KOMBINATORIKUS ALGORITMUSOK II.

Frank András

2009

Fejezet 1

GRÁFOK BEJÁRÁSA

1.1 Elérhetőség

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf. **Sétá**n egy olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ sorozatot értünk, amelyben felváltva következnek pontok és élek úgy, hogy mindegyik e_i él a v_{i-1} pontból vezet a v_i pontba. A séta **zárt**, ha $v_0 = v_k$. A szereplő élek száma a séta **hossza**. Azt mondjuk, hogy v_0 a séta kezdőpontja, míg v_k a séta végpontja. Azt mondjuk, hogy D-ben v_k **elérhető** v_0-ból, ha létezik v_0 kezdőpontú és v_k végpontú séta. Amennyiben a sétában nincs ismétlődés, **út**ról beszélünk. Rövidség kedvéért egy s-ből t-be vezető utat st-útnak fogunk hívni. Egy olyan irányított $F = (S, E)$ fát, amelynek minden pontja elérhető irányított úton s-ből s-**fenyő**nek nevezünk. Azt mondjuk, hogy F feszíti S-t. Ha a fenyő részgráfja D-nek és az egész V halmazt tartalmazza, **feszítő** s-fenyőről beszélünk. **Fenyves**nek hívunk egy olyan irányított erdőt, melynek komponensei fenyők.

Gyakorlat 1.1.1 *Egy irányított fa akkor és csak akkor s-fenyő, ha az $s \in S$ pont befoka nulla a többi ponté pedig egy.*

Gyakorlat 1.1.2 *Egy s-t tartalmazó digráf akkor és csak akkor s-fenyő, ha az s pontból kiindulva elő lehet irányított élek egyenkénti hozzávételével állítani úgy, hogy az aktuálisan hozzáadott él feje új pont, míg a töve már meglévő.*

Gyakorlat 1.1.3 *Igazoljuk, hogy ha létezik s-ből t-be séta, akkor létezik út is.*

Azt mondjuk, hogy t **elérhető** s-ből, ha létezik irányított st-út. Kérdés, hogy miként lehet hatékonyan eldönteni, hogy létezik-e st-út? Ez valójában két kérdést is jelent. Egyrészt konstruálnunk kell egy st-utat, ha ilyen egyáltalán létezik. Míg ha nem létezik st-út, úgy ennek egy könnyen ellenőrizhető bizonyítékát kell bemutatnunk. A trükk abból áll, hogy nem csupán a t csúcs s-ből való elérhetőségét vizsgáljuk, hanem egyszerre valamennyi csúcsét.

TÉTEL 1.1.1 *Jelölje S a $D = (V, A)$ digráfban azon csúcsok halmazát, amelyek az s csúcsából elérhetők. Ekkor S minden valódi, s-t tartalmazó S' részhalmazából vezet ki él, de S-ből nem. Továbbá létezik S-t feszítő s-fenyő.*

Biz. Ha indirekt egy uv él kilépne S-ből, akkor v pont is elérhető volna, hiszen $u \in S$ definíció szerint az, vagyis létezik P út s-ből u-ba, amihez az uv élt hozzávéve egy sv-utat kapnánk, ellentmondásban azzal, hogy v nem elérhető. Ha az S'-ből nem lépne ki él, akkor semelyik S'-n kívüli pont nem volna elérhető s-ből, ellentmondásban S definíciójával.

Legyen F egy nem bővíthető s-fenyő. Állítjuk, hogy ennek S' csúcshalmaza éppen S. Mivel F minden pontja elérhető s-ből, így $S' \subseteq S$. Ha indirekt $S' \subset S$ állna, úgy az első rész szerint lép ki egy uv él S'-ből. De ezt F-hez véve egy nagyobb fenyőt kapnánk, ellentmondásban F maximális választásával. •

Hogyan lehet algoritmikusan megkonstruálni a szóban forgó S halmazt és F fenyőt? Az alábbi címkézési technika segít. A digráf minden v pontjához tartozzék egy R-címke (**R**each = elér), amely azt mutatja, hogy az algoritmus futásának egy adott pillanatában v-t már elértük s-ből egy út mentén vagy sem. Amennyiben nem, akkor az R-címke tartalma NEM ELÉRT. Ha v-t már elértük, akkor R-címkéjének tartalma ELÉRT valamint azon útnak a legutolsó uv éle, amelyen elértük v-t. Az egyetlen kivétel maga az s pont, amelynek R-címkéje mindig ELÉRT.

Ezen kívül minden pontban fenntartunk egy S-címkét (**S**can = letapogat, átvizsgál), amely azt jelzi, hogy az adott pillanatban a v pontból vajon már az összes továbbmenési lehetőséget átvizsgáltuk-e (azaz valamennyi

$vu \in E$ élre az u csúcs már elért), amikoris az S-címke tartalma ÁTVIZSGÁLT, vagy pedig még van át nem vizsgált vx él. Kezdetben minden S-címke tartalma NEM ÁTVIZSGÁLT.

Az algoritmus általános lépésében kiválasztunk egy már elért, de még át nem vizsgált u pontot (ami induláskor persze csak az s pont lehet) és eldöntjük, hogy van-e olyan uv éle a digráfnak, hogy v még nem elért. Amennyiben nincs, akkor az u pontot ÁTVIZSGÁLT-nak deklaráljuk és az eljárást iteráljuk. Ha viszont találunk ilyen v pontot, akkor v-t ELÉRT-nek nyilvánítjuk, az R-címkéjébe betesszük az uv élt, és ismét az eljárást iteráljuk. Az algoritmus akkor ér véget, amikor már minden elért pont átvizsgált lesz.

Egyszerű feladat annak igazolása, hogy az algoritmus lefutása után az ELÉRT pontok S halmazából nem vezet kifelé él, továbbá, hogy az elért pontok R-címkéjébe írt élek egy s gyökerű fenyőt alkotnak, melynek ponthalmaza S.

Az eljárás az S meghatározása után folytatható egy tetszőleges S-ben nem szereplő s_2 pont gyökérnek való kijelölésével. Végül egy fenyvest kapunk, melynek gyökerei $s_1 := s, s_2, \ldots$, és amely az összes pontot tartalmazza.

Az eljárásról annyit érdemes még tudni, hogy megfelelő adatstruktúra alkalmazásával a futási idő lineáris, azaz az élek számával arányos. További megjegyzés, hogy az eljárás irányítatlan gráfokra is alkalmazható.

Feladat 1.1.4 *Egy páros gráf élei pirossal és kékkel vannak színezve. Fejlesszünk ki algoritmust annak meghatározására, hogy a gráf két megadott pontja között létezik-e alternáló piros-kék út.*

1.1.1 Mélységi keresés

A címkézési eljárás során szabadságunk van a soron következő már elért, de még át nem vizsgált pont kiválasztásában. Egy lehetséges stratégia az, amikor az algoritmus azt a még át nem vizsgált pontot választja ki, amelyiket a legkésőbb értük el. Ebben az esetben az eljárást **mélységi keresés**nek nevezzük (depth first search: DFS). A DFS-nél minden pontnak van egy **elérési időpont**ja, amikor a pont ELÉRT lesz (tehát amikor az algoritmus először találkozik az illető ponttal), és van egy **elhagyási időpont**ja, amikor a pont ÁTVIZSGÁLT lett (vagyis amikor a keresés utoljára találkozik a illető ponttal). Mind a kettő meghatározza a pontok egy sorrendjét: az **elérési** és az **elhagyási** sorrendet. A két sorrend összefésülésével kapjuk a pontok **kezelési** sorendjét. Tehát a kezelési sorrendben minden pont kétszer fordul elő, és a két előfordulás közötti ponthalmaz, amint az könnyen belátható, két különböző pontra vagy diszjunkt vagy tartalmazkodó. Az ilyen sorozatot **lamináris**nak nevezzük. Következik, hogy ha s-ből minden pont elérhető, akkor a sorozat első és utolsó tagja az s gyökérpont. Egyébként egy lamináris sorozat, amelynek első és utolsó tagja s, mindig egyértelműen leír egy s gyökerű fenyőt. Ezt rekurzívan definiálva úgy kaphatjuk meg, hogy veszünk a sorozatnak egy x, y, y alakú három egymást követő eleméből álló részét [ilyen van a laminaritás miatt], a két y-t kihagyjuk, a maradékhoz megkonstruáljuk a fenyőt, és végül hozzávesszük az xy élt.

Gyakorlat 1.1.5 *Igazoljuk, hogy legalább háromtagú lamináris sorozatnak (amelyben minden elem kétszer fordul elő) van x, y, y alakú három egymást követő elemből álló része.*

A DFS fenyő fontos tulajdonsága, hogy minden xy élre az y elérési időpontja megelőzi az x elhagyási időpontját. Speciálisan, összefüggő irányítatlan gráf mélységi fájához nem tartozik keresztél. (Egy s gyökerű irányítatlan fa esetén egy xy nem-fa élt akkor hívunk **keresztél**nek, ha a fában az x és y-t összekötő egyértelmű út s-hez (a fában) legközelebbi pontja különbözik x-től és y-tól.)

A DFS-nek számos érdekes alkalmazása van. Segítségével lehet például lineáris időben egy kétszer élösszefüggő gráf erősen összefüggő irányítását megkapni: vegyünk egy s gyökerű mélységi fát, irányítsuk a fa éleit s-től kifelé, a nem-fa éleket pedig s felé. Mivel nincs keresztél, így minden élt irányítottunk.

Feladat 1.1.6 *Igazoljuk, hogy ha a gráf 2-élösszefüggő, akkor az így kapott irányítás erősen összefüggő.*

A DFS másik alkalmazása aciklikus digráfban a pontok ún. topologikus sorrendjének meghatározására szolgál (a **topologikus sorrend** olyan, amelyre vonatkozólag minden él visszafelé vezet.) Ennek érdekében feltehetjük, hogy a digráfnak van olyan s pontja, ahonnan minden más pont elérhető. (Valóban, mert ha nem ez a helyzet, akkor adjunk a digráfhoz egy új s pontot, és vezessünk s-ből minden eredeti pontba élt. Így aciklikus digráfot kapunk, amely pontjainak topologikus sorrendjéből az újonnan hozzáadott s-t kihagyva megkapjuk az eredeti digráf pontjainak egy topologikus sorrendjét.)

Feladat 1.1.7 *Igazoljuk, hogy az elhagyási sorrend topologikus sorrendet ad.*

Gráfelméletből ismert, hogy tetszőleges $G = (V, A)$ irányított gráf esetén, ha két pontot ekvivalensnek tekintünk amennyiben mindkettő elérhető a másikból irányított úton, úgy ekvivalencia relációt kapunk. Érvényes, hogy az ekvivalencia osztályai erősen összefüggő részgráfokat feszítenek, amelyek mindegyikét egy-egy pontra összehúzva aciklikus digráfot kapunk. Az ekvivalencia osztályok által feszített digráfokat szokás a G digráf erősen összefüggő komponenseinek nevezni.

Gyakorlat 1.1.8 *Igazoljuk, hogy egy mélységi kereséssel kapott feszítő fenyves olyan, hogy a digráf bármely C erősen összefüggő komponensére megszorítva C-nek feszítő fenyőjét adja (amelynek gyökere a C-nek a keresés által legelőször elért pontja).*

A topológikus sorrend meghatározásánál kicsit ravaszabb módon lehet egy digráf erősen összefüggő komponenseit előállítani. Ismét feltehetjük, hogy egy s pontból minden pont elérhető. Az algoritmus két külön fázisból áll. Az első fázisban mélységi kereséssel határozzuk meg az elhagyási sorrendet. A második fázisban tetszőleges keresési eljárással (ami lehet a DFS is, de ezt már nem használjuk ki a bizonyításban) határozzunk meg egy fordított fenyvest úgy, hogy a soron következő gyökérpont mindig az első fázisban kapott elhagyási sorrend még nem szerepelt legutolsó tagja legyen. (Fordított fenyő alatt olyan irányított fát értünk, amelyben a gyökértől eltekintve minden pont kifoka egy, míg a gyökéré nulla. Fordított fenyves olyan irányított erdő, amelynek minden komponense fordított fenyő.)

Feladat 1.1.9 *Igazoljuk, hogy a második fázisban kapott fordított fenyves komponensei éppen a digráf erősen összefüggő komponensei lesznek.*

A mélységi keresésnek elméleti alkalmazásai is vannak.

