontról állapítsd meg, melyik két él van közvetlenül alatta ill felette! Ehhez először rendezd a pontokat x-koordinátáik szerint növekvőleg ($O(n \log n)$ idő). Egy dinamikusan kiegyensúlyozott (pl. 2–3) fában tartsd nyilván a söprő egyenest éppen metsző szakaszokat és minden egyes sávban a már elhagyott pontok közül a legutolsót. Amikor egy ponthoz érkezel, a két határoló él kikeresése a fából $O(\log n)$ idő. Ha a pontból nem megy él balra, kösd össze a sávjában levő legközelebbi baloldali (nyilvántartott) ponttal! Söpörj visszafelé is, jobboldali éleket adva a gráfhoz, ha szükséges!

1.10. Az a) részt igazolandó, tegyük fel, hogy lenne pl. $P_1(a, y_1), Q_1(b, w_1) \in L_1$ és $P_2(a, y_2)$, $Q_2(b, w_2) \in L_2$ hogy $y_1 < y_2$ de $w_1 > w_2$. Feltehetjük azt is, hogy $a \neq b$ (az $a = b$ eset triviális). Kössük össze P_1–et és Q_1–et egy L_1 belsejében haladó görbével, P_2–t és Q_2–t pedig egy L_2 belsejében haladóval. (Persze a két görbe nem metszi egymást.) Mindkét görbének van utolsó pontja az $x = a$ egyenesen; van továbbá ezek után első pontjuk az $x = b$ egyenesen. Az ezek közti ívek nem „cserélhetnek helyet”, vagyis vagy végig az első, vagy végig a második van feljebb. Az első esetben az $x = a$ egyenesen, a másodikban az $x = b$ egyenesen sérül meg a monotonitás feltétele (hasonló okokból, mint a már említett $a = b$-re).
A b) rész igazolására tedd fel, hogy lenne kör; vegyél egy minimális hosszúságút! A benne szereplő lapok közül vedd azt, amelynek jobb szélső csúcsa a lehető legbalrább van; ezt a lapot kihagyva rövidebb kör is létezne.

1.11. Irányítatlanul a daraboló síkgráf duálisa; cseréld meg a lapok és csúcsok szerepét! Utána még irányítsd is az éleket.

1.12. Mindkét rész abból következik, hogy nincs függőleges él: minden függőleges egyenesen van „legalsó” lap és nem lehet, hogy ezek különböző függőlegeseken különbözőek legyenek.

1.13. Az irányított rákövetkezési gráf csúcsairól tartsd nyilván, hány él megy beléjük. Keresd meg a minimális elemet és képzeletben töröld a belőle kimenő éleket, azaz csökkentsd a megfelelő be-fokokat eggyel. Ha valaminek 0 lesz a be-foka, tedd egy listába és mindig ennek elejéről vegyél újabb pontot, míg a lista ki nem ürül!

1.14. Minden függőleges egyenes alul a 0-dik, felül az $l-1$–edik lapot metszi és a k–nál kisebb indexűek a k–nál nagyobb vagy egyenlő indexűek alatt vannak.

1.15. Legyen $S_0 = \emptyset$ és vedd sorra a lapokat 0–tól $l-1$–ig! Amikor a $k-1$–ediket veszed, éleinek S_{k-1}–gyel való szimmetrikus differenciája éppen S_k–t adja.

1.16. Csak egyszer: L_i és L_j legközelebbi közös őse a fában S_k.

1.17. b) Ha $\text{lkkő}(i,j)$–vel jelöljük i és j legközelebbi közös ősét az 1. ábra fájában, továbbá $\text{lfhé}(t)$–vel t legfelső helyiértékét a kettes számrendszerben, akkor

$$k = \text{lkkő}(i,j) = j \vee \neg(\text{lfhé}(i \oplus j) - 1).$$

Az $\text{lfhé}(t)$ értékekkel feltölthetsz egy tömböt $O(n)$ idő alatt.

1.19. Vetítsd a poliédert tetszőleges belső pontjából *két párhuzamos síkra!* (A pont két oldalán legyenek.) A keletkező síkdarabolásokat tárold!

