2003-2004/I. félév

II. matematikus 1. Analízis ZH

2003. október 30.

1. Mi a maximuma és a minimuma az $f(x,y) = xe^y$ függvénynek az origó középpontú $\sqrt{2}$ sugarú
   a) körvonalon?
   b) zárt körlapon?

2. a) Van-e primitív függvényük? Amennyiben van, határozzuk meg őket!
   $$f(x,y) = (y\cos x, y + \sin x)$$
   $$g(x,y) = (y + \sin x, y\cos x)$$
   b) Mennyi a térfogata az alábbi halmaznak?
   $$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 2\} \bigcap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, 0 \leq z \leq \cos(x^2+y^2)\}$$

3. Igaz-e, hogy ha $H \subset \mathbf{R}^n$ korlátos és $t_k(H) > 0$, akkor van olyan Q tégla, amelyre $t_k(H \cap Q) \geq \frac{3}{4}t(Q)$?

4. Adott $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény és pozitív egész n mellett fejezzük ki egy darab (egyváltozós) Riemann integrállal az alábbi kifejezést!
   $$\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n \dots\, dx_2\, dx_1$$

5. Hagyjuk el egy nyílt körlap középpontját, a kapott halmazt jelöljük D-vel. Igaz-e, hogy ha $F = (f,g) : D \to \mathbf{R}^2$ kétszer folytonosan differenciálható korlátos függvény, melynek a keresztben vett parciális deriváltjai D-ben mindenhol megegyeznek (azaz $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$), akkor F-nek van D-n primitív függvénye?

6. Igaz-e, hogy ha $F(x,y) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}^2$ folytonos leképezés, akkor a
   $$g(x) = t_k(F(\{x\} \times [0,1]))$$
   függvény folytonos $[0,1]$-en?

7. Igaz-e, hogy zárt egységkörlapok tetszőleges uniója, ha korlátos, akkor Jordan mérhető?

Egy két oldalas (normális betűmérettel) kézzel írt puska használható, de más segédeszköz nem, **számológép sem**!

Jó munkát!