Feladat 1.1.10 *Bizonyítsuk be, hogy egy legalább két pontú, összefüggő, egyszerű irányítatlan gráfban, ha minden pont foka legalább három, akkor létezik úgynevezett periférikus kör, azaz egy olyan húrmentes C kör, amelynek pontjait elhagyva összefüggő gráfot kapunk.*

(Segítség: az s gyökerű mélységi fához válasszunk egy olyan xy nem-fa élt, amelynek s-hez közelebbi x pontja s-től a lehető legtávolabb van a fában, és ezen belül y a lehető legközelebb. Ekkor az xy alapköre periférikus.)

A periférikus köröknek fontos szerepük van síkba rajzolható gráfok síkba rajzolásánál. Nevezetesen, nem nehéz belátni, hogy 3-összefüggő síkgráfban egy kör akkor és csak akkor periférikus, ha a síkbaágyazásnál tartományt határol: íly módon a tartományt tisztán kombinatorikusan lehet definiálni. Tutte bebizonyította, hogy egy 3-összefüggő síkgráfnak a következő módon lehet egy síkbarajzolását meghatározni. Keressünk egy C periférikus kört. Ennek pontjait helyezzük el a síkban úgy, hogy konvex poligont feszítsenek. Tekintsük azt az egyenletrendszert, amely azt írja le, hogy a gráf minden nem C-ben lévő csúcsa a szomszédos csúcsok súlypontjában van. Ezen egyenletrendszer megoldása, amint azt Tutte bebizonyította, a pontoknak olyan elhelyezését szolgáltatja, amelyben különböző csúcsoknak különböző pontok felelnek meg, és a gráfban szomszédos csúcsoknak megfeleltetett síkbeli pontokat szakaszokkal összekötve a gráfnak olyan síkba rajzolást kapjuk, amelyben a korlátos tartományok konvexek.

Feladat 1.1.11 *Periférikus köröket használva igazoljuk G. Dirac azon tételét, mely szerint egy gráf akkor és csak akkor soros-párhuzamos, ha nem tartalmaz részgráfként felosztott teljes négyest.* (A felosztott teljes négyes a négypontú teljes gráfból áll elő úgy, hogy az éleket [a végpontoktól eltekintve] diszjunkt utakkal helyettesítjük.)

(Definíció szerint egy **soros-párhuzamos gráf** egy pontból kiindulva az alábbi műveletek tetszés szerinti egymás utáni alkalmazásával áll elő: (1) egy új él hozzáadása, melynek egyik vége régi pont, a másik viszont új, (2) egy meglévő élt egy osztóponttal felosztunk, (3) egy meglévő éllel párhuzamos élt behúzunk.)

Feladat 1.1.12 *Tegyük fel, hogy $G = (V, A)$ irányított, összefüggő Euler-gráf, azaz minden pontnak ugyanannyi a befoka, mint a kifoka. Legyen s tetszőleges pont és F s-gyökerű fordított feszítő fenyő. Az s-ből kiindulva minden u pontnál tetszés szerint haladjunk tovább egy még nem használt uv élen, csak arra ügyelve, hogy $u \neq s$ esetén az u-ból kilépő egyetlen F-beli élt csak akkor vegyük igénybe, ha már más lehetőségünk nincsen. Az eljárás akkor ér véget, amikor egy olyan ponthoz érünk, amelynek már minden kimenő élét használtuk. Igazoljuk, hogy ez a végső pont s és az eljárás G-nek egy Euler-bejárását szolgáltatja, azaz minden élt pontosan egyszer használ.*

1.1.2 Szélességi keresés

A címkézési eljárás futása során egy másik lehetséges stratégia azt a még nem átvizsgált pontot kiválasztani az elért pontok közül, amelyiket leghamarabb értük el. Ebben az esetben **szélességi keresésről** beszélünk (breadth first search: BFS). A BFS például alkalmas arra, hogy segítségével a pontok s-től való távolságát egyszerűen meghatározzuk. Csupán azt a csekély módosítást kell a fenti algoritmusban végrehajtani, hogy minden v pontra fenntartunk egy $d(v)$ változót is, amely a már elért pontoknál megmondja az s-től való távolságot. Kezdetben ez az s-ben 0, mindenütt másutt ∞. Amikor az algoritmus során egy v pontot az uv él mentén u-ból elérünk, akkor a $d(v)$ értéket $d(u) + 1$-re állítjuk be. Valójában ez az algoritmus speciális esete Dijkstra később ismertetésre kerülő eljárásának, amely általában nem-negatív súlyozás esetén számítja ki egy v pontnak s-től való távolságát.

Gyakorlat 1.1.13 *Igazoljuk, hogy a BFS algoritmus helyesen határozza meg az s-től való távolságot.*

Gyakorlat 1.1.14 *Igazoljuk, hogy irányítatlan gráfban a távolság függvény kielégíti a háromszög egyenlőtlenséget.*

A BFS keresés általánosítása a lokális szélességi keresés (SFS: scan-first search). Ennek bevezetéséhez nézzük a BFS algoritmusnak azt a lépését, amikor a legkorábban elért, még nem átvizsgált pont az u. A következő lépések mindegyikében ugyanaz az u lesz a legkorábbi még át nem vizsgált pont egészen addig, amíg a gráfnak már valamennyi uv élére a v pont a fenyőhöz nem tartozik (azaz elért). Így ezeket a lépéseket egybe is vonhatjuk, vagyis a BFS algoritmus $(*)$ *veszi az u pontot, és a fenyőbe teszi a gráfnak valamennyi olyan uv élét, amelynek v feje még nem volt elért.* (Pontosabban, ha a gráfban vannak párhuzamos élek is, akkor az u-ból v-be menő párhuzamos élek egyikét tesszük a fenyőbe.) Mármost a **lokális szélességi keresés**nél egy tetszőleges (tehát nem feltétlenül a legkorábban) elért, de még át nem vizsgált u pontot választunk és erre alkalmazzuk $(*)$-t. Ebből a szabályból természetesen következik, hogy az átvizsgálásra választott u pont szükségképpen a már meglévő fenyőnek végpontja illetőleg a legelső választáskor a gyökere.

Legyen $G = (V, E)$ hurok-mentes irányítatlan (!) gráf, amelyben azonban lehetnek párhuzamos élek is. (A definíció irányított gráfokra is kiterjeszthető, de az alábbi alkalmazásokban csak irányítatlan gráfok szerepelnek.) Nevezzük G pontjainak egy $\{v_1, \dots, v_n\}$ sorrendjét **folytonos**nak, ha G összefüggő komponensei folytonosan helyezkednek el, és G bármely komponensében a legelső pont kivételével mindegyik más pontból vezet visszafelé él. Ez tehát egyrészt azt jelenti, hogy ha C a gráf bármelyik komponensének ponthalmaza és $i < j < k$ indexek, akkor $v_i, v_k \in C$-ből következik, hogy $v_j \in C$, másrészt pedig ha $v_h \in C$ nem a legkisebb indexű pont C-ben, akkor létezik olyan $j < h$ index, amelyre $v_j \in C$ és $v_j v_h \in E$.

A pontok minden sorrendjéhez hozzárendelhetünk egy F erdőt úgy, hogy minden pontból, amelyből megy visszafelé él, vesszük a leginkább visszamenő (azaz a sorrendben legkorábbi ponthoz vezető) élt. [Az így kapott részgráf valóban körmentes lesz.] Az F erdőt nevezzük a **sorrendhez tartozó erdő**nek. (Amennyiben a leginkább visszamenő él több párhuzamos példányban is a gráfban van, akkor az egyik példányt vesszük F-be. Ebben az értelemben F nem egyértelműen meghatározott.)

Gyakorlat 1.1.15 *Igazoljuk, hogy folytonos sorrendhez tartozó erdő maximális.*

A lokális szélességi keresésnél a pontokat egymást követően vizsgáltuk. Az ezáltal meghatározott sorrendet nevezzük a pontok **átvizsgálási** sorrendjének.

TÉTEL 1.1.2 *G pontjainak egy sorrendje akkor és csak akkor folytonos, ha egy lokális szélességi keresés átvizsgálási sorrendje. Egyszerű gráf esetén a keresés által meghatározott erdő éppen a sorrendhez tartozó erdő.*

Biz. Tegyük fel először, hogy a $v_1, \dots, v_n$ sorrend SFS átvizsgálási sorrend. Ha a gráf komponensei $K_1, \dots, K_t$, akkor a keresés csak akkor kezd egy új komponenst bejárni, ha az aktuális komponensnek már megtalált egy feszítő fáját. Tehát a gráf komponensei a sorrendben összefüggően helyezkednek el. Ha $v_1, \dots, v_l$ jelöli egy komponensen belül az átvizsgálási sorrendet, akkor a v_1 kivételével tetszőleges v_k pont akkor kerül átvizsgálásra, ha v_k végpontja a már addig felépített F részfának. Jelölje $e = v_j v_k$ a részfában a v_k-ból induló egyetlen élt. Ekkor v_j megelőzi a sorrendben v_k-t, tehát a sorrend valóban folytonos. Érvényes továbbá, hogy v_j a legelső olyan pont, amely szomszédos a gráfban v_k-val. Ha ugyanis volna egy v_j-t megelőző v_i pont, amely szomszédos a gráfban v_k-val, akkor a lokális szélességi keresés szabálya szerint a $v_i v_k$ él a részfába kerül, ellentmondásban e választásával. Tehát a keresés által kapott fa minden éle a sorrendhez tartozó fa éle.

Megfordítva, legyen most $\{v_1, \dots, v_n\}$ folytonos sorrend. Feltehetjük, hogy a gráf összefüggő. Tetszőleges pont, így v_1 is választható egy lokális szélességi keresés első pontjául. Legyen j a legnagyobb olyan index, amelyhez van olyan lokális szélességi keresés, amelyben az első j pont átvizsgálási sorrendje $\{v_1, \dots, v_j\}$. Ekkor $1 \leq j \leq n$. Készen vagyunk, ha $j = n$, ezért tegyük fel, hogy $j < n$. Miután a sorrend folytonos, v_{j+1}-ből vezet kisebb indexű ponthoz él. Legyen v_i a legkisebb indexű ilyen pont. Amikor a v_i pont átvizsgálásra került, akkor v_{j+1} is bekerült a fába, tehát van olyan a lokális szélességi keresés, amely a v_j pont átvizsgálása után a v_{j+1}-t vizsgálja át, ellentétben j maximális választásával. •

1.2 A max-vissza sorrend

Legyen $G = (V, E)$ hurok-mentes irányítatlan (!) gráf, amelyben azonban lehetnek párhuzamos élek. Legyen w nemnegatív súlyozás az élhalmazon. $d_G(X, Y) := d(X, Y)$ jelöli az $X - Y$ és $Y - X$ között vezető élek számát, illetve $d_w(X, Y)$ ezen élek össz-súlyát. Legyen $d_G(X) := d(X) := d(X, V - X)$ és $d_w(X) := d_w(X, V - X)$. $d(X)$ az X halmaz **foka**. Közismert, hogy

$$d_w(X) + d_w(Y) = d_w(X \cap Y) + d_w(X \cup Y) + 2d_w(X, Y) \tag{1.1}$$

és a d_w szimmetrikussága miatt

$$d_w(X) + d_w(Y) = d_w(X - Y) + d_w(Y - X) + 2\bar{d}_w(X, Y), \tag{1.2}$$

ahol $\bar{d}_w(X, Y) := d_w(X, V - Y)$, azaz $\bar{d}_w(X, Y)$ az $X \cap Y$ és $V - (X \cup Y)$ között vezető élek súlyösszege. w nemnegativitásából következik, hogy d_w szubmoduláris.

Legyen $\lambda_w(x, y) := \lambda_w(x, y; G) := \min\{d_w(X) : x \in X \subseteq V - y\}$. Amennyiben $w \equiv 1$, egyszerűen $\lambda(x, y)$-t írunk. (Menger tétele alapján tudjuk, hogy ez egyenlő az x és y között vezető élidegen utak maximális számával, de erre a tényre nincs szükségünk.) A $\lambda(x, y)$ értéket az x és y közötti **lokális élösszefüggőség**nek nevezzük. Legyen $\lambda_w(G) := min\{d_w(X) : \emptyset \subset X \subset V\}$. $\lambda_w(G)$-t a gráf **súlyozott élösszefüggőség**ének nevezzük.

