

# TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKEI

## VÁZLAT

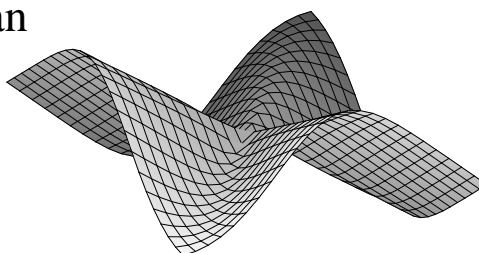
1. Előzőleg volt:  
Íránymenti derivált, parciális deriváltak, gradiens, derivált leképezés, Hesse-mátrix  
Taylor-tétel kvadratikus tagokkal.
2. Többváltozós valós értékű függvények szélsőértékei  
Kritikus pontok.  
Nemdegenerált kritikus pontok osztályozása.  
Kétváltozós kvadratikus polinomok.  
Példák nemdegenerált kritikus pontokra.  
Degenerált kritikus pontok osztályozásának nehézségei.  
Az intuíció nehéz (példák).
3. Feltételes szélsőérték.
4. Határral rendelkező korlátos tartományon értelmezett függvény szélsőértékei.
5. Néhány globális kérdés (Morse-elmélet).
6. Variációszámítás.

## Többváltozós valós értékű függvények szélsőértékei.

Tekintsünk egy  $f$  valós értékű,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmazon értelmezett függvényt.

MEGJEGYZÉS: Az egyszerűség kedvéért most feltesszük, hogy minden vizsgált függvény sima, azaz végtelen sokszor differenciálható – bár mindig elég lesz, ha a második deriváltak folytonosak. Ez a feltételezés kizárja az olyan példákat, mint a következő, amelynek az origóban minden irányban létezik iránymenti deriváltja, de nincs ott érintősíkja:

$$f(x, y) := \frac{x^5 + y^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$



PÉLDA VOLT ELŐZŐ HÉTEN: Legyen  $A$  szimmetrikus mátrix és tekintsük az  $f(X) = \langle X, AX \rangle$  kvadratikus polinomot. Akkor a  $V$  irányban vett iránymenti derivált az  $X$  pontban:  $f'(X) = \nabla f(X) = 2AX$ .

## Szintgörbék és szintfelületek.

**Definíció** Tegyük fel, hogy  $f$  konstans a  $\gamma(t)$  görbe mentén, tehát  $f(\gamma(t)) = c$ . A  $\gamma(t)$  görbét az  $f$  szintgörbéjének nevezzük. Hasonlóan, ha  $g(X)$  konstans,  $g(X) = c$ , akkor ezt a felületet szintfelületnek nevezzük. Például, az  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  gömbfelület a  $g(x, y, z) = \sqrt{5 + x^2 + y^2 + z^2}$  szintfelülete.

MEGJEGYZÉS Hogy elkerüljük az olyan bonyodalmakat, mint a  $\gamma(t) := (t^3, t^2)$  (azaz  $y^3 = x^2$ ) görbénél a  $t = 0$  helyen, vagy az  $x^2 + y^2 - z^3 = 0$   $\mathbb{R}^3$ -beli felület az origóban, mindig feltesszük, hogy a sima görbének van olyan  $\gamma(t)$  paraméterezése, melyre

$\gamma'(t) \neq 0$ , és egy sima  $g(X) = c$  alakú felületre  $\nabla g(X) \neq 0$ .

**Tétel** Legyen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sima függvény.

a) Ha  $\gamma(t)$  a  $g$  sima szintgörbéje, akkor ennek a görbének pármely  $P = \gamma(t_0)$  pontjára,  $\nabla g(P)$  merőleges  $\gamma'(t)$ -re.

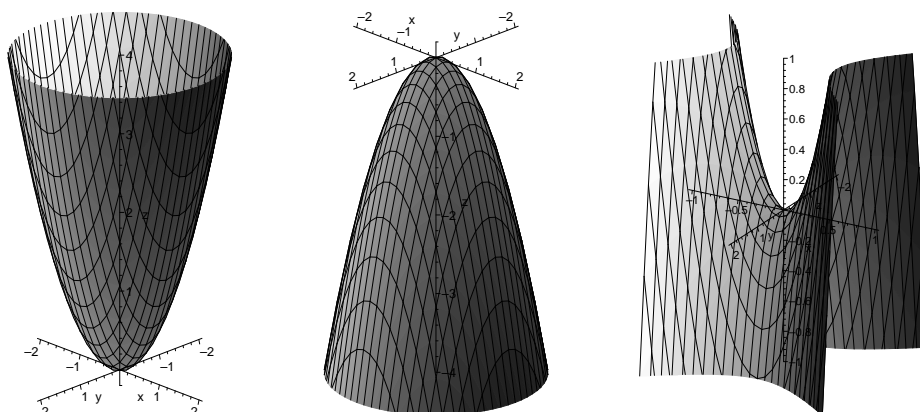
b) Ha  $g(X) = c$  a  $g$  egy sima szintfelülete, akkor a felület bármely  $X$  pontjára  $\nabla g(X)$  merőleges a felületre, azaz merőleges az összes érintővektorra.

**Bizonyítás** a) Mivel  $g(\gamma(t)) = \text{konstans}$ , deriválással és a láncszabályt használva kapjuk:  $\langle \nabla g(P), \gamma'(t_0) \rangle = 0$ .

b) Deriváljuk  $f(\gamma(t)) = c$ -ot (a láncszabályt használva), kapjuk:  $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ , tehát egy szintgörbén  $\nabla g$  merőleges az érintővektorokra.

**DEFINÍCIÓ** Egy  $f$  függvény *kritikus pontjai* azon  $X$  pontok, ahol az első derivált nulla:  $\nabla f(X) = 0$ .

Előbb láttuk, hogy ez áll fönn lokális szélsőérték esetén. A két legegyszerűbb példa az  $f(x, y) = x^2 + y^2$  kvadratikus polinom, amelyre  $\nabla f(X) = (2x, 2y)$ , és  $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$ , amelyre  $\nabla f(X) = (-2x, -2y)$ . Ezekre az origó lokális minimum ill. maximum.



Az  $f(x, y) = -x^2 + y^2$  kvadratikus polinom viszont azt mutatja, hogy van egy érdekes harmadik lehetőség: a *nyeregpont*.

**Második derivált teszt.** Egyváltozós függvényekre a második derivált tesztet használjuk a kritikus pontok osztályozására (maximum vagy minimum) – feltéve, hogy a második derivált nem nulla. Ehhez a Taylor-tételt használtuk. Ugyanezt fogjuk tenni most is, és vizsgáljuk az  $f(X) = f(x, y)$  viselkedését az  $X = X_0 = (x_0, y_0)$  pont közelében. Legyen  $V := (u, v)$  és – a korábbihoz hasonlóan –, használjuk az egyváltozós

$$\varphi(t) := f(X_0 + tV) = f(x_0 + tu, y_0 + tv)$$

függvényt és a Taylor-sort:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \dots \quad (1)$$

A láncszabály szerint

$$\varphi'(t) = \partial_x f(x_0 + tu, y_0 + tv)u + \partial_y f(x_0 + tu, y_0 + tv)v$$

így, mivel egy sima függvényre  $\partial_{xy}f(X_0) = \partial_{yx}f(X_0)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi''(0) &= \partial_{xx}f(x_0, y_0)u^2 + \partial_{xy}f(x_0, y_0)uv \\ &\quad + \partial_{yx}f(x_0, y_0)uv + \partial_{yy}f(x_0, y_0)v^2 \\ &= \partial_{xx}f(X_0)u^2 + 2\partial_{xy}f(X_0)uv + \partial_{yy}f(X_0)v^2 \\ &= \langle V, f''(X_0)V \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

Igazoltuk, hogy  $f''(X)$  szimmetrikus mátrix, így sajátértékei valósak.

**Feladat** A múlt órai feladatot folytatva,  $f(X) = \langle X, AX \rangle$ -re igazoljuk, hogy  $f''(X) = 2A$ , éppúgy, mint az egydimenziós esetben.