1.20. $O(n^2)$méretű. Részletesen:

a) $\binom{n}{2}$ pont;

b) minden egyenesen n él: összesen n^2;

c)

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

1.21. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ (teljes indukció n szerint, felhasználva a 20.c) feladat eredményét).

1.22. Először d szerinti, ezen belül n szerinti teljes indukcióval

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}.$$

1.23. a) triviális. b) azért lehetetlen, mert ugyanazon sorozatnak egymást metsző két egyenes metszéspontjából induló összesen négy félegyenes mindegyikén nem lehet tagja.

1.24. Indukció k szerint. Legyen a legkésőbb megjelenő elem z. Ekkor

a) z nem fordulhat elő másodszor;

b) elhagyva z–t — és, ha szomszédai egyenlőek, azok egyikét — $k-1$ jelből képezett jó sorozatot kapunk.

1.25. Használd az előző feladatot!

1.26. Tegyük fel, hogy $\mathbf{e}_i$–n két, pl. bal felső szakasz van: $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, ahol a négy pont ebben a sorrendben követi egymást úgy, hogy B az alsó (esetleg $\mathbf{e}_{k+1}$ által átmetszett) szakasz felső végpontja. Természetesen B azért volt csúcsa a darabolásnak, mert átmegy rajta legalább egy másik egyenes is, pl. $\mathbf{e}_j$. Ekkor

(1) ha $\mathbf{e}_j$ meredeksége pozitív, akkor az a lap, ami a $\overline{CD}$ szakasztól jobbra esik, nem terjedhet $\mathbf{e}_{k+1}$–ig ($\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ felső része elválasztja tőle);

(2) ha pedig $\mathbf{e}_j$ meredeksége negatív, akkor $\overline{AB}$ távoli él (és így nem számít bal felsőnek).

Így mindenképpen ellentmondásra jutottunk.

1.27. Használd az előző feladatot és azt, hogy egy–egy átmetszett lapon legfeljebb négy távoli él van.

7.2. Megoldások a 2. fejezethez

2.1. a) az (a, a^2) pontban az érintő $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$.

b) Legyen $P(a,b)$ és $Q(c,d)$ a feltételeknek megfelelő pontpár. Ekkor

$$Q \mathbin{\phi} \mathcal{D}(P) \iff d = 2ac - b \iff b = 2ca - d \iff P \mathbin{\phi} \mathcal{D}(Q) : y = 2cx - d.$$

c) Az előző formula egyenlőségeit cseréld „$\geq$”–re!

2.2. Egymás alatt lévőknek; azaz x koordinátáik azonosak.

2.3. Tekintsd a P_i, P_j pontpárok által meghatározott egyeneseket! Minden ilyen egyeneshez keresd meg a rá nem illeszkedő pontok közül a legközelebbit és vedd ezen távolságok minimumát! Ha ebben az értelemben P_k és az $\mathbf{e}$ egyenes vannak a legközelebb egymáshoz, akkor $\mathbf{e}$ csak két pontot tartalmazhat. (Ha három, pl. P_1, P_2 és P_3 lenne rajta ebben a sorrendben, akkor a középső P_2 közelebb lenne vagy a P_1P_k, vagy a P_3P_k egyeneshez, mert a P_2–nél keletkező két szög közül legalább egy nem hegyes; márpedig minden háromszög legkisebb magassága a legnagyobb oldalhoz tartozik, tehát a legnagyobb szög csúcsából indul.

2.4. a) Az előző feladat ötlete (legközelebbi metszéspont–egyenes pár) működik.

b) Az egyenesek duálisaként kapott P_i pontokra alkalmazd az 1.Tételt! Az így adódó egyenes duálisa jó pont lesz.

2.5. A probléma duálisa: egy pont egy egyeneshalmazt szétvág alatta- ill. felette levő egyenesekre. Adott egyeneshalmaz esetén hányféleképpen történhet ez? Éppen az 1.20.c) feladatra jutottunk. Az eredmény: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$.