A G gráf pontjainak valamely $v_1, \dots, v_n$ sorrendjére jelölje V_i az első i elemből álló halmazt. Azt mondjuk, hogy a sorrend **max-vissza** vagy **legális**, ha

$$d_w(v_i, V_{i-1}) \geq d_w(v_j, V_{i-1}) \tag{1.3}$$

fennáll minden $\{i, j\}$ párra $(2 \leq i < j \leq n)$. Az ún. **max-vissza** kereséssel meghatározhatunk egy max-vissza sorrendet. A max-vissza keresés tetszőleges pontot választ v_1-nek. Ha már $v_1, \dots, v_{i-1}$-t meghatároztuk, a maradék pontok közül egy olyant vegyünk a sorrendbe i-ediknek, amelyből a legnygyobb össz-súlyú élhalmaz vezet V_{i-1}-be. Alkalmas adatstruktúrát használva egy max-vissza sorrend $O(|E| \log |E|)$ időben megtalálható.

Gyakorlat 1.2.1 *Legyen $v_1, \dots, v_n$ a G gráf egy max-vissza sorrendje. Igazoljuk a következőket.* (a) *Ha e tetszőleges v_n-ből induló él, akkor $v_1, \dots, v_n$ a $G - e$ gráfnak is max-vissza sorrendje.* (b) *Tetszőleges i, j-re $(1 \leq i < j \leq n)$ $v_1, \dots, v_i, v_j$ az ezen pontok által feszített részgráfnak max-vissza sorrendje.*

Lemma 1.2.1 *Max-vissza sorrend mindig folytonos. Ha F a sorrendhez tartozó erdő, akkor ugyanaz a sorrend az F éleinek kihagyásával keletkező $G' := G - E(F)$ gráfnak is max-vissza sorrendje.*

Biz. A lemma első része nyilvánvaló. A második részhez tekintsük a $v_1, \dots, v_n$ max-vissza sorrendnek a V_{i-1} kezdő szeletét, amelyre tudjuk, hogy $d(v_i, V_{i-1}) \geq d(v_j, V_{i-1})$ $(j > i)$. F éleinek kihagyásával ez az egyenlőtlenség csak akkor tudna elromlani, ha egyenlőség áll, a baloldal eggyel csökken, a jobboldal pedig nem. De ilyenkor v_j-ből vezet G-beli él V_{i-1}-be, és ezért persze a v_j-ből visszafelé menő legkorábbi G-beli e él vége is V_{i-1}-ben van. Viszont e hozzátartozik F-hez, tehát az F kihagyásakor a jobboldal is eggyel csökken. •

Egy G gráfban bármely x, y pontpárra nyilván fennáll $\lambda_G(x, y) \leq \min\{d_G(x), d_G(y)\}$, és könnyű példát mutatni arra, amikor az egyenlőtlenség szigorú. (Mutassunk!) W. Mader azonban 1972-ben belátta a következőt.

TÉTEL 1.2.2 (Mader) *Tetszőleges* (legalább két-pontú) *hurokmentes irányítatlan gráf tartalmaz két olyan x, y pontot, amelyekre $\lambda_G(x, y) = d_G(x)$.*

A következő tétel tartalma az, hogy a max-vissza sorrend utolsó két pontja ilyen.

TÉTEL 1.2.3 (Ibaraki és Nagamochi) *Ha $v_1, \dots, v_n$ max-vissza sorrend, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$.*

Biz. Legyen $k := d(v_n)$. Ha $k = 0$, akkor a tétel nyilván igaz, hiszen $\lambda(v_n, v_{n-1}) = 0 = d(v_n)$. Legyen tehát $k \geq 1$ és legyen F_1 a sorrendhez tartozó erdő. Az előbbi gyakorlatban láttuk, hogy F_1 maximális erdő és a sorrend az F_1 elhagyása után keletkező gráfra is max-vissza sorrend. Így egymás után képezhetjük az $F_1, F_2, \dots, F_k$ maximális erdőket, ahol tehát az F_i erdőt úgy kapjuk, hogy minden v_j pontra megvizsgáljuk, hogy vezet-e vissza (azaz kisebb indexű ponthoz) belőle legalább i él, és ha igen, akkor F_i-be vesszük a v_j-ből visszamenőek közül az i-edik legkorábbit. (Párhuzamos élek esetén előre lerögzítjük az egymással párhuzamos élek egy sorrendjét.) Korábban megjegyeztük, hogy a max-vissza sorrend folytonos. Ebből következik, hogy az utolsó két pont F_k-nak ugyanahhoz a komponenséhez tartozik és ezért ugyanez igaz a többi F_i-re is. Így minden v_{n-1}-t és v_n-t elválasztó vágás mindegyik F_i-ből tartalmaz legalább egy élt, vagyis legalább $k = d(v_n)$ elemű, amiből a tétel következik. •

Ennek nyomán lehetőség nyílik a Nagamochi-Ibaraki algoritmus gyakorlati felgyorsítására a $w \equiv 1$ speciális esetben azáltal, hogy nem csak a max-vissza sorrend utolsó két pontját lehet összehúzni, hanem az F_k erdő minden egyes komponensét egyszerre egy-egy pontra húzhatjuk, ahol $k := d(v_n)$. Mivel ezen komponensek pontjai közötti lokális élösszefüggőség legalább k, az ilyen összehúzással k-nál kisebb vágást biztosan nem szüntetünk meg. (Persze, ha olyan "balszerencsénk" van, hogy az F_k-nak $\{v_n, v_{n-1}\}$ az egyetlen többpontú komponense, akkor így semmit sem nyerünk.) KELL EZ? HOVA?

Az alábbiakban megvizsgáljuk a max-vissza sorrend alkalmazását minimális súlyú vágás meghatározására. Az Ibaraki és Nagamochi által 1992-ben publikált eljárásban az a meglepő, hogy a korábbi ilyen célú módszerekkel szemben egyáltalán nem használ maximális folyamot kiszámító szubrutint.

A 1.2.3 tételből levezethető az élsúlyozott általánosítása, amikor adott az élhalmazon egy nemnegatív w függvény. Az így nyert eredményre bemutatunk egy direkt bizonyítást.

TÉTEL 1.2.4 (Ibaraki és Nagamochi) $\lambda_w(v_n, v_{n-1}) = d_w(v_n, V_{n-1})$ $(= d_w(v_n))$.

Biz. Természetesen a baloldal nem nagyobb, mint a jobb, ezért csak a $\geq$ irányt kell igazolnunk. Tegyük fel indirekt, hogy a tétel nem igaz, és legyen G minimális ellenpélda. Ekkor nyilvánvalóan $n \geq 3$.

Állítjuk, hogy $d_w(v_n) = d_w(v_n, V_{n-2})$, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy v_n és v_{n-1} között nincsen él. Ha volna, akkor egy ilyen élt kihagyva a keletkező gráfra nézve az adott sorrend továbbra is max-vissza maradna, így a tétel már alkalmazható, de akkor a tétel G-re is igaz volna.

A $G - v_n$ gráfra a tétel már igaz, így $\lambda_w(v_{n-1}, v_{n-2}) \geq \lambda_w(v_{n-1}, v_{n-2}; G - v_n) \geq d_w(v_{n-1}, V_{n-2}) \geq d_w(v_n, V_{n-2}) = d_w(v_n)$, ahol az utolsó egyenlőtlenség a max-vissza sorrend definíciója miatt igaz. A tétel a $G - v_{n-1}$ gráfra is igaz, így $\lambda_w(v_n, v_{n-2}) \geq \lambda_w(v_n, v_{n-2}; G - v_{n-1}) \geq d_w(v_n, V_{n-2}) = d_w(v_n)$. Ebből $\lambda_w(v_n, v_{n-1}) \geq \min\{\lambda_w(v_n, v_{n-2}), (\lambda_w(v_{n-1}, v_{n-2})\} \geq d_w(v_n)$, ellentétben G ellenpélda voltával. •

1.2.1 A Nagamochi-Ibaraki algoritmus minimális vágás kiszámítására

H. Nagamochi és T. Ibaraki algoritmusa a következő megfigyelésen alapul. Jelölje G' azt a gráfot, amely G-ből keletkezik a v_{n-1} és v_n pontok összehúzásával. (Összehúzáskor a keletkező hurokéleket mindig elhagyjuk.) Ekkor nyilván

$$\lambda_w(G) = \min\{\lambda_w(v_{n-1}, v_n), \lambda_w(G')\}, \tag{1.4}$$

hiszen G vágásait két osztályba lehet sorolni aszerint, hogy v_{n-1}-t és v_n-t elválasztják-e vagy sem. Az előző tétel alapján azonban $\lambda_w(v_{n-1}, v_n) = d_w(v_n)$, így

$$\lambda_w(G) = \min\{\lambda_w(G'), d_w(v_n)\}. \tag{1.5}$$

Ezen megfontolások igazolják az alábbi eljárás helyességét.

Legyen $G_1 := G$ és ismételjük meg $n-1$-szer a következő eljárást. Tegyük fel, hogy a G_i gráfot már megkonstruáltuk $i-1$ darab pontpár összehúzásával $(i = 1, \ldots, n-1)$. Határozzuk meg a G_i gráf pontjainak egy max-vissza sorrendjét, és jelölje ennek utolsó elemét x_i. Tegyük egy listára azt az $X_i \subset V$ halmazt, amelynek elemei G_i-nek az x_i pontjába lettek húzva (azaz x_i ősképét) valamint $d_w(X_i)$ számot, (azaz $d_w(X_i)$ a G_i gráfban az x_i pontnál végződő élek össz-súlya.) Az utolsó két pont összehúzásával készítsük el G_i-ből a G_{i+1} gráfot. (1.5) ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $\lambda_w(G) = \lambda_w(G_1) = \min\{\lambda_w(G_2), d_w(X_1)\} = \min\{\lambda_w(G_3), d_w(X_1), d_w(X_2)\} = \ldots = \min\{d_w(X_1), d_w(X_2), \ldots, d_w(X_{n-1})\}$. Ennek alapján az $n-1$ iteráció után keletkezett listáról kiválasztva azt az X_j halmazt, amelyre $d_w(X_j)$ a legkisebb, megkapjuk azt a halmazt, amelyre $d_w(X)$ a lehető legkisebb.

Miután egy max-vissza sorrendet $O(m \log m)$ lépésben meg lehet határozni, a teljes algoritmus lépésszáma $O(mn \log m)$.

Megjegyezzük, hogy Mader valójában az 1.2.2 tételnek azt a valamivel erősebb alakját bizonyította, ami szerint a szóbanforgó x és y pontok szomszédosnak is választhatók (legalábbis, ha a gráfnak van egyáltalán éle). Valóban, feltehető, hogy a gráf összefüggő. Legyen v_i a max-vissza sorrend maximális indexű olyan pontja, amely szomszédos v_n-nel. Az előbbi gyakorlatban láttuk, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n$ sorrend az ezen pontok által feszített G' gráf max-vissza sorrendje. G'-re alkalmazva az 1.2.4 tételt kapjuk, hogy $\lambda'_w(v_n, v_i) = d'_w(v_n, V_i)$, és így $\lambda_w(v_n, v_i) \geq \lambda'_w(v_n, v_i) = d'_w(v_n, V_i) = d_w(v_n, V_{n-1})$. (Az utolsó egyenlőség azért igaz, mert a i választása miatt a v_n-nel szomszédos élek halmaza G'-ben és G-ben ugyanaz.

Feladat 1.2.2 *Legyen a $G = (V, E)$ gráfban s kiválasztott csúcs. Hogyan kell módosítani a Nagamochi-Ibaraki algoritmust, ha olyan minimális vágást kell találnunk, amely különbözik az $[s, V - s]$ vágástól?*

Másik bizonyítás Mader 1.2.2 tételére. Legyen X olyan minimális elemszámú halmaz, amelyre létezik X-ben x pont és $V - X$-ben y pont, hogy $\lambda_w(x, y) = d_w(X)$. Kimutatjuk, X egyelemű.

Indirekt, létezzék $z \in X - x$. Legyen Z olyan $x\bar{z}$-halmaz, amelyre $\lambda_w(x, z) = d_w(Z)$. Ha $y \notin Z$, akkor $\lambda_w(x, y) + \lambda_w(x, z) = d_w(X) + d_w(Z) \geq d_w(X \cap Z) + d_w(X \cup Z) \geq \lambda_w(x, z) + \lambda_w(x, y)$, amiből adódik, hogy végig egyenlőség áll, és így $d_w(X \cap Z) = \lambda_w(x, z)$, ellentmondásban X minimális választásával.