(2) felhasználásával, ha  $X = X_0 + tV$ -t írunk, (1) a következő formulát adja:

$$f(X) = f(X_0) + \langle f'(X_0), V \rangle t + \frac{1}{2} \langle V, f''(X_0)V \rangle t^2 + \dots \quad (3)$$

Ezzel ekvivalens,

$$f(X) = f(X_0) + \langle f'(X_0), X - X_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle X - X_0, f''(X_0)(X - X_0) \rangle + \dots \quad (4)$$

A “...” pontok azt jelentik, hogy “kevésbé fontos tagok”, de hogy ez igaz legyen, fel kell tennünk, hogy az  $f''(X_0)$  második derivált mátrix *nemszinguláris*, azaz invertálható, tehát nincs nulla sajátértéke.

A (4) formulából, ha  $X_0$  kritikus pontja  $f$ -nek és ha ott a második derivált mátrix nemszinguláris, akkor  $X_0$  környezetében

$$f(X) \approx f(X_0) + \frac{1}{2} \langle X - X_0, f''(X_0)(X - X_0) \rangle t^2.$$

Ennek igazolásához használjuk a Taylor-tételt integrál maradéktaggal:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t) dt \quad (5)$$

[Bizonyítás:  $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$  é parciálisan integrálunk.]  
A formula egyszerűsítése kedvéért, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $X_0 = 0$  és  $\varphi(t) := f(tX)$ . Akkor (5) és (2)-ből, ha  $f$ -nek kritikus pontja van  $X = 0$ -ban, akkor

$$\begin{aligned} f(X) - f(0) &= \int_0^1 (1-t) \langle X, f''(tX)X \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \langle X, H(X)X \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

ahol  $H(X)$  a

$$H(X) := 2 \int_0^1 (1-t) f''(tX) dt.$$

szimmetrikus mátrix. Megjegyezzük, hogy  $H(0) = (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(0)$ . Ha  $f$  sima, akkor  $H$  is az, és ha  $f$  kétszer folytonosan differenciálható, akkor  $H$  folytonos – és csak ennyire van szükségünk.

**Theorem** [MÁSODIK DERIVÁLT TESZT:

ELÉGSÉGES FELTÉTELEK] *Ha  $X_0$  az  $f$  nemdegenerált kritikus pontja, akkor az  $f''(X_0)$  második derivált mátrix meghatározza a kritikus pont jellegét. Eszerint,  $f$ -nek*

**lokális minimuma** van, ha  $\langle V, f''(X_0)V \rangle > 0$  minden  $V \neq 0$  vektorra,

**lokális maximuma** van,  $\langle V, f''(X_0)V \rangle < 0$  minden  $V \neq 0$  vektorra,

**nyeregpon**t, ha  $\langle V, f''(X_0)V \rangle > 0$  valamely  $V$  vektorra és  $\langle W, f''(X_0)W \rangle < 0$  valamely másik  $W$  vektorra.

**Bizonyítás** Egy tetszőleges  $V$  vektorra

$$\langle V, H(X)V \rangle = \langle V, H(X_0)V \rangle + \langle V, [H(X) - H(X_0)]V \rangle,$$

így a tétel következik (6)-ből és  $H$  folytonosságából. Ez még világosabb, ha olyan koordinátákat használunk, amelyekben  $H(X_0)$  szimmetrikus mátrix diagonális. Az  $f''(X_0)$ -re vonatkozó nemdegeneráltsági feltétel akkor ekvivalens azzal, hogy  $H(X_0)$  egyik diagonális eleme sem nulla.

Legyen  $A = f''(X_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  és  $V = (u, v)$ , akkor az előbbi szerint a minimum, maximum és nyeregpontok osztályozása a

$$Q(V) = \langle V, AV \rangle = au^2 + 2buv + cv^2. \quad (7)$$

kvadratikus polinom jellegétől függ. Az előbbi motivációval azt mondjuk, hogy  $A$

**pozitív definit**, ha  $\langle V, AV \rangle > 0$  minden  $V \neq 0$  vektorra,

**negatív definit**, ha  $\langle V, AV \rangle < 0$  minden  $V \neq 0$  vektorra,

**indefinit**, ha  $\langle V, AV \rangle > 0$  valamely  $V$  vektorra és  $\langle W, AW \rangle < 0$  valamely másik  $W$  vektorra.

(7)-nek egy fontos speciális esetét, amikor  $b = 0$ , különösen könnyű megérteni. Ekkor  $A$  invertálható diagonális mátrix (azaz  $a \neq 0$  és  $c \neq 0$ ), és

$$Q(V) = au^2 + cv^2.$$

Így  $A$  nyilván

akkor pozitív definit, ha  $a > 0$  és  $c > 0$ ,

akkor negatív definit, ha  $a < 0$  és  $c < 0$ ,

akkor indefinit,  $a$  és  $c$  ellenkező előjelűek.

$A$  (7) általános esetében a  $Q(V)$  függvényt könnyen vizsgálhatjuk, ha teljes négyzetté egészítünk. Vegyük figyelembe, hogy  $A$ -ról feltettük, hogy invertálható. Ha  $a \neq 0$ , akkor

$$Q(v) = a\left[u^2 + 2\frac{b}{a}uv + \frac{c}{a}v^2\right] = a\left[\left(u + \frac{b}{a}v\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}v^2\right]$$

tehát  $A$

pozitív definit:  $a > 0$  és  $ac - b^2 > 0$

negatív definit:  $a < 0$  és  $ac - b^2 > 0$  (8)

indefinit:  $ac - b^2 < 0$

Ez abban a speciális esetben is igaz, ha  $a = 0$  (könnyű igazolni) hiszen  $A$  invertálhatóságából következik, hogy  $b \neq 0$ .

A következő három példa illusztrálja a legegyszerűbb eseteket.

PÉLDA: **Minimum**  $f(x, y) = x^2 + y^2$

Határozzuk meg a kritikus pontjait:

$$\partial_x f(x, y) = 2x, \quad \partial_y f(x, y) = 2y.$$

Az egyetlen kritikus pont az  $X_0 = 0$  origó.

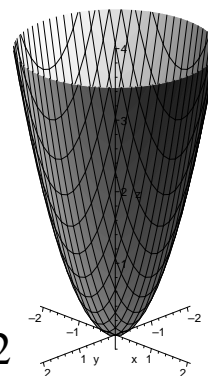
Második derivált teszt:

$$\partial_{xx} f(x, y) = 2, \quad \partial_{xy} f(x, y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x, y) = 2$$

Így  $f''(0, 0)$  diagonális mátrix.

$$f''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel  $\langle V, f''(0)V \rangle = 2u^2 + 2v^2$ , ez nyilván *pozitív definit*, az origó lokális minimumhely – ami egyébként számolás nélkül is nyilvánvaló.



PÉLDA: **Maximum**  $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

Határozzuk meg a kritikus pontjait:

$$\partial_x f(x, y) = -2x, \quad \partial_y f(x, y) = -2y.$$

Az egyetlen kritikus pont az  $X_0 = 0$  origó.

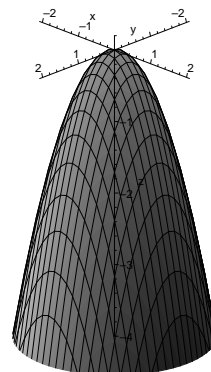
Második derivált teszt:

$$\partial_{xx} f(x, y) = -2, \quad \partial_{xy} f(x, y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x, y) = -2.$$

Tehát  $f''(0, 0)$  diagonális mátrix

$$f''(0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel  $\langle V, f''(0)V \rangle = -(2u^2 + 2v^2)$  nyilván *negatív definit*, az origó lokális maximumhely – ami szintén számolás nélkül is látható.



PÉLDA: **Nyereg**  $f(x, y) = -x^2 + 3y^2$

Határozzuk meg a kritikus pontjait:

$$\partial_x f(x, y) = -2x, \quad \partial_y f(x, y) = 6y.$$

Az egyetlen kritikus pont az  $X_0 = 0$  origó.

Második derivált teszt:

$$\partial_{xx} f(x, y) = -2, \quad \partial_{xy} f(x, y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x, y) = 6.$$

Tehát  $f''(0, 0)$  diagonális mátrix

$$f''(0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

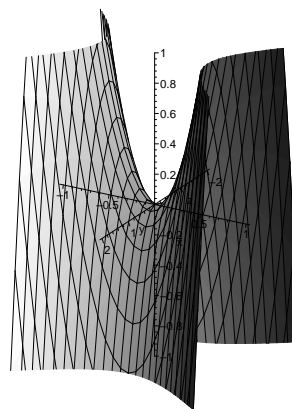
Mivel  $Q(V) := \langle V, f''(0)V \rangle = -2u^2 + 6v^2$  nyilván *indefinit*, hiszen ha  $V = (1, 0)$ , akkor  $Q(V) = -2 < 0$ , ha viszont  $V = (0, 1)$ , akkor  $Q(V) = 6 > 0$ . Az origó nyeregpont.