7.3. Megoldások a 3. fejezethez

3.1. A közös rész két pontját összekötő szakasz benne van minden halmazban, így a metszetükben is.

3.2. A H– tartalmazó összes konvex halmaz (van ilyen! pl. az egész $\mathbf{R}^d$) közös része jó lesz.

3.3. Legyen P a háromszöglap tetszőleges pontja. A P–t A–val összekötő egyenes messe a BC oldalt Q–ban! A konvexitás miatt Q is, így P is K–ban van.

3.5. Legyen K–nak P–hez legközelebbi pontja Q. (Analízisből ismert, hogy zárt halmazban mindig van ilyen.) Állíts a PQ szakaszra Q–ban merőlegest (egyenest, síkot, hipersíkot)! Az általa határolt, P–t tartalmazó félsík (féltér) belsejébe K–nak egyetlen pontja sem eshet. Ha ugyanis pl. S ilyen K–beli pont lenne, akkor a QS szakaszon lenne olyan pont, ami P–hez közelebb van, mint Q. (P–nek a szakaszra való vetületéig minden pont ilyen lenne.)

3.6. Használd az előző feladatot!

3.7. a) A konvex kombinációk benne vannak minden, H–t tartalmazó konvex halmazban. (Ez kéttagú kombináció esetén maga a definíció; több tagra teljes indukcióval.)

b) A konvex kombinációk halmaza konvex (triviális); így a 2. feladat (iii.) része szerint tartalmazza $\mathcal{C}(H)$–t.

3.8. A vetület két pontját összekötő szakasz két eredeti pont összekötő szakaszának vetülete.

3.10. Vetítsd K–t egy $\underline{i}$ irányú egyenesre! A vetület konvex, tehát az előző feladat szerint intervallum. Az ennek egyik végpontján átmenő, rá merőleges egyenes (sík, hipersík) megfelel.

3.11. Ha $\underline{0}$ előáll nem triviális lineáris kombinációval, melyre $\sum_1^n \lambda_i = 0$, akkor vidd át a másik oldalra az egyik nem-0 együtthatós tagot és ossz le az együtthatójával! Visszafelé triviális.

3.12. Használd az előző feladatot!

3.13. Használd az előző feladatot és azt, hogy bármely három (négy, $\ldots, d+1$) vektor *lineárisan* összefügg!

3.14. Használd az előző és a 11. feladatot!

3.15. Az eredeti kérdés illeszkedéssel fogalmazva:

> *adott pontokhoz keresendők azon egyenesek, amelyek legalább két pontra illeszkednek és csak egyik oldalukon van pont.*

A duális:

> *adott egyenesekhez keresendők azon pontok, amelyek legalább két egyenesre illeszkednek és csak egyik oldalukon van egyenes.*

Érthetőbben:

Adott: n egyenes a síkban.

Keresendők: az összes egyenes alatt ill. felett lévő két síkrész határán lévő metszéspontok. Az előző pontban már láttunk erre $O(n^2)$–es algoritmust.

3.16. Ha több azonos x koordinátájú pont van, csak a legkisebb és legnagyobb y koordinátájút vedd be (ilyen sorrendben); a többit dobd el. Rájuk csak az alsó (felső) keresést hajtsd végre.

3.18. (a) b_i akkor és csak akkor alsó lap síkja, ha nincs alatta A_k, de illeszkedik rá három általános helyzetű; hasonlóan B_i akkor és csak akkor csúcsa a térrésznek, ha nincs egyetlen a_k lap alatt sem, de illeszkedik rá három általános helyzetű.

(b) a b_i–re és b_j–re eső lapok pontosan akkor szomszédosak, ha van két közös csúcsuk, pl. A_k és A_l; hasonlóan $\overline{B_iB_j}$ pontosan akkor éle a térrésznek, ha van két sík, pl. a_k és a_l, amelyek mindkét csúcsra illeszkednek.