Ha $y \in Z$, akkor $\lambda_w(x,y)+\lambda_w(x,z) = d_w(X)+d_w(Z) \geq d_w(X-Z)+d_w(Z-X) \geq \lambda_w(x,y)+\lambda_w(x,z)$, amiből adódik, hogy végig egyenlőség áll, és így $d_w(Z-X) = \lambda_w(x,z)$, ellentmondásban X minimális választásával. •

Egy harmadik módszer segítségével bebizonyítjuk a 1.2.2 tétel enyhe általánosítását.

TÉTEL 1.2.5 *Ha $G = (V, E)$ legalább három pontú hurokmentes gráf, úgy tetszőleges s pontjához létezik két s-től különböző x, y pont, melyekre $d(x) = \lambda(x, y)$.*

Biz. $|V| + |E|$ szerinti indukció. A tétel triviális, ha G-nek három pontja van, így tegyük fel, hogy $|V| \geq 4$, és hogy G-nél kisebb gráfokra a tétel érvényes. Amennyiben s-nek legfeljebb egy szomszédja van, hagyjuk el s-t és legyen s' az s szomszédja, vagy ha s-nek egyáltalán nem volt szomszédja, akkor s' a maradék G' gráfnak legyen egy tetszőleges pontja. Indukcióval kész vagyunk.

Ha s-nek u és v két különböző szomszédja, akkor egy s és u között vezető e élt és egy s és v között vezető f élt helyettesítsünk egy új u és v között vezető éllel. (Ezt a műveletet nevezzük az e és f élek **leemelésé**nek.) A keletkező G' gráfban indukció alapján létezik x és y pontok, amelyekre $\lambda(x, y; G') = d_{G'}(x)$. De ekkor $d_G(x) \geq \lambda(x, y; G) \geq \lambda(x, y; G') = d_{G'}(x) = d_G(x)$, amiből $d_G(x) = \lambda(x, y; G)$ következik. •

Megjegyezzük, hogy a 1.2.5 tételben azt már nem várhatjuk el, hogy az x, y szomszédos is legyen: legyen G tetszőleges s közepű csillag. Ha viszont nem minden él s-ből indul ki, akkor már x és y választható szomszédosnak (és s-től különbözőnek), hiszen kihagyhatjuk azon pontokat, amelyek csak s-sel szomszédosak, és akkor a max-vissza sorrendet s-sel kezdve az utolsó v_n pont és annak legnagyobb indexű v_i szomszédja jó lesz.

1.2.2 Ritka tanúk élösszefüggőségre

Egy gráf definíció szerint akkor összefüggő, ha bármely két pontja között vezet út. Hogyan tudunk valakit meggyőzni arról, hogy egy adott gráf összefüggő? Konkrétabban, milyen igazolványt, tanúsítványt (röviden: tanút) lehet egy gráf mellé letenni, amelyre rápillantva rögtön elhisszük, hogy a gráf összefüggő? Ilyen tanú természetesen, ha valamennyi pontpárra megadunk egy utat, amely a pár két tagját köti össze. Ez elvileg jó (:polinomiális méretű tanú), bár kissé terebélyes. Az $n(n-1)/2$ út helyett egyetlen feszítő fa éppúgy igazolja az összefüggőséget és csak $n-1$ élből áll.

Az általánosabb kérdés mármost az, hogy magasabb élösszefüggőség igazolására mennyire kicsiny (ritka) tanút tudunk találni. Adott 2-élösszefüggő gráf legkisebb 2-élösszefüggő részgráfját (azaz az abszolút legkisebb tanút) sajnos nem tudjuk polinom időben kiszámítani, mert ez a feladat tartalmazza a Hamilton kör problémát, így NP-teljes. (Hogyan tartalmazza?) Az alábbi 1.2.7 tétel szerint azonban a k-élösszefüggőségnek mindig létezik egy viszonylag kis méretű tanúja, nevezetesen egy olyan, amelyik legfeljebb $k(n-1)$ élből áll.

Legyen $G = (V, E)$ hurokmentes irányítatlan gráf. Válasszunk ki egymás után k maximális erdőt, azaz először vegyünk egy F_1 maximális erdőt (ami persze fa lesz, ha G összefüggő), hagyjuk el az éleit, majd a maradékból válasszunk ki egy F_2 maximális erdőt, hagyjuk el az éleit, stb., végül válasszuk ki a maradékból a maximális F_k erdőt. (Mindegyik erdő ponthalmaza a V lesz.) Jelölje a gráf X és $V - X$ részei között menő élek által alkotott vágást $B := [X, V - X]$.

Lemma 1.2.6 *Ha $E_k := F_1 \cup \ldots \cup F_k$ nem tartalmazza a B vágást, akkor mindegyik F_i tartalmaz élt B-ből.*

Biz. Tegyük fel, hogy E_k nem tartalmazza az $e = xy \in B$ élt. Mindegyik i-re az x és y pontok az F_i-nek ugyanahhoz a komponenséhez tartoznak, mert ha ez valamelyik F_i-re nem teljesülne, úgy i-t a legkisebb ilyen indexnek választva az e élt F_i-hez lehetne venni, ellentétben F_i maximalitásával. De ez azt jelenti, hogy az F_i-ben az x és y között vezető egyértelmű út használ élt B-ből, azaz mind a k darab F_i tartalmaz B-ből élt. •

TÉTEL 1.2.7 *Tetszőleges $G = (V, E)$ k-szor élösszefüggő gráf tartalmaz olyan $G_k = (V, E_k)$ k-élösszefüggő részgráfot, amelynek legfeljebb $k(n-1)$ éle van.*

Biz. A 1.2.6 lemmában szereplő $F_1, \ldots, F_k$ erdők E_k uniója jó lesz. Nyilván $|E_k|$ legfeljebb $k(n-1)$. Mivel G a feltevés szerint k-élösszefüggő, így minden vágása legalább k elemű, és ezért az 1.2.6 lemmából $G_k = (V, E_k)$-nak is minden vágásban legalább k éle van. •

Feladat 1.2.3 *Igazoljuk, hogy tetszőleges G irányítatlan gráf esetén az előbbi bizonyításban szereplő $G_k = (V, E_k)$ gráf olyan, hogy minden x, y pontpárjára $\lambda(x, y; G_k) \geq \min\{k, \lambda(x, y; G)\}$.*

Feladat 1.2.4 *Mutassuk meg, hogy az előbbi tételben a $k(n-1)$ helyett nem írhatunk kisebb számot.*

Gyakorlat 1.2.5 *Mutassuk meg, hogy a (V, E_k) gráfnak a legfeljebb $k-1$ élű vágásai pontosan ugyanazok, mint az eredeti G gráf legfeljebb $k-1$ élű vágásai.*

Az 1.2.6 lemmának még egy érdekes algoritmikus alkalmazása a következő. Tegyük fel, hogy egy G gráfot minimális számú új él hozzáadásával k-élösszefüggővé akarunk tenni. Ez a feladat a fentiek alapján ekvivalens azzal, hogy a legfeljebb $k(n-1)$ élű (V, E_k) gráfot tegyük k-élösszefüggővé. (Ugyanis a kiindulási G gráfnak és a fenti (V, E_k) részgráfnak a k-nál kevesebb élű vágásai az előbbi gyakorlat szerint ugyanazok. Márpedig a k-élösszefüggővé tevésnél csak ezek a vágások számítanak. A Válogatott fejezetek a komb.opt.-ban című előadásban tárgyaljuk Watanabe és Nakamura tételét, amely pontosan megmondja, hogy legkevesebb hány új él hozzáadásával lehet egy G gráfot k élösszefüggővé tenni.)

1.2.3 Ritka tanúk pontösszefüggőségre

Egy gráfot akkor hívunk k-**pontösszefüggő**nek, ha bármely két pontja között vezet k belsőleg pont-diszjunkt út. Kérdés, hogy a k-pontösszefüggőségnek létezik-e ritka tanúja. Legyen (A, B, Z) a V ponthalmaz olyan három részes partíciója, ahol A, B nem-üres, Z viszont lehet üres. Jelölje az A és B között vezető élek halmazát $\Delta_E(A, B)$, és legyen $d_E(A, B) := |\Delta_E(A, B)|$. Azt mondjuk, hogy a $(Z, \Delta_E(A, B))$ pár **vegyes vágás**t alkot, ahol Z a vegyes vágás pontjainak, $\Delta_E(A, B)$ pedig az éleinek a halmaza. A $|Z| + d_E(A, B)$ számot nevezzük a **vegyes vágás elemszám**ának. Menger tétele alapján könnyen látszik, hogy G akkor és csak akkor k-szor összefüggő, ha minden vegyes vágása legalább k elemű. Azt mondjuk, hogy a vegyes vágás **elválaszt** (szeparál) két pontot, ha az egyik pont A-ban a másik pedig B-ben van. Jelölje $\kappa(x, y; G)$ a G gráfban a két pontot elválasztó minimális vegyes vágás elemszámát. (Menger tétele alapján ez egyenlő az x és y között vezető belsőleg diszjunkt utak maximális számával. Könnyű látni, hogy ha x és y nem szomszédos, akkor $\kappa(x, y)$ az x-t és y-t összekötő utakat lefogó $V - \{x, y\}$-beli pontok minimális száma.)

Az 1.2.6 lemma pont-összefüggőségre vonatkozó ellenpárját szeretnénk megfogalmazni. Legyen $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráf. Lokális szélességi kereséssel válasszunk ki egy maximális F_1 erdőt és hagyjuk el G-ből az éleit, majd a maradékból ugyanígy egy F_2 maximális erdőt, stb. A kiválasztott erdőket $F_1, F_2, \ldots, F_k$-val jelöltük, és bevezettük az $E_k := F_1 \cup \ldots \cup F_k$, $G_k = (V, E_k)$ jelölést is.

TÉTEL 1.2.8 *Legyen x és y két olyan pontja a $G = (V, E)$ gráfnak, amely F_k-nak ugyanahhoz a komponenséhez tartozik. Ekkor $\kappa(x, y; G_k) \geq k$.*

Biz. k szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $k = 1$, akkor az állítás triviális. Feltehetjük, hogy G összefüggő, azaz F_1 (feszítő) fa. Legyen $k \geq 2$ és tekintsünk egy (A, B, Z) által definiált vegyes vágást, amelyre $x \in A, y \in B$. Az F_i-k konstrukciója miatt mindegyik F_i maximális, így az x, y pontok az F_i-nek ugyanahhoz a komponenséhez tartoznak ($i \leq k$). Legyen $G' := G - F_1$ és $J := F_2 \cup \ldots \cup F_k$.

Amennyiben F_1 tartalmazza $\Delta_{E_k}(A, B)$ egy elemét, úgy alkalmazzuk az indukciós feltevést a G'-re valamint az $F_2, \ldots, F_k$ erdőkre, k helyén $k-1$-gyel. Ennek alapján $|Z| + d_{E_k}(A, B) \geq |Z| + d_J(A, B) + 1 \geq (k-1) + 1 = k$ és így $\kappa(x, y; G_k) \geq k$.

Tegyük most fel, hogy F_1 nem tartalmazza $\Delta_{E_k}(A, B)$ egyik elemét sem. Az A és B nevének esetleges felcserélésével elérhetjük, hogy F_1-nek az r gyökere ne B-ben legyen. Legyen z_1 a $Z \cap V(C_1)$-nek az a pontja, amely F_1 építésekor a legkorábban került átvizsgálásra. (Ilyen z_1 azért van, mert F_1-ben nincs él A és B között. Nyilván, ha $r \in Z$, akkor $z_1 = r$). Mivel F_1 nem tartalmaz A-t és B-t összekötő élt, a lokális szélességi keresés szabálya és a z_1 választása miatt J-ben nincs él z_1 és B között. Ez azt jelenti, hogy $\Delta_J(A, B) = \Delta_J(A', B)$, ahol $A' := A + z_1$. Legyen $Z' := Z - z_1$ és alkalmazzuk az indukciós feltevést a G' gráfra, és az $F_2, \ldots, F_k$ erdőkre. Ennek alapján $|Z| + d_{E_k}(A, B) = 1 + |Z'| + d_J(A, B) = 1 + |Z'| + d_J(A', B) \geq 1 + (k-1) = k$. •

Gyakorlat 1.2.6 Példával mutassuk meg, hogy nem érvényes a következő: *Legyen x és y két olyan pont, amely F_k-nak ugyanahhoz a komponenséhez tartozik. Ekkor az $F_1, \ldots, F_k$ erdők által meghatározott k darab x és y közötti út belsőleg pontdiszjunkt.*

Következmény 1.2.9 *Amennyiben E_k nem tartalmazza a $(Z, \Delta_E(A, B))$ vegyes vágás minden élét, úgy $|Z| + d_{E_k}(A, B) \geq k$, azaz a $(Z, \Delta_{E_k}(A, B))$ vegyes vágásnak legalább k eleme van.*

Biz. Legyen $e = xy$ egy nem tartalmazott él. Az F_k maximalitása folytán x és y az F_k-nak ugyanahhoz a komponenséhez tartozik, így az 1.2.8 tételből a következmény adódik. •

Az 1.2.9 következmény segítségével kapjuk az alábbi k-összefüggőséget igazoló ritka tanút.

