2003-2004/I. félév

II. alkalmazott matematikus és matematikus 2. Analízis ZH

2003 december 15.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $f_1, f_2, \ldots$ folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, akkor
$$\{x \in \mathbb{R} : f_1(x), f_2(x), \ldots \text{ korlátos sorozat }\}$$
Borel halmaz! Igaz-e, hogy F_σ vagy G_δ ? (Ez utóbbi kérdés úgy értendő, hogy igaz-e legalább az egyik.)

2. Határozzuk meg az alábbi felszíni integrált!
$$\int_{x^2+y^2+z^2=1} (4z\cos x, z^3+3y, 2z^2\sin x + e^{y^3}) \cdot n \; dA \; = ?$$

3. Melyik állításból következik a másik, ha $f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények?
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergens.
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ egyenletesen konvergens.

4. Tegyük föl, hogy μ mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, $A \in \mathcal{A}$, és hogy f valamint $f_1, f_2, \ldots$ mérhető $A \to \mathbb{R}$ függvények. Igaz-e, hogy ha
$$\mu\left(\left\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) < \frac{1}{n^2}$$
minden n-re, akkor $f_n \to f$ μ-majdnem mindenütt A-n?

5. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos(tx) \; dx = ? \qquad (t \in \mathbb{R};\;\; a, b > 0)$$

6. Tegyük fel, hogy az akárhányszor differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $f^{(n)}$ deriváltjai minden véges intervallumon egyenletesen tartanak a g függvényhez. Mi lehet a g függvény?

7. Igaz-e, hogy ha $A \subset [0,1]$ Lebesgue mérhető, akkor az
$$f(t) = \lambda(A \cap (A + t))$$
függvény folytonos $\mathbb{R}$-en? (Itt $A + t$ az A halmaz t-vel vett eltoltját jelöli.)

Egy két oldalas (normális betűmérettel) kézzel írt puska használható, de más segédeszköz nem, **számológép sem**!

Jó munkát!