3.19. (a) Egy sík hozzávétele $O(n)$ idő: próbáld végig a korábbi síkok fölé eső térrész éleit, melyikeket metszi át az új sík. A döféspontok lesznek az új csúcsok. Az egy lapra esőket kötik össze az új élek. Ezt az összes síkra sorban végigcsinálni $n \cdot O(n) = O(n^2)$ idő.

(b) Dualizálással visszavezethető a térbeli konvex burok keresésére; pontosabban: a síkok duálisaként adódó pontok konvex burkának alsó részét „vissza–dualizálva" a keresett térrészt kapjuk.

3.20. Az adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok helyett tekintsd az $(a_1, a_1^2), (a_2, a_2^2), \ldots, (a_n, a_n^2)$ pontokat.

3.21. (a) Van olyan adat, amire a lépésszám h.

(b) Legfeljebb 3^h.

3.22. Lineáris döntések mindig vagy egy féltérre, vagy egy hipersíkra korlátozzák a lehetőségeket. Konvex halmazok metszete pedig konvex.

3.23. Az előző feladat szerint az egy levélbe érkező pontok halmaza konvex, tehát összefüggő is. Ha két pont közül az egyikre $x_i > x_j$, a másikra $x_i < x_j$ lenne, akkor az összekötő szakaszukon valahol $x_i = x_j$ volna Bolzano tétele szerint. Ott viszont nem szabad „IGEN"–t válaszolni.

3.24. A h magas, 3-ágú döntésfa a 21.(b) szerint legfeljebb 3^h végződéssel rendelkezik. Így

$$3^h \geq \text{összes ágak száma} \geq \text{„IGEN" ágak száma} \geq n!,$$

utóbbi a 23. feladat szerint. Tehát $3^h \geq n!$, innen a Stirling–formulával: $h \geq \log_3 n! \sim c \cdot n \log n$.

3.25. $(n-1)!$

3.26. Mint a 23. feladatnál, csak most nem igaz a konvexitás; szerencsére van Milnor–Thom tételünk Az is igaz, hogy az „IGEN" levélbe vezető út h (vagy kevesebb) r–edfokú döntése által meghatározott komponenseken belül a ciklikus sorrend azonos. Ellenkező esetben ugyanis egy ($\mathbf{R}^{2n}$–beli) összekötő görbén mozogva, valamikor egy egyenesbe esne három (síkbeli) pont. Akkor viszont nem válaszolhat az algoritmus „IGEN"–t.

3.27. $(n-1)! = $ ciklikus sorrendek száma $\leq$ („IGEN" ágak száma)*(Milnor–Thom korlát) $\leq 3^h \cdot (2r)^{2n+h} \leq (6r)^{2n+h}$, ahonnan

$$h \geq \log_{2r}(n-1)! - 2n \geq c \cdot n \cdot \log n.$$

3.28. $\mathbf{R}^d$-ben a $P_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_d^i)$ pontok $(i = 1, \ldots, d+1)$ pontosan akkor általános helyzetűek, ha koordinátáikra:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \ldots & x_d^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{d+1} & \ldots & x_d^{d+1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esetünkben a pontok a MG–n vannak, tehát $P_i = (t_i, t_i^2, \ldots, t_i^d)$; így a szóbanforgó determinánsra:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & {t_1}^d \\ 1 & t_2 & \ldots & {t_2}^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{d+1} & \ldots & {t_{d+1}}^d \end{vmatrix} \neq 0,$$

hiszen ez a pontok különbözősége miatt Vandermonde determináns.

3.29. **(a)** A MG tetszöleges $P = (t, t^2, \ldots, t^d)$ pontjára

$$c_0 + c_1 t + \ldots + c_d t^d = \prod_{i=1}^{k} (t - t_i)^2 \geq 0,$$

tehát a MG a hipersík egyik oldalán helyezkedik el.
(b) A MG és a H hipersík közös pontjaira

$$\prod_{i=1}^{k} (t - t_i)^2 = 0,$$

ez pedig csak a kiválasztott k ponthoz tartozó paraméter–értékekre teljesül. Tehát a H hipersík megfelel.