TÉTEL 1.2.10 (W. Mader) *Minden $G = (V, E)$ k-összefüggő gráf tartalmaz egy $G_k = (V, E_k)$ k-összefüggő részgráfot, amelyre $|E_k| \leq (k-1)k/2 + (n-k)k$, ahol $n = |V|$.*

Biz. Feltehető, hogy G egyszerű. Tekintsük az 1.2.8 tétel előtt definiált $F_1, F_2, \ldots, F_k$ maximális lokális BFS erdőket és legyen $E_k := F_1 \cup \ldots \cup F_k$. Az 1.2.9 következmény alapján $G_k = (V, E_k)$ k-szor összefüggő. Jelölje s_i az F_i erdő legelső olyan gyökérpontját, amelyből indul ki F_i-nek éle. A lokális BFS szabálya szerint ha $j > i$, akkor F_j nem tartalmaz az s_i-vel szomszédos élt, és ezért F_j-nek legfeljebb $n - j$ éle lehet, vagyis $|E_k| \leq (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-k) = (k-1)k/2 + (n-k)k$ éle van. •

Feladat 1.2.7 *Minden $G = (V, E)$ k-összefüggő páros gráf tartalmaz egy $G' = (V, E')$ k-összefüggő részgráfot, amelyre $|E'| \leq k(n - k)$. Érvényes-e ugyanez háromszög-mentes k-összefüggő gráfokra? Mutassuk meg, hogy a korlát éles!*

Feladat 1.2.8 *Tetszőleges G esetén a fent definiált G_k olyan, hogy $\kappa(x, y; G_k) \geq \min\{k, \kappa(x, y; G)\}$ fennáll minden x, y pontpárra.*

Érvényes a 1.2.2 tétel ellenpárja is.

TÉTEL 1.2.11 *Minden legalább kétpontú egyszerű gráfnak van két olyan x, y pontja, amelyekre $\kappa(x, y) = d(x)$, éspedig egy max-vissza sorrend utolsó két pontja, $y = v_{n-1}$ és $x = v_n$, ilyen.*

Biz. Legyen $k := d(v_n)$ és tekintsük a sorrendhez tartozó $F_1, \ldots, F_k$ erdőket. A $G_k = (V, E_k)$ gráfban (ahol $E_k := F_1 \cup \ldots \cup F_k$) a 1.2.9 következmény szerint az utolsó két pont mindegyik erdőben egy komponenshez tartozik, ezért $\kappa(x, y) \geq k$. Mivel $\kappa(x, y) \leq k$ triviálisan fennáll, az egyenlőség következik. •

Feladat 1.2.9 *Igazoljuk, hogy a* 1.2.11 *tételben x és y választható szomszédosnak is.* (Ezt is Mader bizonyította).

Következmény 1.2.12 *Legyen a G gráfnak legalább két pontja. Ha G élelhagyásra nézve minimális k-élösszefüggő vagy k-pontösszefüggő, akkor létezik k fokú pontja.*

Biz. Egy max-vissza sorrend utolsó pontja mindkét esetben jó lesz. Valóban, a feltevés miatt minden pont foka legalább k. Ha most indirekt v_n foka k-nál nagyobb lenne, akkor a v_n-ben végződő utolsó e él (azaz a lehető legnagyobb indexű ponthoz vezető él) nem tartozna F_k-hoz, márpedig korábban láttuk, hogy $(V, F_1 \cup \ldots \cup F_k)$ k-összefüggő (k-élösszefüggő), ha a kiindulási G az, ami viszont ellentmondásban volna a gráf minimalitására tett feltevéssel, hiszen ezek szerint $G - e$ is k-összefüggő (k-élösszefüggő). •

Nem ismeretes az élösszefüggőség meghatározására szolgáló Nagamochi-Ibaraki algoritmushoz hasonló olyan eljárás, amely a gráf pont-összefüggőségét határozza meg.

1.2.4 Merevkörű gráfok

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot akkor nevezünk **merevkörű**nek (chordal), ha minden legalább 4 élű körében van húr. (Egy xy élt akkor mondunk egy C kör vagy út húrjának, ha x és y nem követi egymást a C mentén.)

Feladat 1.2.10 *Igazoljuk, hogy egy intervallum rendszer metszetgráfja merevkörű. Mutassunk olyan merevkörű gráfot, amely nem áll elő ilyen alakban.* (A metszetgráfban minden intervallumnak megfelel egy pont és kettőt akkor kötünk össze, ha az általuk reprezentált intervallumok metszik egymást.)

Egy gráf pontjainak valamely sorrendjét nevezzük **szimpliciális**nak, ha minden pont és a sorrendben utána következő gráfbeli szomszédjai klikket (teljes részgráfot) alkotnak. A gráf egy pontját **szimpliciális**nak nevezzük, ha gráfbeli szomszédai klikket alkotnak.

Feladat 1.2.11 *Igazoljuk, hogy ha egy gráf pontjainak van szimpliciális sorrendje, akkor merevkörű.*

TÉTEL 1.2.13 (G. Dirac) *G akkor és csak akkor merevkörű, ha a pontjainak létezik szimpliciális sorrendje.*

A nem-triviális irány, vagyis a szimpliciális sorrend létezése következik az alábbiból.

TÉTEL 1.2.14 (Yannakakis és Tarjan) *Merevkörű gráf max-vissza sorrendje fordított szimpliciális sorrend.*

Biz. Mivel merevkörű gráf feszített részgráfja is merevkörű, elég azt bebizonyítani, hogy egy $v_1, \ldots, v_n$ max-vissza sorrend utolsó pontja szimpliciális. Feltehetjük, hogy G egyszerű. Legyen v_i a v_n akármelyik szomszédja és jelölje α a v_n azon szomszédainak számát, melyek a fenti sorrendben (szigorúan) megelőzik v_i-t. Jelölje G_{in} a $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n$ pontok által feszített részgráfot. Tudjuk, hogy $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n$ a G_{in}-nek max-vissza sorrendje. Ezért a 1.2.11 tétel alapján $\kappa(v_n, v_i; G_{in}) = d(v_n, V_i) = \alpha + 1$, ahol $V_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$. A Menger tétel szerint létezik a G_{in} gráfban $\alpha+1$ belsőleg diszjunkt út v_n és v_i között. Válasszuk ezeket a legrövidebbnek abban az értelemben, hogy húrmentesek legyenek. Mivel G merevkörű, a $v_n v_i$ él jelenléte miatt ezen utak mind legfeljebb 2 élűek, ami azt jelenti, hogy v_i szomszédos a v_n minden olyan v_h szomszédjával, amelyre $h < i$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy v_n bármely két szomszédja egymással is szomszédos, azaz v_n szimpliciális.
•

Feladat 1.2.12 *Adjunk direkt bizonyítást a* 1.2.14 *tételre.*

A fentiek alapján egy merevkörű gráf pontjainak szimpliciális sorrendjét lineáris időben meg lehet határozni. A szimpliciális sorrend pedig arra jó, hogy segítségével polinom időben ki lehet számítani egy pont-súlyozott merevkörű gráf maximális súlyú klikkjét, illetve stabil részhalmazát. (Lásd a kétfázisú mohó algoritmusokról szóló fejezet végét).

Feladat 1.2.13 *Legyen F fa és $F_1, F_2, \dots, F_n$ az F részfáinak egy rendszere. Legyen G olyan n pontú egyszerű gráf, amelynek pontjai az F_i részfáknak felelnek meg, és amelyben két pont akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő részfáknak van közös pontja. Igazoljuk, hogy az így kapott gráf merevkörű, továbbá hogy minden merevkörű gráf megkapható ilyen alakban.*

1.3 Szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálása

Nagamochi és Ibaraki algoritmusának segítségével minimalizálni tudjuk a $d_G(X)$ halmazfüggvényt a V valódi nemüres részhalmazai felett, ahol $d_G(X)$ egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban az X és $V - X$ közötti élek számát jelöli.

Legyen most b szimmetrikus, nemnegatív, szubmoduláris függvény a V részhalmazain. Nyilván d_G ilyen. M. Queyranne (ejtsd: Ké-ránn) megmutatta, hogy az NI algoritmus kiterjeszthető $b(X)$ minimumának meghatározására, ahol $\emptyset \subset X \subset V$. Ennek segítségével például egy hipergráf minimális vágását meg tudjuk határozni. Vagy egy tetszőleges $b_1 \geq 0$ szubmoduláris függvényről el tudjuk dönteni, hogy létezik-e a V alaphalmaznak olyan $\{X, Y\}$ partíciója, amelyre $X = \emptyset, Y = \emptyset$ és $b_1(X) + b_1(Y) = b_1(V)$: ehhez csupán minimalizálnunk kell a $b(X) := b_1(X) + b_1(V - X)$ szimmetrikus szubmodulárist függvényt. A minimum a b szubmodularitása miatt mindig legalább $b_1(V)$, tehát a kívánt partíció akkor létezik, ha a minimum pontosan $b_1(V)$. Abban a speciális esetben, amikor b_1 egy matroid rangfüggvénye, ez a feladat a matroid összefüggőségének eldöntésével ekvivalens.

Bár az algoritmus alig több mint az NI algoritmus kopírozása, helyességének Queyranne féle bizonyítása meglehetősen nehézkes. Szerencsére R. Rizzi igen egyszerű bizonyítást talált és most az ő megközelítését ismertetjük.

Tetszőleges b halmazfüggvényhez elkészíthetjük a diszjunkt X, Y halmazokon értelmezett $d(X, Y) := d_b(X, Y) := b(X) + b(Y) - b(X \cup Y)$ függvényt. Figyeljük meg, hogy amennyiben $b(X) = d_G(X)$, úgy $d_b(X, Y)$ nem más, mint az X és Y között vezető élek számának kétszerese. Ez motiválja az alábbi definíciót. A V elemeinek egy $v_1, \ldots v_n$ sorrendjét **max-vissza** sorrendnek nevezünk, ha

$$d(v_i, V_{i-1}) \geq d(v_j, V_{i-1}) \tag{1.6}$$

fennáll minden $\{i, j\}$ párra $(2 \leq i < j \leq n)$, ahol $V_j := \{v_1, \ldots, v_j\}$. Figyeljük meg, hogy a $b := d_G$ speciális esetben ez a definíció egybeesik a gráfoknál már megismert max-vissza sorrend definíciójával. Azt fogjuk mondani, hogy az X halmaz **elválasztja** az u és v pontokat, ha pontosan az egyiküket tartalmazza.