Az  $x = 0$  síkban a felületnek lokális minimuma van az origóban, míg az  $y = 0$  síkban ugyanott lokális maximuma.

A  $g(x, y) = xy$  függvény viselkedése lényegében ugyanilyen. Az egyetlen kritikus pont az origó és

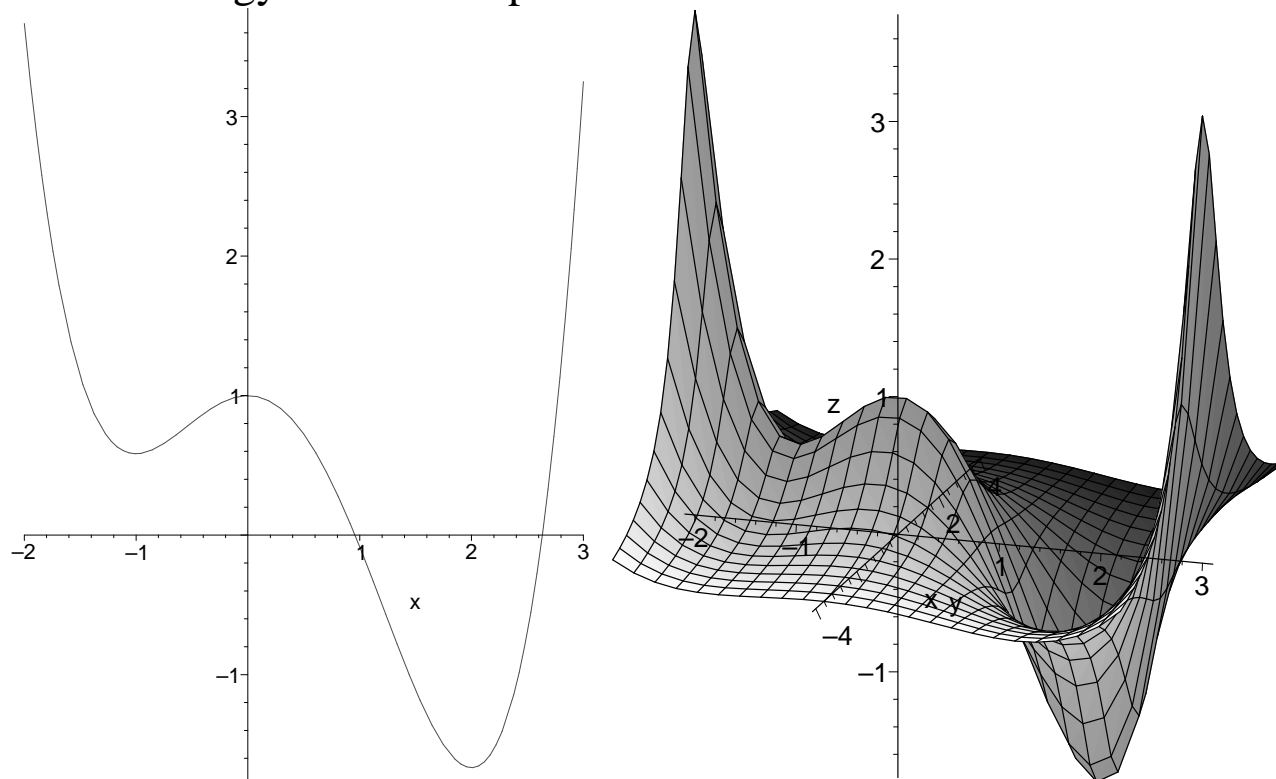
$$g''(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8) szerint ez nyeregpont. Mivel  $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$ , ez még nyilvánvalóbb az elforgatott  $u = x+y$ ,  $v = x-y$  koordinátákban, amikkel ez a függvény  $\frac{1}{4}(u^2 - v^2)$ .



PÉLDA: 
$$f(x,y) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12}{12(1 + y^2)}$$

Ez már egy érdekesebb példa.



A baloldali görbe az  $f(x,0)$ . A jobboldali gráfból látszik, hogy van egy minimuma, egy maximuma és egy nyeregpontja, mindegyik az  $x$  tengelyen.

Határozzuk meg a kritikus pontjait:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{1 + y^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{-(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12)y}{6(1 + y^2)^2}$$

Mivel  $x^3 - x^2 - 2x = x(x + 1)(x - 2)$ , a kritikus pontok  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(-1,0)$ .

Második derivált teszt: A másodrendű parciális deriváltakból álló mátrix:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3x^2 - 2x - 2}{1 + y^2} & \frac{-2(x^3 - x^2 - 2x)y}{(1 + y^2)^2} \\ \frac{-2(x^3 - x^2 - 2x)y}{(1 + y^2)^2} & \frac{(3y^2 - 1)(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12)}{6(1 + y^2)^3} \end{pmatrix}$$

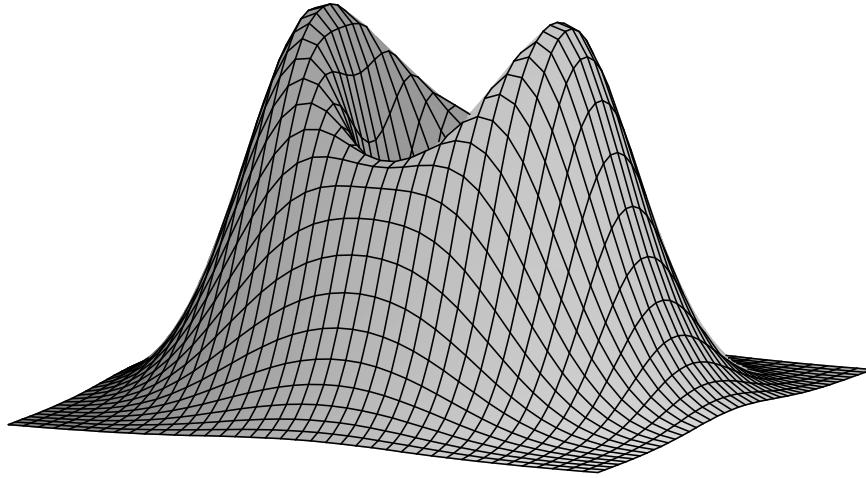
Tehát a második derivált mátrix a kritikus pontokban:

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{negatív definit (max)}$$

$$f''(2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \text{pozitív definit (min)}$$

$$f''(-1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix} \quad \text{indefinit (nyereg)}$$

PÉLDA: Vulkan:  $f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)e^{(1-x^2-y^2)}$



Öt kritikus pont nyilvánvaló: két maximumpont, két nyereg-pont és egy minimumpont (a lyukban).

Keressük meg ezeket:

$$\partial_x f(x,y) = 2x[2 - (2x^2 + 3y^2)]e^{(1-x^2-y^2)}$$

$$\partial_y f(x,y) = 2y[3 - (2x^2 + 3y^2)]e^{(1-x^2-y^2)}.$$

Tehát  $\partial_x f(x,y) = 0$  és  $\partial_y f(x,y) = 0$  az öt pontban  
 $(0,0)$ ,  $(\pm 1,0)$ , és  $(0,\pm 1)$ .

Osztályozzuk a kritikus pontokat (második derivált teszt):

$$\partial_{xx}f(x,y) = 2[2 - 8x^2 - (1 - 2x^2)(2x^2 + 3y^2)]e^{1-x^2-y^2}$$

$$\partial_{xy}f(x,y) = 4xy[-5 + (2x^2 + 3y^2)]e^{1-x^2-y^2}$$

$$\partial_{yy}f(x,y) = 2[3 - 12y^2 - (1 - 2y^2)(2x^2 + 3y^2)]e^{1-x^2-y^2}$$

Tehát a második derivált (Hesse) mátrix az öt kritikus pontban

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix} \quad \text{lokális minimum}$$

$$f''(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{nyereg}$$

$$f''(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{lokális maximum.}$$

## PÉLDÁK DEGENERÁLT KRITIKUS PONTOKRA

A második derivált teszt *elégleges* feltételeket ad arra, hogy a kritikus pont lokális minimum stb. legyen. A Taylor-tételnek (6) egy közvetlen következménye szükséges feltételeket ad, éppúgy, mint egyváltozós esetben. Ez az eredmény fontos a degenerált kritikus pontok megértéséhez.