3.30. Legyenek $P_1, \ldots, P_n$ az $\mathbf{R}^{2k}$-beli MG tetszöleges pontjai. Bármely k-t kiválasztva ezek közül, létezik H hipersík, amely ezen k pontban érinti a MG-t. Mivel ezen felül a k pont még általános helyzetű is, a konvex burok egy $k-1$ dimenziós burkolóját adják.

3.31. Már a burkolók kiírásához is szükség van ennyi időre.

3.32. Ha a konvex burok öt- vagy négyszög, készen vagyunk. Ha háromszög, akkor a belsejébe eső két pontot összekötő egyenes csak két oldalt metsz; a harmadik oldal két végpontja és a belsők együtt jó pontnégyest alkotnak.

3.33. $K = {R_2}^4(m, 5)$ megfelel; ha ennyi pont négyelemű részhalmazait pirosra ill. kékre színezzük aszerint, hogy a pontnégyes konvex-e vagy konkáv, a 32. feladat alapján nem lehet öt pont minden négyese kék. Ramsey tétele szerint van tehát m pont, melyek minden négyese piros. Ezek konvex m–szöget alkotnak.

3.34. Színezd a ponthármasokat aszerint, hogy konvex vagy konkáv (három pontú) ívet alkotnak.

3.35. $K(m) \leq {R_2}^3(m, m)$, mert ennyi pont biztosan elég.

3.36. Kettős indukció k–ra és l–re. Ha $k = 3$ vagy $l = 3$, akkor egy $l-1$ pontú konkáv (ill. $k-1$ pontú konvex) ív megfelel. Ha mindkettő nagyobb, akkor tegyél egymás mellé egy konvex k–as és konkáv $l-1$–es nélküli $\binom{k+(l-1)-4}{k-2}$ pontú és egy konvex $k-1$–es és konkáv l–es nélküli $\binom{(k-1)+l-4}{(k-1)-2}$ pontú halmazt úgy, hogy az előbbi „balra fent”, az utóbbi „jobbra lent” legyen olyan nagy szintkülönbséggel, hogy a két halmaz egy-egy pontját összekötő szakaszok mind meredekebbek legyenek az egy–egy halmazon belüli pontpárok összekötő szakaszainál.

3.37. $K(m) \leq \binom{2m-4}{m-2} + 1$, mert már ennyi pont is biztosan elég.

3.38. A gráf csúcsai a pontok; a $P_i P_j$ él súlya az őket összekötő szakasz meredeksége. Növő (csökkenő) éllánc konvex (konkáv) ívnek felel meg.

3.39. (i) azért igaz, mert az $\mathbf{e} = P_i P_j$ élt tekintve vagy az $\langle a(\mathbf{e}), b(\mathbf{e}) \rangle$, vagy egy nála is jobb számpár benne van ugyan H_i–ben, mégsem szerepelhet sem ő, sem nála jobb H_j–ben. Ugyanis bármely P_j–ből induló $\mathbf{f}$ élre

$$a(\mathbf{e}) \geq a(\mathbf{f}) + 1, \text{ ha } w(\mathbf{e}) \leq w(\mathbf{f});$$
$$b(\mathbf{e}) \geq b(\mathbf{f}) + 1, \text{ ha } w(\mathbf{e}) \geq w(\mathbf{f}).$$

(ii) Nagyobb a–hoz kisebb b tartozik a párok maximalitása miatt.

3.40. Ha legfeljebb $k-2$ tagú növő és $l-2$ tagú csökkenő éllánc lenne, akkor minden $a(\mathbf{e})$ az $1, 2, \ldots, k-2$ és minden $b(\mathbf{e})$ az $1, 2, \ldots, l-2$ halmazból kerülne ki. A pontosan t számpárt tartalmazó H_i–k száma tehát az előző feladat (ii) része alapján legfeljebb $\binom{k-2}{t} \cdot \binom{l-2}{t}$ lehetne. Ezeket összegezve az összes lehetséges t–re, csak $\binom{k+l-4}{k-2}$ adódna a pontszámra.

3.41. A 36. feladatban definiált halmazokból helyezz el megfelelő pontszámú, „elég lapos” és „elég kicsi” példányokat egy „elég nagy” kör „majdnem függőleges” ívén!