Lemma 1.3.1 *Amennyiben A, B, X páronként diszjunkt részhalmazai V-nek, úgy*

$$d(A, X) \geq d(B, X) \text{ esetén } d(A, X \cup B) \geq d(B, X \cup A). \tag{1.7}$$

Biz. A $d(X, Y)$ definícióját felhasználva kapjuk, hogy $d(A, X \cup B) + d(B, X) = [b(A) + b(X \cup B) - b(A \cup X \cup B)] + [b(B) + b(X) - b(B \cup X)] = b(A) + b(B) + b(X) - b(A \cup X \cup B)$. Ha a jobb oldalon A és B szerepét felcseréljük, akkor persze ugyanazt kapjuk, így $d(A, X \cup B) + d(B, X) = d(B, X \cup A) + d(A, X)$, amiből (1.7) következik. (A lemmához nem kellett feltenni b szubmodularitását!) •

Lemma 1.3.2 *Amenyiben b szubmoduláris, úgy d mindkét változójában monoton növő, azaz*

$$X' \supseteq X \text{ esetén } d(X', Y) \geq d(X, Y) \tag{1.8}$$

és

$$Y' \supseteq Y \text{ esetén } d(X, Y') \geq d(X, Y). \tag{1.9}$$

Biz. Szimmetria miatt elég az első tulajdonságot belátni. $d(X', Y) - d(X, Y) = [b(X') + b(Y) - b(X' \cup Y)] - [b(X) + b(Y) - b(X \cup Y)] = [b(X') + b(X \cup Y)] - [b(X) + b(X' \cup Y)] = [b(X') + b(X \cup Y)] - [b(X' \cap (X \cup Y)) + b(X' \cup (X \cup Y))] \geq 0$. •

TÉTEL 1.3.3 (M. Queyranne) *Ha $v_1, \ldots, v_n$ max-vissza sorrend a b szimmetrikus szubmoduláris függvényre nézve $(n \geq 2)$, akkor $b(v_n) = \min(b(X) : |X \cap \{v_n, v_{n-1}\}| = 1)$.*

Biz. n szerinti indukció. A tétel semmitmondó, ha $n \leq 2$. Ha $n = 3$, akkor $d(v_2, v_1) \geq d(v_3, v_1)$ miatt $b(v_1) + b(v_2) - b(\{v_1, v_2\}) \geq b(v_1) + b(v_3) - b(\{v_1, v_3\})$. Ebből és b szimmetriájából kapjuk, hogy $b(\{v_1, v_3\}) - b(v_3) = b(v_2) - b(\{v_1, v_2\}) \geq b(v_3) - b(\{v_1, v_3\})$, azaz $b(v_3) \leq b(\{v_1, v_3\})$,

Tegyük most fel, hogy $n \geq 4$. Az alaphalmaz két pontjának azonosításakor a b-ből keletkező b' halmazfüggvényt a természetes módon definiáljuk: $b'(X') := b(X)$, ahol X az X' ősképe. Ez nyilván szimmetrikus lesz és szubmoduláris. Jelölje v_{ij} a v_i és v_j azonosításával keletkező pontot és b_{ij} a hozzájuk tartozó függvényt. Legyen $d_{ij} := d_{b_{ij}}$.

Állítjuk, hogy a $v_{12}, v_3, \ldots, v_n$ sorrend max-vissza b_{12}-re nézve. Ehhez csak azt kell látni, hogy $d_{12}(v_3, v_{12}) \geq d_{12}(v_i, v_{12})$ minden $i = 3, \ldots, n$-re. Kihasználva a definíciót és a max-vissza tulajdonságot, kapjuk, hogy $d_{12}(v_3, v_{12}) = d(v_3, V_2) \geq d(v_i, V_2) = d_{12}(v_i, v_{12})$.

Állítjuk, hogy a $v_1, v_{23}, v_4, \ldots, v_n$ sorrend max-vissza a b_{23} függvényre nézve. Valóban, $d_{23}(v_{23}, v_1) = d(\{v_2, v_3\}, v_1) \geq d(v_2, v_1) \geq d(v_i, v_1) = d_{23}(v_i, v_1)$. Itt az első egyenlőtlenség a d monotonitása miatt, a második pedig a max-vissza tulajdonság miatt érvényes.

Állítjuk, hogy a $v_2, v_{13}, v_4, \ldots, v_n$ sorrend max-vissza a b_{13} függvényre nézve. Valóban, $d(v_2, v_1) \geq d(v_3, v_1)$ és így (1.7)-t, a max-vissza tulajdonságot, majd a monotonitást használva $i \geq 4$-re kapjuk, hogy $d(v_2, \{v_1, v_3\}) \geq d(v_3, \{v_1, v_2\}) \geq d(v_i, \{v_1, v_2\}) \geq d(v_i, v_2)$. Ebből $d_{13}(v_{13}, v_2) = d(\{v_1, v_3\}, v_2) \geq d(v_i, v_2) = d_{13}(v_i, v_2)$.

Tetszőleges $X \subset V$ halmazra a v_1, v_2, v_3 pontok között van kettő olyan, amelyet X nem választ el. Legyen X olyan v_n-t és v_{n-1}-t elválasztó halmaz, amelyre $b(X)$ minimális. Legyen $1 \leq i < j \leq 3$ olyan, hogy X nem választja el v_i-t és v_j-t. Jelölje X' az X képét a v_i és v_j pontok azonosításakor. A fenti három állítás nyomán v_{n-1} és v_n egy b_{ij}-re nézve max-vissza sorrend utolsó két pontja, és így indukció alapján kapjuk, hogy $b(X) = b_{ij}(X') = b_{ij}(v_n) = b(v_n)$. •

A tétel alapján az algoritmus pontosan ugyanúgy működik, mint a Nagamochi-Ibaraki algoritmus. Először meghatározunk egy max-vissza sorrendet. Ennek utolsó pontját feltesszük egy lista első helyére, majd az utolsó két pontot azonosítjuk és iteráljuk az eljárást $n-1$-szer. A listára került $n-1$ pont mindegyike a V egy részhalmazának felel meg, ezek közül kiválasztjuk azt, amelynek b-értéke a legkisebb.

Megjegyzés. A bizonyításban csak azt használtuk ki, hogy a $d(X, Y)$ függvény a két változójában szimmetrikus, monoton növő és teljesíti (1.7)-t. Ez azt jelenti, hogy ha egy ilyen kétváltozós d függvényből indulunk ki és definiáljuk a $b_d(X) := d(X, V - X)$ halmazfüggvényt, akkor ezt is tudjuk minimalizálni, bár egy ilyen halmazfüggvény nem feltétlenül szubmoduláris. Például, ha $r(u, v)$ $(u, v \in V)$ nemnegatív, szimmetrikus (azaz $r(u, v) = r(v, u)$) függvény, akkor $d(X, Y) := \max\{r(u, v) : u \in X, v \in Y\}$ szimmetrikus, monoton növő, és teljesíti (1.7)-t, de az $R(X)$ halmazfüggvény nem feltétlenül szubmoduláris.

Gyakorlat 1.3.1 *Igazoljuk, hogy egy b halmazfüggvény akkor és csak akkor szubmoduláris, ha d_b monoton növő.*

Fejezet 2

ÁRAMOK ÉS FOLYAMOK

Jelöljön $D = (V, E)$ egy irányított gráfot. Tetszőleges $x : E \to R_+$ vektorra és $S \subseteq V$ halmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$.

D-ben adott egy s forráspont és egy t nyelőpont úgy, hogy s-be nem lép be él és t-ből nem lép ki él. **Folyamon** egy olyan nemnegatív $x : E \to R_+$ vektort értünk, amely minden, s-től és t-től különböző pontra teljesíti a **megmaradási szabály**t (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra. Amennyiben még az $x \leq g$ feltétel is teljesül, **megengedett folyamról** beszélünk. Egy s-t tartalmazó, de t-t nem tartalmazó X halmazt nevezzünk $s\bar{t}$-halmaznak.

Tetszőleges S $s\bar{t}$-halmaz és x folyam esetén $\delta_x(S) - \varrho_x(S) = \sum(\delta_x(v) - \varrho_x(v) : v \in S) = \delta_x(s) - \varrho_x(s) = \delta_x(s)$. Vagyis minden S $s\bar{t}$-halmazra a $\delta_x(S) - \varrho_x(S)$ értékkel definiált **tiszta kiáramlás** független S választásától. Ezt a közös, $\delta_x(s)$-sel (és $\varrho_x(t)$-vel) egyenlő értéket nevezzük az x folyam **nagyságának.** Az $x(uv)$ szám a folyam **értéke** az $uv \in A$ élen. Az x folyamot **út-folyamnak** (**kör-folyamnak)** nevezzük, ha x csak egy s-ből t-be vezető út (irányított kör) mentén pozitív.

Gyakorlat 2.0.2 *Igazoljuk, hogy minden nem-negatív folyam kör- és út-folyamok nem-negatív kombinációja.*

Alapvető a következő Fordtól és Fulkersontól származó tétel.

TÉTEL 2.0.4 *Akkor és csak akkor létezik k nagyságú megengedett folyam, ha minden S $s\bar{t}$-halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, g egészértékű, k pedig egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.*

A tételt néha az alábbi ekvivalens alakban említik. (Az MFMC elnevezés az angol Max-flow Min-cut rövidítése.)

TÉTEL 2.0.5 (MFMC) *A megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha g egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.*

Az MFMC tételt először racionális g kapacitás függvényre igazoljuk a Ford-Fulkerson növelő utas algoritmus segítségével.

2.1 A NÖVELŐ UTAK MÓDSZERE

Legyen x megengedett folyam. Ekkor tetszőleges S $s\bar{t}$-halmaz esetén ax x folyam nagyságára érvényes az alábbi becslés. $\delta_x(s) = \delta_x(s) - \varrho_x(s) = \sum[\delta_x(v) - \varrho_x(v) : v \in S] = \delta_x(S) - \varrho_x(S) \leq \delta_g(S)$. Ebből adódik, hogy az 2.0.4 tételben a feltétel szükségessége illetve az 2.0.5 tételben max $\leq$ min egyenlőtlenség.

Az is megállapíthaó, hogy egy x folyam bizonyosan maximális nagyságú, amennyiben létezik egy olyan S $s\bar{t}$-halmaz, amelyre teljesülnek az alábbi **optimalitási feltételek**.

(a) $x(a) = g(a)$ minden a élre, amely kilép S-ből, és
(b) $x(a) = 0$ minden a élre, amely belép S-be.

Jelen célunk egy ilyen x folyam és S halmaz algoritmikus megkeresése. Ezt először csak egészértékű (illetve racionális) g kapacitás függvény esetén tesszük meg, majd tetszőleges g-re.

A Fordtól és Fulkersontól származó algoritmus tetszőleges x megengedett st-folyamból indul ki (például $x \equiv 0$), és azt iteratívan javítja. Készítsünk el egy $D_x = (V, A_x)$ digráfot a következőképp. Egy uv él A_x-hez tartozik, ha vagy (i) $uv \in A$ és $x(uv) < g(uv)$, és ekkor ezen élét D_x-nek **előre** élnek hívjuk, vagy (ii) $vu \in A$ és $x(vu) > 0$, és ekkor uv neve **hátra** él. Jelölje S az s-ből D_x-ben irányított úton elérhető pontok halmazát.

1. eset *$t \notin S$, azaz t nem érhető el s-ből.* Mivel D_x semelyik éle sem lép ki S-ből, ezért D-ben minden S-ből kilépő él telített (azaz $x(uv) = g(uv)$) és minden S-be belépő uv élen $x(uv) = 0$. Vagyis az (a) és (b) optimalitási feltételek teljesülnek és az algoritmus végetér: az adott x folyam nagysága egyenlő $\delta_g(S)$-sel.

2. eset *$t \in S$, azaz t elérhető s-ből.* Legyen P tetszőleges s-ből t-be vezető irányított út D_x-ben.

Legyen $\Delta_1 := \min\{g(uv) - x(uv) : uv \text{ előre éle } P\text{-nek}\}$ és $\Delta_2 = \min\{x(v,u) : uv \text{ hátra éle } P\text{-nek}\}$. Legyen $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$. Ekkor Δ pozitív. Nevezzük P egy élét **kritikusnak**, ha Δ ezen az élen éretik el.

Módosítsuk x-t a következőképp. Ha uv előre éle P-nek, úgy a D uv élén növeljük $x(uv)$-t Δ-val. Ha uv hátra éle P-nek, úgy a D vu élén csökkentsük $x(vu)$-t Δ-val. Könnyen látható, hogy a módosított x' megengedett folyam lesz, amelynek nagysága Δ-val nagyobb, mint x-é. Következésképp, ha g egészértékű, akkor a 2. eset csak véges sokszor fordulhat elő, vagyis véges sok növelés után az 1. eset következik be, amikor is az algoritmus véget ér. Tehát egész kapacitások esetén az MFMC tétel bizonyítást nyert.