**Tétel**[MÁSODIK DERIVÁLT TESZT: SZÜKSÉGES FELTÉTELEK]  
*Legyen  $X_0$  az  $f$  sima függvény egy kritikus pontja.*

**lokális minimum** *Ha  $f$ -nek lokális minimuma van  $X_0$ -ben, akkor*  
 $\langle V, f''(X_0)V \rangle \geq 0$  *minden  $V$  vektorra.*

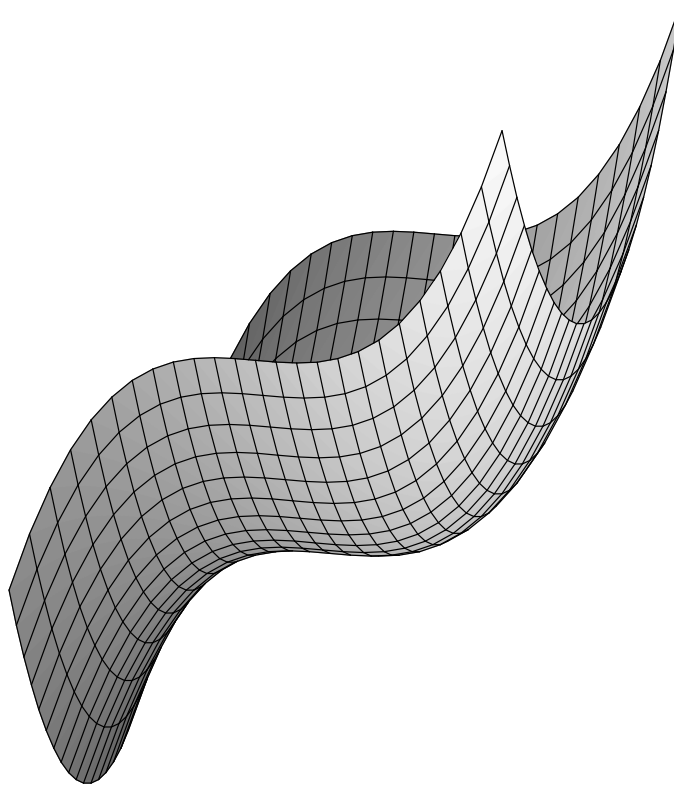
**lokális maximum** *Ha  $f$ -nek lokális maximuma van  $X_0$ -ban,*  
*akkor  $\langle V, f''(X_0)V \rangle \leq 0$  minden  $V$  vektorra.*

Illusztráljuk ezt példákkal.

Degenerált “nyereg” az origóban:

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

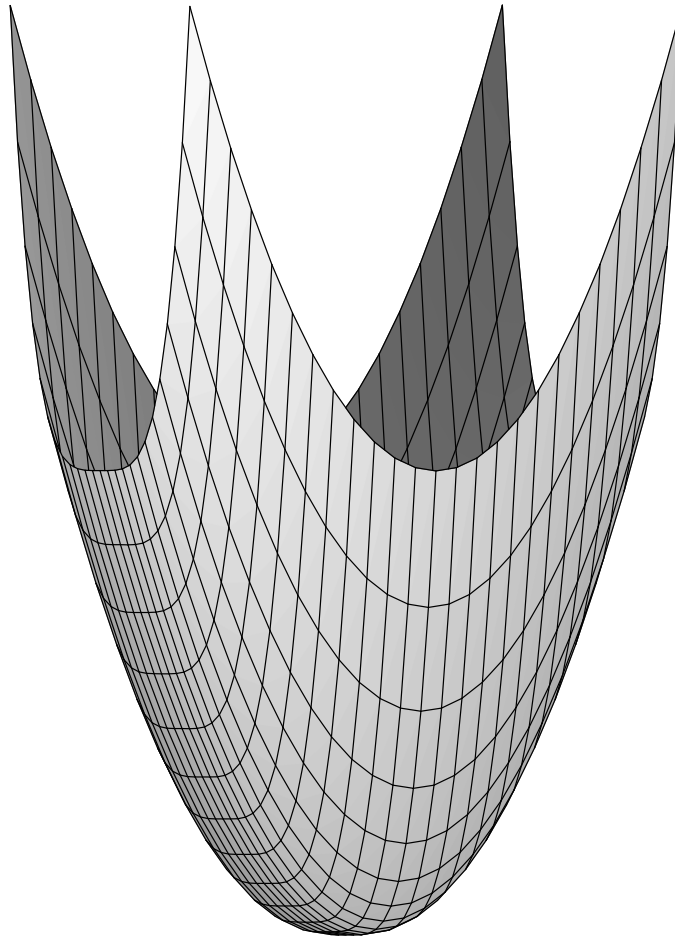
$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Degenerált minimum az origóban:

$$f(x, y) = x^2 + y^4$$

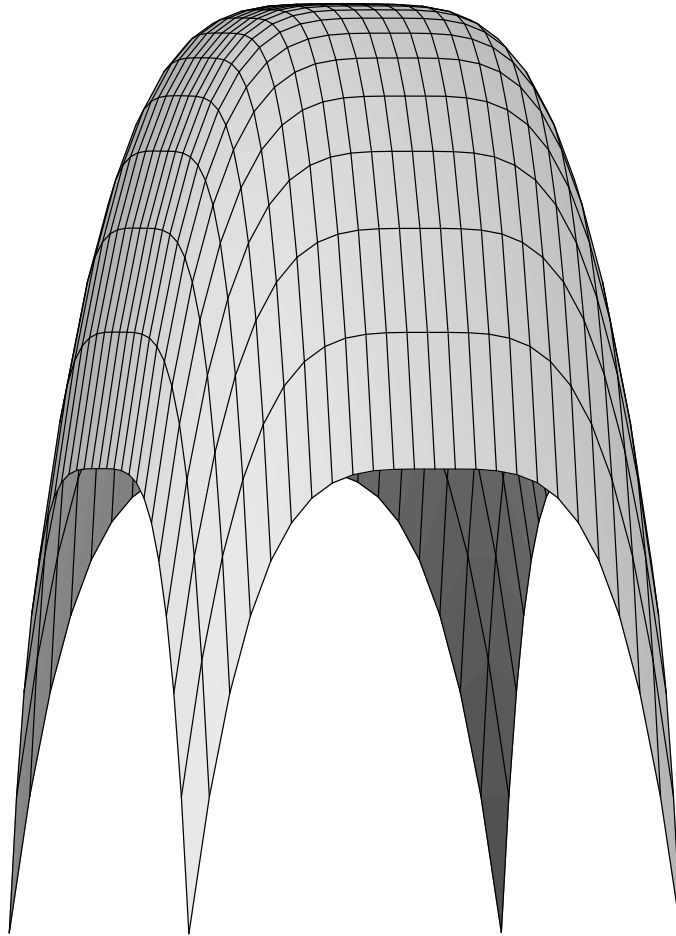
$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Degenerált maximum az origóban:

$$f(x, y) = -(x^4 + y^4)$$

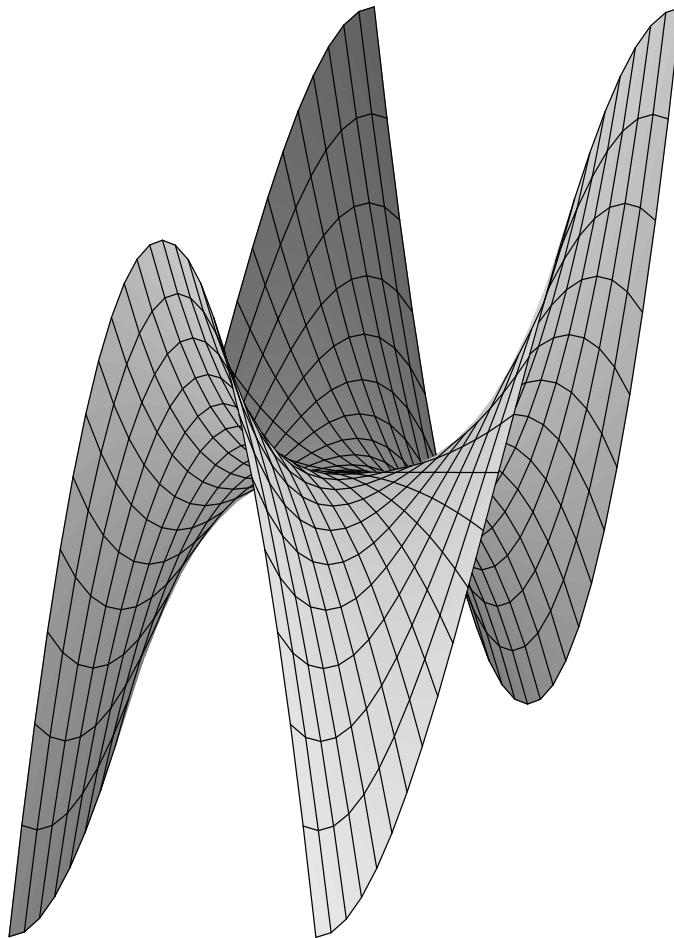
$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Degenerált *majomnyereg* az origóban:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = \mathcal{R}\{(x + iy)^3\}$$

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



ALKALMAZÁS: A szélsőértékek megértése hasznos eszköz lehet az alkalmazásokban.