3.42. Az eredeti kérdés úgy fogalmazható, hogy

keresendő maximális számú olyan pont, hogy bármelyik elválasztható alkalmas egyenessel a többitől abban az értelemben, hogy ő az egyenes egyik oldalára esik (pl. alá), a többi a másikra (pl. fölé).

A másik kérdés átfogalmazása:

keresendő maximális számú olyan egyenes, hogy bármelyik elválasztható alkalmas ponttal a többitől abban az értelemben, hogy ő a pont egyik oldalára esik (pl. alá), a többi a másikra (pl. fölé).

7.4. Megoldások a 4. fejezethez

4.1. A feltétel szerint léteznek olyan P_{123}, P_{124}, P_{134} és P_{234} pontok, hogy P_{ijk} közös pontja a K_i, K_j és K_k halmazoknak. Ha konvex burkuk négyszög, akkor átlóinak metszéspontja mind a négy K_i–ben benne lesz; ha háromszög, akkor a 3.1. rész 3. feladata szerint a bele eső pont jó; ha szakasszá fajul, akkor a két belső bármelyike megfelel.

4.2. $n = 4$–re az előző feladat. Tovább teljes indukcióval n szerint: Adott $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$ konvex halmazokhoz definiáljuk a

$$H_i = K_i \cap K_{n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ugyancsak konvex halmazokat. Három H_i közös része négy K_i (éspedig a megfelelő indexűek, valamint K_{n+1}) metszete, így az $n = 4$ eset miatt nem üres. Ebből és az indukciós feltételből az következik, hogy

$$K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_{n+1} = (K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_n) \cap K_{n+1} = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset.$$

4.3. A bal végpontok közül a jobbszélső (vagy a jobb végpontok közül a balszélső) jó.

4.4. Mint az 1. feladat megoldásánál, válassz $d + 2$ pontot. Oszd őket két részre Radon tétele szerint. A két rész konvex burkának közös pontja az összes K_i–ben benne lesz.

4.5. Mint a síkban, indukció az előző feladat felhasználásával.

4.6. a) A $(0, 1/n)$ nyílt intervallumok $(i = 1, 2, \ldots)$;
b) Az $x \geq n$ félsíkok.

4.8. Használd a megfelelő nyílt félkörlemezekre (tömör félgömbökre) a véges Helly–tételt, majd az említett segédtételt!

4.9. a) pl. egy D oldalú szabályos háromszög nem; b) igen (bármely pontja körül rajzolt kör jó).

4.10. A leghosszabb oldal(ak egyikének) két végpontja köré írt a sugarú körök (lencse alakú) közös részének egyik fele (ahol a harmadik csúcs van) tartalmazza H–t. Ennek az „ívelt háromszögnek” a körülírt köre éppen $r = a/\sqrt{3}$ sugarú. Kisebb körbe az a oldalú szabályos háromszög nem fér bele. (Tompaszögű háromszög esetén nem a körülírt kör adja a minimumot; a legnagyobb oldal Thalesz–köre kisebb.)

4.11. Írj a pontok köré egy–egy r sugarú kört; ha van közös pontjuk, az jó lesz középpontnak.

4.12. Az előző feladat köreire a a 10. feladat szerint használhatod Helly tételét.

4.13. Mint az előző feladat, csak most a végtelen Helly–tételre van szükség.

4.14. a) $r \leq D \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$;
b) $r \leq D \cdot \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$.
(A maximumot a D oldalú szabályos tetraéder ill. szimplex köré írt kör adja.)

4.16. Nem; pl. az $x \leq 0$ félsíkra és a $P_i = (i, 0)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ pontokra. Ha K korlátos és zárt, akkor igaz.

4.18. Ha P egy oldalegyenesen (lapon) van, annak (kifelé mutató) normál egységvektora megfelel. Ha P külső pont, a 3.1. rész 6. feladata miatt igaz az állítás.