Amennyiben g racionális, a nevezők legkisebb közös többszörösével a kapacitásokat végigszorozva visszajutunk az egész kapacitású esethez. $\bullet$

Megjegyzendő, hogy ha g irracionális, akkor a fenti eljárás nem biztosan ér véget véges sok lépésben (amint az példával demonstrálható). Másik hátrány, hogy még egész kapacitások esetén is az iterációk száma arányos lehet az előforduló legnagyobb kapacitás nagyságával. Így az algoritmus bonyolultsága az input méretének exponenciális függvényével arányos, azaz nem polinomiális. (Egy szám nagysága a jegyei számának exponenciális függvénye.)

2.1.1 Skálázási technika

Az alábbiakban bemutatunk egy ügyes fogást, amelynek segítségével bizonyos eljárásokat polinomiális futásidejűvé lehet tenni. Használatát a maximális folyam problémán szemléltetjük, mert ott igen egyszerű, de számos alkalommal bonyolultabb körülmények között is használható.

Tételezzük fel, hogy a kapacitások egész számok és kettes számrendszerben vannak megadva. A legnagyobb kapacitás álljon M jegyből. Összesen M darab folyam problémát fogunk megoldani, mindegyikben a megelőzően megkapott maximális folyamot használjuk kiindulási folyamként. Jelölje g_i azt a kapcitás függvényt, amely úgy áll elő, hogy minden élen az eredeti kapacitásnak (balról) az első i jegyét tekintjük, míg a többit eltöröljük. Tegyük fel, hogy a g_i kapacitás függvényre nézve már meghatároztuk az x_i maximális folyamot. Ekkor $2x_i$ megengedett folyam a g_{i+1}-re nézve. A $2x_i$-ből kiindulva alkalmazzuk a fent leírt növelő út módszert a g_{i+1} kapacitás függvényre vonatkozólag.

Miután minden e élre $g_{i+1}(e)$ értéke vagy $2g_i(e)$ vagy $2g_i(e)+1$, legfeljebb élszámnyi növelés után megkapjuk az x_{i+1} maximális folyamot (a g_{i+1}-re nézve). Összesen tehát legfeljebb $M|A|$ növelés segítségével megkonstruáltunk egy eredeti kapacitásokra vonatkozó maximális folyamot.

2.1.2 Legrövidebb növelő utak

A fenti eljárás hátránya, hogy csak egész (és így racionális) kapacitásokra működik. Ezen nehézség leküzdésére J. Edmonds and R. Karp [1972] és E.A. Dinitz [1970] javasolták, hogy minden iterációban a legkisebb élszámú növelő utat válasszuk. Ez az egyszerű megszorítás lehetővé teszi, hogy a Ford-Fulkerson algoritmus bonyolultságát $|V|$ és $|A|$ polinomjával korlátozzuk, függetlenül a kapacitások nagyságától. (Ezt persze úgy értve, hogy a számokkal végzett alapműveleteket egyetlen lépésnek tekintjük.)

TÉTEL 2.1.1 *Ha a Ford-Fulkerson féle növelő utas algoritmusban mindig a legrövidebb növelő utat használjuk, úgy az eljárás tetszőleges g kapacitás függvény esetén legfeljebb $O(|V||A|)$ növelés után véget ér.*

Biz. Jelölje $\sigma_x(v)$ a v távolságát D_x-ben s-től. (Ha nincs egyáltalán s-ből v-be út, akkor $\sigma_x(v) = \infty$). Legyen P egy legrövidebb út D_x-ben s-ből t-be. Ekkor P mindegyik uv élére, $\sigma_x(v) = \sigma_x(u) + 1$.

Lemma 2.1.2 *Amikor P mentén végrehajtunk egy növelést, a $\sigma_x(v)$ érték semmilyen v-re sem csökken.*

Biz. Nézzük meg milyen hatással van a növelés a D_x segédgráfra. Mivel a folyamot D-nek csak olyan élein változtattuk, melyek P éleinek felelnek meg, D_x csupán P éleinél változhat. Éspedig, D'_x lehetséges új élei P élei megfordítva, ugyanakkor P kritikus élei (ahol Δ felvétetik) eltűnnek D_x-ből. A v pont s-től való távolsága csak akkor csökkenhetne, ha olyan uw éleket adnánk a segédgráfhoz, melyekre $\sigma_x(w) > \sigma_x(u) + 1$, amiből a lemma következik. $\bullet$

A növelések sorozatát fázisokra bontjuk. Egy fázis során $\sigma_x(t)$ ugyanaz marad. A lemma szerint legfeljebb $|V| - 1$ fázis lehetséges.

Lemma 2.1.3 *Egy fázison belül legfeljebb $|A|$ növelésre kerülhet sor.*

Biz. Jelölje $\sigma_i(v)$ a v pont távolságát s-től az i fázis kezdetén az aktuális segédgráfban. Nevezzünk egy uv élt **i-szorosnak**, ha $\sigma_i(v) = \sigma_i(u) + 1$. Az i-dik fázis során csupán i-szoros éleket használunk. Tudjuk, hogy egy növelés legalább egy i-szoros élt eltüntet az aktuális segédgráfból és nem hoz be új i-szoros élt. Mivel a segédgráfnak legfeljebb $|A|$ darab i-szoros éle van, a lemma következik. •

Mindezeket összetéve kapjuk, hogy legfeljebb $|V||A|$ növelésre van szükségünk. • •

Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy az Edmonds-Karp és Dinitz féle algoritmus össz-bonyolultsága $O(|V||A|^2)$, hiszen egyetlen növelés $O(|A|)$ lépést igényel.

Miután a fenti algoritmus futása során a rendelkezésre álló legrövidebb növelő utak közül bármelyiket választhatjuk, a végül kapott maximális folyam függ ezen választásoktól. Nem így a végső S!

Feladat 2.1.1 (a) *A végül kapott minimális $\delta^+(S)$ vágás független az algoritmus futásától.* (b) *Ha X és Y minimalizálja az $\delta_g(Z)$ értéket az összes $s\bar{t}$-halmazra, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is minimalizáló $s\bar{t}$-halmazok.* (c) *A minimalizáló halmazok metszete S.*

Feladat 2.1.2 *Adott e élre hogyan lehet eldönteni, hogy* (a) *létezik-e olyan maximális folyam, amely telíti e-t,* (b) *minden maximális folyam telíti e-t.*

Feladat 2.1.3 *Algoritmikusan határozzuk meg az összes $\{x, y\}$ rendezett csúcspárt, amelyre létezik olyan X halmaz, hogy $s, x \in X, y \in V - X$ és X minimális vágást határoz meg.*

Feladat 2.1.4 *Adott két kapacitás függvény esetén algoritmikusan döntsük el, hogy létezik-e olyan S $s\bar{t}$-halmaz, amely miondkét kapacitás-függvényre nézve minimális vágást határoz meg.*

Feladat 2.1.5 *Adott c_1 és c_2 kapacitás függvények esetén keressünk olyan c_1-re nézve minimális $s\bar{t}$-vágást, amely a c_2-re nézve a lehető legkisebb.*

Feladat 2.1.6 *Készítsünk algoritmust, amely adott költségfüggvényre eldönti, hogy létezik-e k élidegen út s-ből t-be, melyek mindegyike minimális költségű.*

Feladat 2.1.7 *Digráfban keressünk két diszjunkt halmazt, melyek egyike $s\bar{t}$-halmaz, másika $t\bar{s}$-halmaz, úgy hogy befok összegük minimális.*

2.1.3 Kombinatorikus alkalmazások

Ismert, hogy az MFMC tételből könnyen levezethető a Menger tételnek az irányított él- és pontváltozata is. Hasznos megfogalmazni ezeknek az alábbi közös általánosítását.

TÉTEL 2.1.4 (Menger: vegyes pont-él változat) *Legyen $D = (V, A)$ digráf és legyenek k, l pozitív egészek. Akkor és csak akkor létezik D-ben kl élidegen út s-ből t-be úgy, hogy minden csúcson legfeljebb l darab út halad keresztül, ha bárhogy kihagyva egy $X \subseteq V - \{s, t\}$ halmazt $(0 \leq |X| \leq k - 1)$, a maradékban minden $s\bar{t}$-halmazból legalább $(k - |X|)l$ él lép ki.*

Biz. Ha létezik a kívánt útrendszer, akkor ennek legfeljebb $l|X|$ tagja használhat X-beli pontot, tehát a maradék $(k - |X|)l$ darab út $D - X$-ben halad, és ezért $D - X$ minden $s\bar{t}$-halmazból halmazából legalább $(k - |X|)l$ él kilép, vagyis a feltétel szükséges.

Az elegendőség igazolásához feltehetjük, hogy s-be nem lép be él és t-ből nem lép ki. Használjuk a szokásos pont széthúzós technikát, azaz minden $v \in V$ csúcsot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön v' és v''. Vezessünk l párhuzamos élt v'-ből v''-be, törljük s'-t és t''-t, végül minden $uv \in A$ élre vezessünk egy élt u''-ből v'-be. Az így keletkező $D' = (V', A')$ digráfban legyen a g kapacitás függvény azonosan 1. A tétel feltételéből adódik, hogy minden $S' \subseteq V'$ $s''\bar{t}'$-halmazra $\delta'_g(S) \geq kl$. Ezért az MFMC tétel miatt létezik kl nagyságú folyam, amely egészértékű. Ez a folyam felbomlik körfolyamokra és kl útfolyamra, amely az eredeti D digráfban a konstrukció miatt kl élidegen útnak felel meg úgy, hogy minden csúcson legfeljebb l halad keresztül. •

Figyeljük meg, hogy az $l = 1$ speciális esetben az irányított Menger tétel pontidegen változatát kapjuk k darab belsőleg pontidegen st út létezéséről, míg a $k = 1$ esetben az élidegen változatot l darab élidegen st út létezéséről. (Mivel ilyenkor összesen l élidegen utat keresünk, az a kívánság, hogy minden csúcson legfeljebb csak l haladhat keresztül automatikusan teljesül, így kihagyható.)

TÉTEL 2.1.5 (Egawa, Kaneko, Matsumoto) *Egy $D = (V, A)$ digráf élei akkor és csak akkor színezhetők ki úgy l színnel, hogy mindegyik színben létezzék k belsőleg pontidegen út s-ből t-be, ha bárhogyan kihagyva egy $X \subseteq V - \{s, t\}$ halmazt $(0 \leq |X| \leq k - 1)$, a maradékban minden $s\bar{t}$-halmazból legalább $(k - |X|)l$ él lép ki.*

Biz. Mivel a feltétel ugyanaz, mint a 2.1.4 tételben szereplő feltétel, így csak azt kell igazolnunk, hogy az élek megkívánt tulajdonságú l-színezése pontosan akkor létezik, ha létezik kl élidegen st-út úgy, hogy minden csúcson legfeljebb k út halad keresztül. Mindenesetre az l-színezés létezése rögtön maga után vonja a kl élidegen út létezését, így csak a fordított iránnyal kell törődnünk.

Tekintsük tehát a 2.1.4 tétel által biztosított kl élidegen utat. Feltehető, hogy a digráfban nincs is más él, mert azokat kitörölhetjük. Ekkor minden $v \in V - \{s,t\}$ pont befoka megegyezik a kifokával (és legfeljebb l), továbbá s-ből kl él lép ki és t-be kl él lép be.

Készítsük el a következő páros gráfot. Minden $v \in V - \{s,t\}$ csúcsot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön v' és v''. között. Az s pontot helyettesítsük az $s'_1,\dots,s'_k$ új pontokkal, míg t-t a $t''_1,\dots,t''_k$ pontokkal. Vezessünk $l-\varrho(v) = l-\delta(v)$ párhuzamos élt v' és v'' között. Minden uv élre vezessünk uv egy élt u' és v'' között. Végül az s-ből kifutó kl darab élt osszuk k darab l-es csoportba tetszőlegesen és az i-dik csoportban lévő l darab sv él mindegyikére kössük össze s_i-t v'-vel. Analóg módon a t-be befutó kl élt osszuk k darab l-es csoportba tetszőlegesen és az i-dik csoportban lévő l darab ut él mindegyikére kössük össze u''-t és t_i-t. A keletkező páros gráf minden csúcsa l-ed fokú lesz. Így Kőnig élszínezési tétele miatt ennek éle felbonthatók l darab teljes párosításra. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy teljes párosítás éleinek megfelelő élhalmaz az eredeti digráfban k belsőleg pontidegen utat definiál s-ből t-be. •

TÉTEL 2.1.6 (Folkman és Fulkerson) *Egy $G = (S,T;E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik l darab élidegen k élű párosítás, ha*

$$i(Z) \ge l(k + |Z| - |U|) \tag{2.1}$$

fennáll $U := S \cup T$ minden Z részhalmazára, ahol $i(Z)$ jelöli a Z által feszített élek számát.