Tegyük fel például, hogy  $u$  az

$$u''(x) - c(x)u(x) = 0, \quad \text{ahol } c(x) > 0$$

differenciálegyenlet megoldása. Akkor  $u$ -nak nem lehet pozitív lokális maximuma (vagy negatív lokális minimuma), mivel például pozitív lokális maximum esetén  $u(x) > 0$  és  $u''(x) \leq 0$  tehát  $u''(x) - c(x)u(x) < 0$ , ami ellentmondás.

**Feladat** Ha  $u$  a

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - c(x, y)u(x, y) = 0, \quad \text{ahol } c(x, y) > 0, \quad (9)$$

egy megoldása, mutassuk meg, hogy annak nem lehet pozitív lokális maximuma vagy negatív lokális minimuma. Ez az egyszerű megfigyelés az ilyen típusú egyenletek megoldásának a lényege – *maximum elv*.

Közvetlen következmény, hogy ha  $u$  a (9) egy megoldása valamely korlátos összefüggő tartományban és  $u = 0$  a határon, akkor  $u(x, y) \equiv 0$  az egész tartományon.

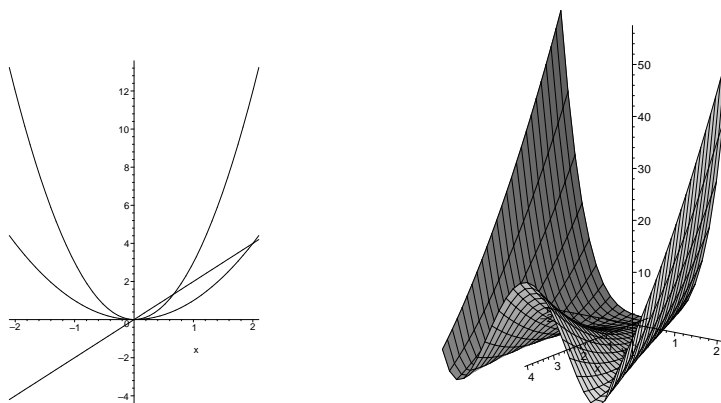
## AZ “INTUÍCIÓ” NEHÉZ

**KÉRDÉS:** Legyen  $f$  sima függvény  $\mathbb{R}^2$ -n, amelynek bármely origóhoz tartó egyenes mentén lokális minimuma van. Igaz-e, hogy a függvénynek lokális minimuma van az origóban?

*Nem feltétlenül*, ha a kritikus pont az origóban degenerált.

**Példa:**  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

Ez a függvény negatív a parabolák között, máshol pozitív. Az intuíció működik, ha  $y \leq 0$ . Ha  $y > 0$ , és az origóhoz egy egyenes mentén közelítünk, valamikor bejutunk az  $y = 2x^2$  fölötti tartományba, ahol a függvény pozitív. A lyuk balra az  $x$ - $y$  sík, egy tipikus, origón átmenő egyenessel.



A válasz *Igen*, ha a kritikus pont az origóban nemdegenerált.

Ez az ún. *Morse-lemma* következménye: Ha az  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  függvénynek nemdegenerált kritikus pontja van  $x = p$ -ben, akkor  $p$  valamely környezetében bevezethetünk olyan új  $x = x(u)$  koordinátákat, hogy  $f(x(u)) = \langle u, Au \rangle$  kvadratikus polinom, ahol  $A := f''(p)$ .

A bizonyítás az Implicit függvény tételt használja.

KÉRDÉS: Legyen  $f$  sima függvény  $\mathbb{R}^2$ -n egyetlen kritikus ponttal: egy szigorú lokális minimummal az origóban.

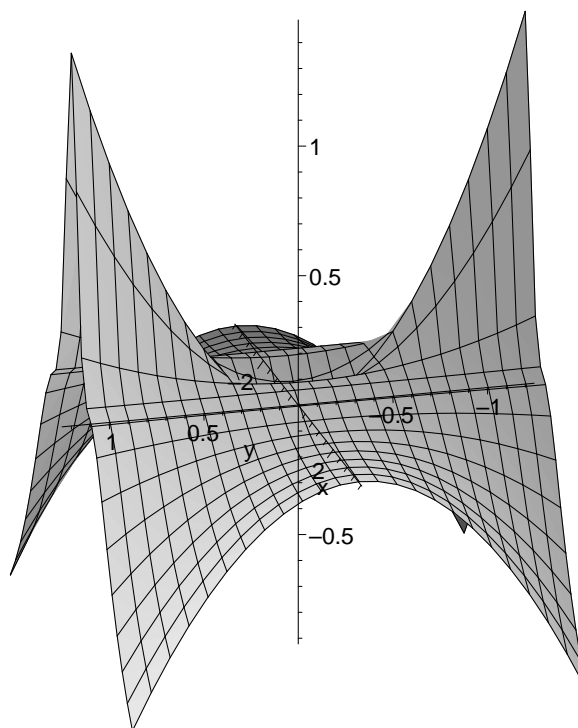
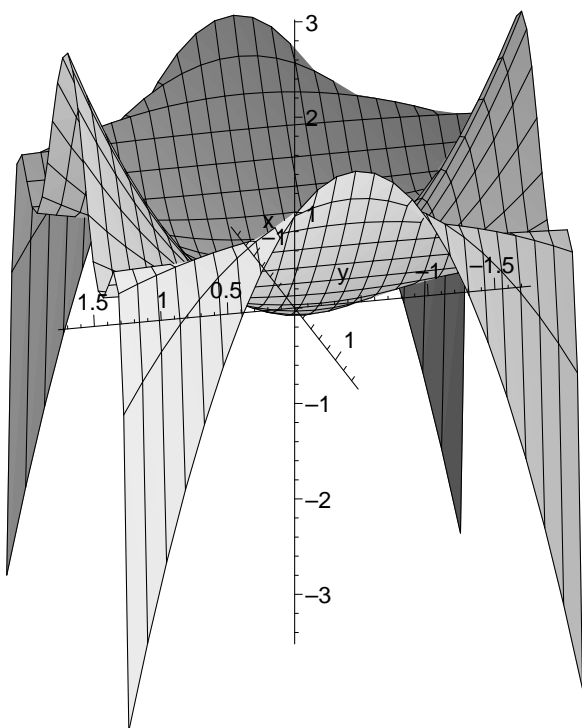
Igaz-e, hogy ez globális minimum is?

Egyváltozós függvény esetén ennek globális minimumnak kell lenni– de nem így többváltozós függvényekre. A legtöbben csodálkoznának ezen, hiszen az intuíciójuk ellen szól. A legegyszerűbb példa talán az

$$f(x,y) := (1-y)^3x^2 + y^2$$

polinom. Ezt nem olyan könnyű elképzelni; talán könnyebbek az

$$f(x,y) := (1-y^2)^3x^2 + y^2 \quad \text{vagy} \quad g(x,y) := \frac{(1-y^2)^3x^2 + y^2}{(1+y^2)^3}.$$



## MAGASABB DIMENZIÓK

Az  $\mathbb{R}^n$  térben a legtöbb kétdimenziós meggondolás változatlan marad, bár a számolások bonyolultabbak.