4.19. A megoldást a síkban mondjuk el. (Tovább pl. indukcióval.) Jelöje K a konvex halmazt és P a határ tetszőleges pontját.
a) Ha P rajta van két másik pont összekötő szakaszán, akkor ennek egyenese megfelel.
b) Ha nem, akkor azt kell megmutatnunk, hogy
van olyan irány, amely egyetlen $X \in K$ pontra P–ből mutató vektorral sem zár be hegyesszöget.
Ez azzal ekvivalens, hogy
Minden $X \in K$–hoz merőleges egyenest (síkot, hipersíkot) állítva P–ben a PX szakaszra és tekintve az általa határolt, X–et nem tartalmazó félsíkot (félteret), lesz olyan P–ből induló egységvektor, ami ezen félsíkok (félterek) mindegyikében benne van.
Másképp:
a fenti félsíkok (félterek) és a P körüli egységgömb–felület közös része nem üres.

ami pedig az előző és a 8. feladat alapján igaz.

4.20. a) az átmérő; b) a kisebb oldal hossza; c) a legkisebb magasság; d) Nem a legkisebb testmagasság, hanem a szemközti (kitérő) élek távolsága: $a/\sqrt{2}$.

4.21. T–vel jelölve a területet és a–val a legnagyobb oldal hosszát, $2T$–t kétféleképpen is felírhatjuk: egyrészt $\varrho \cdot (a+b+c)$, másrészt $a \cdot m_a = a \cdot b_H$.

4.22. Az oldalegyenesek által határolt, a sokszöget tartalmazó félsíkokat „befelé” tolva ϱ távolsággal, a keletkező új félsíkok közös pontját kell keresni.

4.23. Azt kell megmutatni, hogy az oldalegyeneseket az előző feladat megoldása szerint $b/3$–mal eltolva a keletkező félsíkoknak van közös pontja. Ehhez Helly tétele szerint elég, ha bármely háromnak van. Használd a 21. feladatot és azt a tényt, hogy ha három oldalegyenes „körülfogja” a sokszöget, akkor az általuk meghatározott háromszög szélessége legalább akkora, mint a sokszögé.

4.24. Mint az előző feladatban, csak most minden határponton át vegyél egy–egy támaszegyenest (ez a 19. feladat szerint lehetséges), vedd be magát a halmazt is és az erős végtelen Helly–tételt használd!

4.25. a) $\varrho \geq b/2\sqrt{3}$;
b)

$$\varrho \geq \begin{cases} b \cdot \dfrac{\sqrt{d+2}}{2(d+1)} & \text{, ha } d \text{ páros;} \\ b \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{d}} & \text{, ha } d \text{ páratlan.} \end{cases}$$

4.26. Középpontnak válaszd a szimmetria–középpontot. Hogy ez jó lesz, az a 19. feladatból következik.

4.27. Hogy valamely rossz *zárt* félsík (féltér) határán van, az a definíció. Rossz zárt félsíkot elég kevéssel eltolva rossz nyílt vagy zárt félsíkot (félteret) kapunk.

4.28. Az előző feladat szerint elég azt megmutatni, hogy a rossz nyílt félsíkok (félterek) nem fedik az egész síkot (teret); belátjuk, hogy még a halmaz konvex burkát (határával együtt értve) sem fedhetik. Magát a halmazt nyilván semelyik $d+1$ egyesítése sem fedi. Helly tételét a *komplementerekre* és a — korlátos — konvex burokra (határával együtt értve) alkalmazva, az összes rossz nyílt féltér komplementerének és a konvex buroknak van közös pontja; végül is ez jó lesz centrumnak.

7.5. Megoldások az 5. fejezethez

5.1. **Darabszám szerinti vágás:** vetítsd a halmazt egy $\underline{i}$ irányú egyenesre; a vetület–pontok közül a középsőn (vagy, ha a darabszám páros, akkor a két középső egyikén) átmenő egyenes (sík, hipersík) megfelel. (Ha több pont vetülete egybeesik, külön számoljuk őket.)
Terület szerint: Söpörd végig egy $\underline{i}$–re merőleges egyenessel a síkot (síkkal a teret, hipersíkkal $\mathbf{R}^d$–t)! A bal oldalára eső darab területe — ami folytonos függvény — kezdetben 0, végül T. Így valamikor éppen $T/2$ volt.