Az előzőkkel azonos meggondolással, lokális minimumok és maximumok az  $f$  kritikus  $P$  pontjaiban vannak, ahol az első derivált vektor nulla:

$$\nabla f(X) = (\partial_{x_1} f(X), \dots, \partial_{x_n} f(X)) = 0.$$

Mint előbb, tekintsük most is az  $f(P+tV)$  függvényt, és megkapjuk a Taylor sorfejtést

$$f(X) = f(P) + \langle \nabla f(P), (X-P) \rangle + \frac{1}{2} \langle (X-P, f''(P)(X-P)) \rangle + \dots$$

Ahhoz, hogy az elhagyott “...” tagok kisebbek legyenek, ismét fel kell tennünk, hogy az  $f''(P)$  második derivált mátrix invertálható. Ebben az esetben, egy nemdegenerált kritikus pont körül a Taylor-tétel azt mondja, hogy  $f$  közelítőleg az

$$f(X) \approx f(P) + \frac{1}{2} \langle (X-P, f''(P)(X-P)) \rangle$$

kvadratikus polinom. A legegyszerűbb eset, amikor  $f''(P)$  diagonális mátrix  $\lambda_i$  diagonális elemekkel, tehát

$$f(X) \approx f(P) + \frac{1}{2} [\lambda_1 (x_1 - p_1)^2 + \dots + \lambda_n (x_n - p_n)^2].$$

Ebben az esetben  $f$ -nek nyilvánvalóan pontosan akkor van lokális minimuma  $P$ -ben, ha minden  $\lambda_j$  pozitív.

Kettőnél magasabb dimenzióban különböző típusú nyeregpon-  
tok vannak, attól függően, hogy hány  $\lambda_j$  negatív (mivel fel-  
tettük, hogy a kritikus pont nemdegenerált, egyik  $\lambda_j$  sem nulla).

Ahhoz, hogy osztályozzuk az  $f$  kritikus pontjait általánosabb esetekben, a  $\langle V, AV \rangle$  kvadratikus polinomot kell vizsgálnunk,

ahol  $A$  invertálható szimmetrikus mátrix. A *pozitív definit*, *negatív definit*, és *indefinit* tulajdonságok változatlanok. Egy gyors, de durva teszt, hogy ha  $A$  pozitív definit, akkor az összes diagonális eleme pozitív kell legyen. [Bizonyítás: legyen  $e_j$  a  $j$ -edik standard bázis egységvektor. Akkor  $a_{jj} = \langle e_j, Ae_j \rangle > 0$ ].

Azonos okoskodás mutatja, hogy egy nemdegenerált kritikus pontban, ha két diagonális elem,  $a_{ii}$  és  $a_{jj}$  ellenkező előjelű, akkor az nyeregpont.

PÉLDA Határozzuk meg és osztályozzuk az

$$f(x, y, z) = 1 - 2x + 3x^2 - xy + xz - z^2 + 4z + y^2 + 2yz.$$

függvény szélsőérték-helyeit. A kritikus pontokat az  $\partial_x f = 0$ ,  $\partial_y f = 0$  és  $\partial_z f = 0$  megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} -2 + 6x - y + z &= 0 \\ -x + 2y + 2z &= 0 \\ 4 + x + 2y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Ennek a rendszernek egyetlen megoldása van,  $x = 0$ ,  $y = -1$ ,  $z = 1$ . Tehát  $(0, 1, -1)$  az egyetlen kritikus pontja  $f$ -nek. A második parciális deriváltak

$$\begin{aligned} \partial_{xx}f &= 6, & \partial_{xy}f &= -1, & \partial_{xz}f &= 1, \\ \partial_{yy}f &= 2, & \partial_{yz}f &= 2, & \partial_{zz}f &= -2, \end{aligned}$$

így a második derivált mátrix a kritikus pontban

$$f''(0, 1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy ennek a mátrixnak a diagonális elemei el-  
lenkező előjelűek. Tehát a példa előtti megjegyzés alapján a  
kritikus pont nyeregpont.

Mivel ez a példa csak egy kvadratikus polinom elsőrendű tagokkal,  
ezt a polinomot könnyebben is megérthetjük, ha alkalmazzuk a  
középiskolában tanult “teljes négyzetté alakítás” általánosítását,  
amivel eltávolítjuk a lineáris tagokat és egyszerű kvadratikus  
formává redukáljuk. Ezt vázoljuk a következő feladatban.

**Feladat** Legyen

$$\begin{aligned} Q(X) &= \sum a_{ij}x_i x_j + \sum b_i x_i + c \\ &= \langle X, AX \rangle + \langle b, X \rangle + c \end{aligned}$$

valós kvadratikus polinom, tehát  $X = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$   
valós vektorok és  $A = a_{ij}$  valós szimmetrikus  $n \times n$ -es mátrix.  
Hasonlóan az  $n = 1$  esethez, ha  $A$  invertálható, mutassuk meg,  
hogy van olyan  $Y = X - V$  változó helyettesítés (a  $V$  vektorral  
való eltolás), hogy az új  $Y$  változóiban

$$Q = \langle Y, AY \rangle + \gamma \quad \text{azaz} \quad Q = \sum a_{ij}y_i y_j + \gamma,$$

ahol a  $\gamma$  konstans tartalmazza  $A$ ,  $b$  és  $c$ -t. A lényeg az, hogy  
nincsenek  $Q$ -ban lineáris tagok. [VÁLASZ:  $V = A^{-1}b$ ,  $\gamma =$   
 $c - \langle b, A^{-1}b \rangle$ ].

Ellenőrzésképpen, alkalmazzák ezt a  $Q(X) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 +$   
 $3x_2 - 4$  kvadratikus formára és az előző példa polinomjára.

Van egy pontos algebrai teszt annak eldöntésére, hogy egy sz-  
immetrikus  $A$  mátrix pozitív definit, ami általánosítja (8)-et.  
Legyen  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  a  $j \times j$  részmátrix, amely az  $A$  első  $j$   
sorából és első  $j$  oszlopából áll, tehát

$$A_1 = (a_{11}), A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots, A_n = A.$$

A teszt a következő:  $A$  pozitív definit pontosan akkor, ha

$$\det A_1 > 0, \quad \det A_2 > 0, \quad \dots, \quad \det A_n > 0.$$

Mivel ez tartalmazza  $A$  determinánsát, gyakorlatban nemigen használható, csak kisebb mátrixokra.

**Feladat** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es valós invertálható mátrix és  $f(X) := \langle X, AX \rangle e^{-\|X\|^2}$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ . Mutassuk meg, hogy  $f$  kritikus pontjai pontosan az origó és az  $A \pm$ egység sajátvektorai. Ha  $A$  sajátvektorai különbözőek, akkor  $2n + 1$  kritikus pont van.

[Ezeknek a kritikus pontoknak az osztályozása bonyolultabb – de megoldható (először diagonalizálni kell  $A$ -t). Világos például, hogy  $f''(0) = 2A$ .]

## FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK

Gyakorlati és elméleti problémákban egyaránt gyakran fölmerül a következő. Keressük az  $f$  függvény minimumát olyan  $X$  pontokban, amelyek kielégítik a  $g(X) = c$  feltételt.

**PÉLDA** Egy hengeres konzervdobozt akarunk készíteni  $r$  sugárral és  $h$  magassággal, hogy a térfogata adott  $V_0$  legyen, tehát  $\pi r^2 h = V_0$ . Hogyan tervezzük a konzervdobozt, hogy a felszínét minimalizáljuk?

Azaz: minimalizáljuk az  $A(r, h) = 2\pi r h + 2\pi r^2$  függvényt a  $\pi r^2 h = V_0$  feltétel mellett.

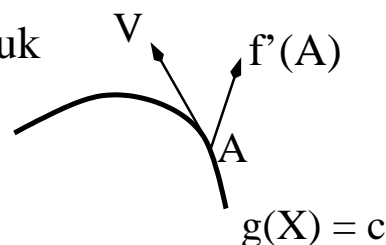
**1. módszer** Oldjuk meg a feltételt  $h$ -ra:  $h = V_0/(\pi r^2)$ , ezzel

$$A(r, h(r)) = 2\pi r(V_0/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 2V_0/r + 2\pi r^2.$$

Deriváljuk  $r$  szerint, akkor kapjuk:  $0 = -2V_0/r^2 + 4\pi r$ , tehát  $2\pi r^3 = V_0$ . Következésképpen  $h = 2r$ , azaz a magasság és az átmérő egyenlő.

**2. módszer** [LAGRANGE-MULTIPLIKÁTOROK] Egy elméleti megfigyeléssel kezdjük, ha az  $f$  függvényt maximalizálni akarjuk, ahol  $X$  kielégíti a  $g(X) = c$  feltételt. Tegyük fel, hogy  $g'(X) \neq 0$  ezen a feltételhalmazon. Vegyünk egy  $A$  pontot a feltételhalmazon és számítsuk

ki az  $f'(A)$  gradienst. Legyen  $V$  a feltételhez az  $A$ -ban húzott tetszőleges érintővektor. Akkor  $\langle f'(A), V \rangle$  az  $f$  iránymenti deriváltja  $A$ -ban a  $V$  irányban.



Ha  $V$  nem merőleges  $f'(A)$ -re, akkor  $\langle f'(A), V \rangle \neq 0$ , mondjuk  $\langle f'(A), V \rangle > 0$  (különben használjuk  $-V$ -t). Következésképpen a feltétel mentén  $V$  irányban haladva az  $f$  függvény növekszik.

Tehát, a  $g(X) = c$  feltételhalmaz egy  $A$  pontjában, ahol  $f$ -nek lokális maximuma (vagy minimuma) van, minden, a feltételhez húzott érintővektor merőleges kell legyen  $f'(A)$ -re, tehát  $f'(A)$  párhuzamos kell legyen  $g'(A)$ -val. Ez szemlélteti a következő tételt  $p = 2$  esetén.

**Tétel** Legyenek  $f$  és  $g$  sima függvények. Ha  $f$ -nek lokális minimuma vagy maximuma van a  $g(X) = c$  halmaz  $A$  pontjában, és ha itt  $g'(A) \neq 0$ , akkor valamely  $\lambda$  konstansra

$$f'(A) = \lambda g'(A) \quad \text{és} \quad g(A) = c. \quad (10)$$

Lagrange gondolatmenetét követve, összevonhatjuk a (10) feltételeket, ha az

$$F(X, \lambda) := f(X) - \lambda[g(X) - c]$$

függvény kritikus pontjait keressük *mindkét*  $X$  and  $\lambda$ -ra vonatkozóan; gondolhatunk a  $\lambda$  *Lagrange multiplikátorra*, mint a  $g(X) = c$  feltétel megszegésének egységnyi árára.

Alkalmazzuk ezt a hengeres problémára és tekintsük

$$F(r, h, \lambda) := 2\pi r h + 2\pi r^2 - \lambda[\pi r^2 h - V_0].$$

Vegyük a parciális deriváltakat  $r$ ,  $h$  és  $\lambda$  szerint,

$$0 = 2\pi h + 4\pi r - \lambda 2\pi r h, \quad 0 = 2\pi r - \lambda \pi r^2, \quad 0 = \pi r^2 h - V_0.$$

Három egyenletet kapunk három ismeretlennel,  $r$ ,  $h$  és  $\lambda$ . Ha eltüntetjük  $\lambda$ -t az első két egyenletből,  $h = 2r$ , mint az 1. módszerrel.

A Lagrange-multiplikátorok különösen akkor hasznosak, ha túl bonyolult a feltétel használata, hogy az egyik változót kiiktassuk.

PÉLDA Maximalizáljuk az  $f(x, y) := x^2 + 4xy + y^2$  függvényt az  $x^2 + y^2 = 1$  egységkörön. Legyen

$$F(x, y, \lambda) := x^2 + 4xy + y^2 - \lambda[x^2 + y^2 - 1].$$

Az  $x$ ,  $y$  és  $\lambda$  szerinti parciális deriváltakból kapjuk

$$0 = 2x + 4y - 2\lambda x$$

$$0 = 4x + 2y - 2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Azaz,  $\lambda$  a  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix sajátvektora és  $(x, y)$  a megfelelő egységnyi sajátvektor.

Ez általánosabban még jobban látható. Ha  $A$  egy szimmetrikus mátrix, tegyük fel, hogy maximalizálni akarjuk a  $f(X) := \langle X, AX \rangle$  kvadratikus polinomot az  $|X|^2 = 1$  egységkörön. Legyen

$$F(X, \lambda) := \langle X, AX \rangle - \lambda[|X|^2 - 1].$$

Akkor az  $X$  és  $\lambda$  szerinti parciális deriváltak rögtön megadják a

$$0 = 2AX - 2\lambda X \quad \text{és} \quad |X|^2 = 1$$

feltételeket, azaz  $AX = \lambda X$  és  $|X| = 1$ .

**Feladat** Határozzuk meg az  $f(x, y) = x^4 + y^4$  függvény kritikus pontjait az  $x^2 + y^2 = 1$  egységkörön. Megjegyezzük, hogy ha a feltételt akarjuk használni  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$  kifejezésére, akkor  $-1 \leq x \leq 1$  és az  $x = \pm 1$  végpontokat külön kell ellenőrizni.

**Feladat** Mindkét módszerrel határozzuk meg a  $(1, 0)$  pontnak a  $y^2 = 4x$  görbétől vett minimális távolságát. [Ha az első

módszerrel kifejezzük  $y$ -t az  $y^2 = 4x$ -ből, ehhez fel kell tenni, hogy  $x \geq 0$ . Az  $x = 0$  végpontot külön kell ellenőrizni.]

**Feladat** A Lagrange-multiplikátorok használatához az a feltétel, hogy  $g'(X) \neq 0$  a kritikus pontokban, szükséges. Ezt mutatja a következő példa: keressük az  $f(x, y) := y$  minimumát a  $g(x, y) := y^3 - x^2 = 0$  görbén. Igazoljuk, hogy a minimum az origóban van, ahol a görbének elágazási pontja van, és  $f'(0) \neq \lambda g'(0)$ .

## SZÉLSŐÉRTÉKEK HATÁRRAL RENDELKEZŐ TARTOMÁNYON

KÉRDÉS Hogyan találhatjuk meg egy határral rendelkező, korlátos összefüggő tartományon értelmezett függvény szélsőértékeit – mondjuk egy körön?

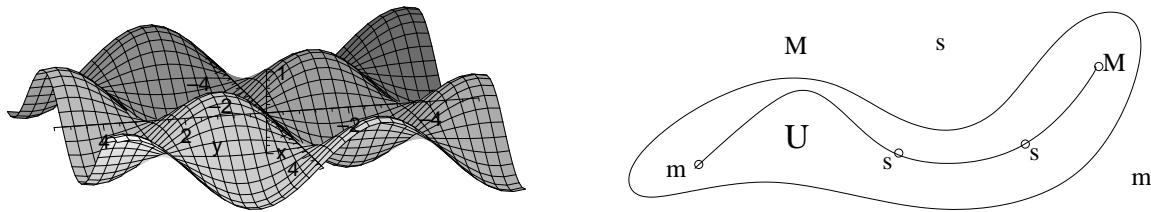
Bontsuk a problémát három lépésre:

- Határozzuk meg a belső pontok szélsőértékeit.
- Határozzuk meg a határon vett szélsőértékeket (ezek a *feltételes szélsőértékek*).
- Hasonlítsuk össze ezeket, hogy megkapjuk a globális maximumot, minimumot, ill. más információt.

## NÉHÁNY GLOBÁLIS PROBLÉMA

Egy  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett sima függvénynek bármennyi maximuma, minimuma és nyeregpontja lehet, azaz adott  $a$ ,  $b$  és  $c$  egészekhez van olyan sima függvény, amelynek pontosan  $a$  lokális maximuma,  $b$  lokális minimuma és  $c$  nyeregpontja van.

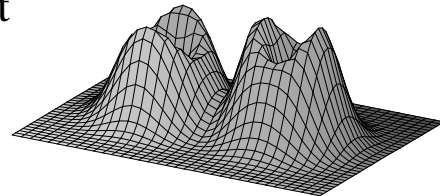
Ennek bizonyítására vegyünk például a  $g(x, y) := \sin x \sin y$  függvényt, aminek végtelen sok nemdegenerált kritikus pontja van mindhárom fajtából:



Rajzoljunk az  $x, y$  síkban egy olyan egyszerű görbét, ami pontosan  $a$  maximumhelyen,  $b$  minimumhelyen és  $c$  nyeregpon-  
ton megy át. Legyen  $U$  ennek a görbének egy olyan “csöves környezet”, amely csak ezeket a kritikus pontokat tartalmazza. Akkor van egy sima invertálható  $\varphi$  leképezés az  $\mathbb{R}^2$  térből  $U$ -ra, tehát

$$f := g \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ugyanakkor, ha egy korlátos tartományon, mint pl. egy  $\mathcal{R}$  négyzeten értelmezett függvényeket tekintünk (nemdegenerált kritikus pontokkal) és határfeltételeket szabunk, mondjuk  $f(x, y) = 0$  a  $\partial\mathcal{R}$  határon, akkor a kritikus pontok számára *vannak* megszorítások. Gondoljunk  $\mathcal{R}$ -re mint egy szigetre egyetlen partvonallal és legyen  $f(x, y)$  az  $(x, y)$  pont tengerszint feletti magassága. Legyen



$M$  = a szigeten lévő csúcsok száma ( $f$  lokális maximumai),  
 $m$  = mélyedések száma (minimumok),  
 $s$  = hegyvonulatok száma (nyergek).