5.2. Igaz. Forgass egy egyenest P körül és nézd a bal oldalára eső részt.
(Darabszám szerinti vágás létezése a később ismertetendő „sonkásszendvics–vágás” tételből is következik, ha az egyik halmaz az egyelemű $\{P\}$.)

5.3. b) Ha $\Delta\varphi$ elég kicsi, akkor $\mathbf{f}(\varphi+\Delta\varphi)$ és $\mathbf{f}(\varphi)$ az M sugarú körön belül metszik egymást, ezért $|d(\varphi+\Delta\varphi)-d(\varphi)| \leq M \cdot \sin(\Delta\varphi)$.

5.5. Ha pl. $t_2(0) > T(H_2)/2$ (azaz H_2 területének fele), akkor $t_2(\pi) < T(H_2)/2$; a folytonosság miatt közben valahol éppen $T(H_2)/2$ volt.

5.6. Írj a pontok köré olyan kis köröket, hogy három kör csak akkor legyen egyetlen egyenessel átmetszhető, ha középpontjaik egy egyenesen vannak. Alkalmazd a „területes” sonkás–szendvics vágás tételt ezekre a körökre!

5.8. Vetítsd a két ponthalmazt egy $\underline{i}$–re merőleges egyenesre! Keresd ki mindkettőből a középső elem(ek)et! Ezeken át (ezek között) mehet a jó vágás, ha van.

7.6. Megoldások a 6. fejezethez

6.1. a) azért igaz, mert $\mathcal{C}_i$ pontjai közelebb vannak P_i–hez, mint P_j–hez;
b) pedig a)–ból következik.

6.2. $O(n)$. Alkalmazd a *duálisra* az 1.1. feladatot.

6.3. A $\mathcal{C}_i$ konvex sokszög „alsó” ill. „felső” ívét (illetve azt, amelyik létezik) külön–külön meghatározhatod úgy, hogy két csoportba osztod a felező merőlegeseket aszerint, hogy P_i alattuk vagy felettük van-e.

6.4. S egyenlete: $z = 2ax + 2by - (a^2 + b^2)$, tehát a D pont z–koordinátája: $2ac + 2bd - (a^2 + b^2)$. Így $\overline{Q^*D} = c^2 + d^2 - 2ac - 2bd + a^2 + b^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2 = \overline{PQ}^2$.

6.5. Használd az előző feladatot!

6.6. Semeddig! Egyszerűen felejtsd el, hogy az eredeti adatstruktúrában z–koordináták is vannak!

6.7. Tekintsd a két ponton átmenő egyenest! Ennek valamelyik oldalán a félegyenes a végtelenbe nyúlik. Ha ebben a nyílt félsíkban (vagy a két pont között) lenne még P_k, akkor az közelebb volna a félegyenes alkalmas — elég távoli — pontjához, mint P_i vagy P_j.

6.11. a) Legyen P_j a P_i–hez legközelebbi pont(ok egyike). Tekintsd a $\overline{P_iP_j}$ szakasz fölé írt Thalész–kört! A b) és c) részek triviálisan következnek a)–ból.

6.12. (a) Ismét a P_i és P_j pontok Thalesz-köre lesz jó; ha lenne benne/rajta más P_k is, akkor a (P_iP_j) élet vagy P_iP_k-ra, vagy P_jP_k-ra cserélve újabb feszítő fát kapnánk, ami természetesen kisebb összsúlyú volna;
(b) Használd a mohó algoritmusnak azt a változatát, melynek során mindig egy részfához veszünk hozzá egy új, hozzá egyik végpontjával csatlakozó legrövidebb élt. Ez mindig csak a Delaunay háromszögelés éleit használja (bizonyítandó!). Tehát ezekből válassz minimális feszítő fát úgy, hogy az „éppen lehetséges” éleket egy heap–ben tartod.

Tartalomjegyzék