Akkor

$$M - s + m = 1. \quad (11)$$

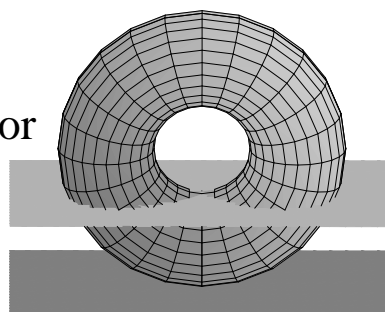
Az előző kétvulkános példánál  $M = 4$ ,  $m = 2$  és  $s = 5$ .

Ha egy sziget helyett az egész földet tekintjük (az  $S^2$  gömb), akkor

$$M - s + m = 2 \quad (12)$$

ha pedig egy gumikeréken értelmezett ( $T^2$  tórusz) függvényeket tekintjük, akkor

$$M - s + m = 0. \quad (13)$$



Az ábrán a függvény egy pontnak az alsó érintősíktól vett *távolsága*:

$$z := 3 - (2 + \cos \theta) \cos \varphi,$$

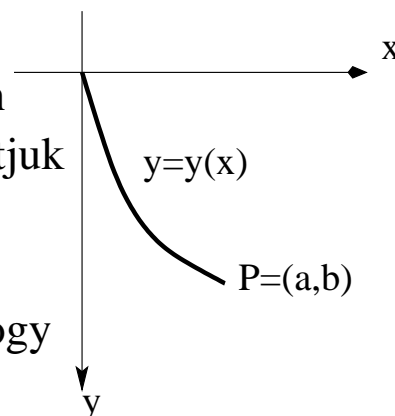
ahol  $\theta$  és  $\varphi$  a tóruszt generáló kis és nagy körök menti szögek. Ennek a függvénynek egy maximuma, egy minimuma és két nyeregpontra van. Az ábrán az alsó nyeregponthoz tartozó érintősík is látható.

**Feladat** Legyen  $f(\theta)$  az egységkörön értelmezett sima függvény ( $(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  az egységkör szögkoordinátája). Tegyük fel, hogy a kritikus pontok mind nemdegeneráltak,  $M$  lokális maximummal és  $m$  lokális minimummal. Mutassuk meg, hogy  $M - m = 0$ .

A Morse-elmélet elemi tárgyalását megtalálhatják Marston Morse  
“Topology and equilibria,” *Amer. Math. Monthly*, **114** (2007),  
no. 9, pp. 819–834.

## VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS

Vannak más, maximummal és minimummal kapcsolatos problémák. Tegyük fel, hogy van egy  $y = f(x)$  görbe az origó és a  $P = (a, b)$  pont között. Egy  $m$  tömegű részecske csúszik le a nyugalmi állapotból kiindulva (surlódás nélkül) a görbe mentén a gravitációs erő hatására. Kiszámíthatjuk a  $T$  időt, ami alatt a részecske eléri a  $P$  végpontba.



**Kérdés:** Milyen görbét válasszunk, hogy minimalizáljuk a  $T$  csúzási időt?

Ezt a *brachistochrone* (legrövidebb idő) problémának hívják. A kérdést először Johann Bernoulli tette föl 1696-ben kora vezető matematikusainak.

Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$\frac{1}{2}m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] - mgy = 0. \quad (14)$$

Mivel

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \left( \frac{dx}{dt} \right)^2,$$

(14)-ot megoldhatjuk  $dt/dx$ -re és integrálással megkapjuk a részecske mozgásidejét:

$$T(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2gy(x)}} dx.$$

Olyan  $y(x)$  ( $y(0) = 0$  és  $y(a) = b$ ), görbét keresünk, ami minimalizálja  $T$ -t.

A probléma megoldását feladatként hagyjuk, a következőben

vázolt hasonló, de egyszerűbb megoldás mintájára. [A keresett,  $T$ -t minimalizáló  $y(x)$  görbe egy ciklois.]

**Kérdés:** Melyik az az  $y = y(x)$  görbe az origóból a  $P = (a, b)$  pontba, melynek legrövidebb a hossza? Minimalizálni akarjuk az

$$\mathcal{L}(y) := \int_0^a \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

ív hosszát az összes görbére, amelyre  $y(0) = 0$  és  $y(a) = b$ . Természetesen a válasz az egyenes szakasz lesz az origótól  $P$ -ig.

Ismét azt a módszert használjuk, hogy a problémát átalakítjuk egyváltozós problémává. Tegyük fel, hogy az  $y_0(x)$  görbe hossza minimális. Legyen  $h(x)$  egy sima függvény, amelyre  $h(0) = 0$  és  $h(a) = 0$ . Akkor bármely  $\lambda$ -ra a perturbált  $y(x, \lambda) := y_0(x) + \lambda h(x)$  görbe is az origótól  $P$ -ig halad. Legyen

$$\varphi(\lambda) := \mathcal{L}(y_0 + \lambda h) = \int_0^a \sqrt{1 + (y'_0 + \lambda h')^2} dx \quad (15)$$

ennek a perturbált görbének a hossza. Mivel

$$\varphi(\lambda) = \mathcal{L}(y_0 + \lambda h) \geq \mathcal{L}(y_0) = \varphi(0),$$

láthatjuk, hogy  $\varphi(\lambda)$ -nek minimuma van  $\lambda = 0$ -ban. Következésképpen,  $d\varphi/d\lambda|_{\lambda=0} = 0$ . A (15) felhasználásával innen

$$0 = \int_0^a \frac{y'_0 h'}{\sqrt{1 + y_0'^2}} dx.$$

Most parciálisan integrálunk. Mivel  $h(x) = 0$  a határon, így nincsenek határtagok. Tehát

$$0 = - \int_0^a \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'_0}{\sqrt{1 + y_0'^2}} \right] h(x) dx. \quad (16)$$

Tekintsük ezt a feltételt, mint  $\int_0^a f(x)h(x) dx = 0$  minden olyan  $h$  függvényre, amely nulla a határon. Itt egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az  $f$  függvény folytonos. Azt állítjuk, hogy  $f(x) \equiv 0$ . Ha nem, akkor mondjuk  $f(c) > 0$  valamely  $c$ -re. Akkor  $f(x) > 0$  egy  $c$  körüli kis intervallumon. Most válasszunk egy sima  $h$  függvényt, amely pozitív ezen az intervallumon és máshol nulla. Ez viszont ellentmond a  $\int_0^a f(x)h(x) dx = 0$  feltételnek.

Ezt (16)-re alkalmazva kapjuk

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{y'_0(x)}{\sqrt{1 + y'_0(x)^2}} \right] = 0,$$

így  $y'_0 / \sqrt{1 + y_0'^2} = \text{konstans}$ . Tehát  $y'_0(x) = \text{konstans}$ , így a görbe az az egyenes, amit gondoltunk.

Az  $y_0(0) = 0$  és  $y_0(a) = b$  feltételek meghatározzák ezt az egyenest az origótól  $P$ -be.

**Feladat:** Legyen  $u(x,y)$  egy korlátos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tartományon értelmezett sima függvény, amely kielégíti az  $u(x,y) = f(x,y)$  határfeltételeket  $\partial\Omega$ -n. Tegyük fel, hogy  $u$  minimalizálja a

$$J(v) := \iint_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy$$

integrált a sima  $v(x,y)$  függvények körében, melyekre  $v(x,y) = f(x,y)$  a  $\partial\Omega$  határon. Igazoljuk, hogy  $u$  kielégíti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Laplace-egyenletet} \quad \Omega\text{-ban.}$$

[Ez volt Riemann eredeti bizonyításának a lényege a *Riemann leképezés tételre* komplex függvénytanban].