Biz. Mivel egy M párosítás legfeljebb $|U|-|Z|$ olyan élt tartalmaz, amelynek legalább egyik végpontja nincs Z-ben, így legalább $|M| - (|U| - |Z|)$ darab $|Z|$ által feszített élt tartalmaz. Így, ha létezik l darab k élű párosítás, akkor Z legalább $l(k + |Z| - |U|)$ élt feszít, vagyis (2.1) szükséges.

Az elegendőség igazolásához készítsünk el egy $D = (V,A)$ digráfot. Legyen $V := U \cup \{s,t\}$. Minden $a \in S$ pontra vezessünk l párhuzamos élt s-ből a-ba, és minden $b \in S$ pontra vezessünk l párhuzamos élt b-ből t-be. Ezenkívül G minden ab élét, ahol $a \in S$, helyettesítsük egy irányított ab éllel.

Állítás 2.1.7 *D teljesíti a 2.1.5 tétel feltételeit.*

Biz. Legyen $X \subseteq U$ egy legfeljebb $k-1$ elemű halmaz, és legyen $Y \subseteq V - X$ egy $s\bar{t}$-halmaz. Legyen $Z := (S \cap Y) \cup (T - (X \cup Y))$. Az Y-ból kilépő $D-X$-beli éleket három csoportba sorolhatjuk aszerint, hogy a tövük s, a fejük t, vagy Z feszíti őket. Ennek megfelelően $\delta_{D-X}(Y) = l|S - (X \cup Y)| + l|T \cap Y| + i(Z) \ge l|U - (X \cup Z)| + l(k + |Z| - |U|) = l(k - |X|)$. •

A 2.1.5 tétel szerint D éleit l színnel színezhetjük úgy hogy minden színosztály tartalmaz k belsőleg pontidegen út s-ből t-be. Márpedig egy ilyen k útból álló rendszer a G gráf egy k élű párosításának felel meg. •
•

2.2 AZ ELŐFOLYAM ALGORITMUS

A Ford és Fulkerson által bevezetett növelő utas módszer, illetve annak finomított változata, az Edmonds-Karp-Dinitz algoritmus segítségével erősen polinomiális időben, nevezetesen $O(nm^2)$ lépésben meg tudtunk határozni egy s-ből t-be menő maximális nagyságú folyamot és egy minimális vágást, ahol n a csúcsok számát jelöli, m pedig az élekét.

Az alábbiakban bemutatunk egy ettől gyökeresen különböző eljárást, az úgynevezett **előfolyam algoritmust**, amely minden szempontból felülmúlja a növelő utas módszert. Az eljárás, amely A. Goldbergtől és R.E. Tarjantól származik, elvileg is és gyakorlailag is hatékonyabb a növelő utas algoritmusnál. Nem használ növelő utakat, nem használ segédgráfot, sőt még folyamokat sem! Mindegyik lépése kicsiny, lokális változtatásból áll (szemben a növelő utas eljárásnak egy egész út mentén történő változtatásával), és helyességének illetve a lépésszámára adott korlátnak bizonyítása egyszerű.

Az eljárás egyik kulcsa az, hogy folyam helyett annak egy relaxációjával dolgozik. A $D = (V,E)$ digráf élhalmazán értelmezett $x : E \to \mathbf{R}_+$ függvényt **előfolyamnak** nevezzük, ha az s pont kivételével minden v csúcsra $\gamma_x(v) \ge 0$, ahol $\gamma_x(v) := \varrho_x(v) - \delta_x(v)$. Egy t-től különböző v csúcsot **aktívnak** mondunk, ha $\gamma_x(v) > 0$, míg ha $\gamma_x(v) = 0$ teljesül, akkor **passzívnak**. Az x előfolyam akkor folyam, ha minden $v \in V - \{s,t\}$ csúcs passzív. Egy e élt **csökkenthetőnek** (vagy pozitívnak) mondunk, ha $x(e) > 0$, és **növelhetőnek** (vagy telítetlennek), ha $x(e) < g(e)$. (Egy másik lehetséges interpretáció szerint minden $v \in V - s$ pontból végtelen kapacitású élt vezetünk t-be. Az így keletkező D' gráf egy folyama és egy D-beli előfolyam között egy-egy értelműen megfelel egymásnak.)

Az eljárás másik lényegi része, hogy a csúcsokat egy h szintfüggvény segítségével szintekbe soroljuk; az algoritmus során a csúcsok időnként felsőbb szintre lépnek (lejjebb soha). Egy v csúcs aktuális szintjét a

$h(v) \geq 0$ szám jelzi. Az eljárás során végig $h(t) = 0$ és $h(s) = n$, ahol n a csúcsok száma. Emiatt mindig van olyan $0 < i < n$ érték, amelyre a $\{v : h(v) = i\}$ szint üres, azaz egy uv élt nevezzünk **felmenőnek** illetve **lemenőnek** annak megfelelően, hogy $h(v) > h(u)$ vagy $h(v) < h(u)$.

Az algoritmus bármely közbenső állapotában adott egy x előfolyam és egy h szint-függvény, melyek a következő **illeszkedési feltételeket** teljesítik.

1. $x(uv) > 0$ esetén $h(v) \leq h(u) + 1$, azaz csökkenthető él legfeljebb egy szintet lép fel.
2. $x(uv) < g(uv)$ esetén $h(v) \geq h(u) - 1$, azaz növelhető él legfeljebb egy szintet lép le.

Másként fogalmazva, felmenő csökkenthető élre $h(v) = h(u) + 1$, és lemenő növelhető élre $h(v) = h(u) - 1$. Az ilyen éleket nevezzük **feszes**nek. Az algoritmus csak feszes éleken fog előfolyamot változtatni. Mielőtt az algoritmust ismertetnénk, megemlítjük az illeszkedési feltételek néhány egyszerű következményét.

Lemma 2.2.1 *Ha az x előfolyam kielégíti az illeszkedési feltételeket, úgy létezik olyan $0 < i < n$ index, amelyre a $\{v : h(v) = i\}$ szint üres. Az $S := \{v : h(v) > i\}$ halmazba nem lép be csökkenthető él és S-ből nem lép ki növelhető él.* •

Következésképp, ha x történetesen folyam, akkor $s \in S \subseteq V - t$ miatt x szükségképpen maximális nagyságú folyam és a lemmabeli S halmaz minimális vágást határoz meg.

Lemma 2.2.2 *Tetszőleges $v \neq t$ aktív pont szintje legfeljebb $2n - 2$.*

Biz. Indukcióval könnyen látszik, hogy minden előfolyam előállítható irányított körök és s-ből induló irányított utak (karakterisztikus vektorainak) nemnegatív lineáris kombinációjaként. Ebből adódik, hogy minden aktív pontba vezet s-ből pozitív (azaz csökkenthető) élekből álló irányított út. Mivel az 1. illeszkedési feltétel miatt csökkenthető él legfeljebb egy szintet lép fel és minden t-t nem használó egyszerű út legfeljebb $n - 2$ élből áll, ezért aktív pont szintje legfeljebb $n + n - 2$. •

2.2.1 Az algoritmus lépései

Kiinduláskor minden $v \neq s$ csúcsra $h(v) = 0$, $h(s) = n$, továbbá $x(sv) = g(sv)$ minden s-ből induló élre, míg az összes többi élre $x(e) = 0$. Ezen h és x nyilván teljesítik az illeszkedési feltételeket. Az algoritmus minden lépése vagy egyetlen pont szintjének eggyel történő megemelése vagy egyetlen él x-értékének módosítása.

Ha nem létezik aktív csúcs, magyarán az aktuális x előfolyam folyam, akkor az 2.2.1 lemmában látottak szerint x maximális folyam, és az algoritmus végetér.

Ha létezik aktív csúcs, úgy válasszunk ki egy maximális szintűt és jelöljük z-vel.

A. (Szintemelés) Ha nem létezik sem z-be felmenő csökkenthető él, sem z-ből lemenő növelhető él, akkor helyezzük z-t eggyel magasabb szintre (azaz növeljük meg a $h(z)$ értéket eggyel.)

B. (Előfolyam módosítás)
B1. Ha létezik z-be belépő $e = uz$ feszes él (azaz felmenő csökkenthető él), úgy csökkentsük $x(e)$-t a $\min\{x(e), \gamma_x(z)\}$ értékkel.
B2. Ha létezik z-ből kilépő $e = zu$ feszes él (azaz lemenő növelhető él), úgy növeljük $x(e)$-t a $\min\{g(e) - x(e), \gamma_x(z)\}$ értékkel.

Két egymást követő szintemelés között végzett tevékenységet nevezzük az algoritmus egy **fázisának.** Miután csak aktív pontnak emelkedik a szintje és minden aktív pont szintje az 2.2.2 lemma szerint legfeljebb $2n - 2$, szintemelés összesen legfeljebb $2n^2$-szer fordulhat elő, vagyis legfeljebb $2n^2$ fázis van.

Csak előfolyam módosításkor keletkezhet új aktív pont éspedig a(z aktív) z alatti u pont. Miután mindig maximális szintű aktív pontot választunk, ha ez egyszer passzívá válik, akkor ugyanazon fázis során már az is marad. Így egy fázis alatt minden élen az x-értéket legfeljebb egyszer módosítjuk. Következésképp az algoritmus legfeljebb $O(n^2 m)$ lépés után végetér.

Jobb lépésszám becslés

Kicsit körültekintőbb becsléssel javíthatunk a korláton. Egy előfolyam módosítást nevezzünk **kiegyenlítőnek**, ha a minimum $\gamma_x(z)$-n vétetik fel, azaz a módosítás végrehajtása z-t passzívvá teszi. Ha a módosítás az $e = uv$ élen nem kiegyenlítő, akkor e megszűnik feszesnek lenni. Nevezetesen, ha e felmenő (lemenő) él volt, akkor őrajta az x-érték nullára csökken ($g(e)$-re nő). Legközelebb csak akkor lehet az e élen módosítás, ha lemenővé (felmenővé) változott, tehát ha a $h(u)$ (illetve $h(v)$) szint legalább kettővel megemelkedett.

Mivel a legmagasabb szint kisebb, mint $2n$, tetszőleges élen az egész algoritmus során legfeljebb $2n$ nem-kiegyenlítő módosítás fordulhat elő. Így a nem-kiegyenlítő módosítások teljes száma legfeljebb $2nm$. Miután egy fázis során kiegyenlítő módosítás legfeljebb n lehet, és a fázisok száma legfeljebb $2n^2$, kapjuk, hogy a kiegyenlítő módosítások teljes száma legfeljebb $2n^3$. Ezeket összevetve az algoritmus teljes lépésszámára az $O(n^3)$ becslés adódik.

2.3 ÁRAMOK

Legyen $f : E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : E \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az x vektort **áramnak** (circulation) nevezzük, ha teljesül rá **megmaradási szabály** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (Figyelem: az f-ben megengedünk $-\infty$ komponenst, ami persze csak annyit jelent, hogy az illető élen az áram értéke nincs alulról korlátozva. Ez azt is jelenti, hogy csak az olyan e élen rendelünk majd az $f(e) \leq x(e)$ egyenlőtlenséghez duál változót, amelyen az $f(e)$ korlát véges. Analóg módon a g-nek lehetnek $+\infty$ komponensei, de az x áram komponensei mindig valósak. Az f alsó korlátban $+\infty$-t, a g felső korlátban pedig $-\infty$-t nem engedünk meg. Néha előírjuk, hogy az f vagy a g komponensei egészértékűek legyenek; ebbe beleértjük a $\pm\infty$-t is.) Az x áramot **megengedettnek** (feasible) mondjuk, ha

$$f \leq x \leq g. \tag{2.2}$$

Gyakorlat 2.3.1 *(a) Igazoljuk, hogy x akkor és csak akkor áram, ha $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (b) Ha x áram, akkor $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra is fennáll.*

Alapvető az alábbi, Alan Hoffmantól származó tétel.

TÉTEL 2.3.1 (Alan Hoffman, 1960) *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{2.3}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (2.3) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.

Biz. (MFMC $\to$ Hoffman) Minden $v \in V$ csúcsra legyen $\lambda(v) := \varrho_f(v) - \delta_f(v)$. (Az itt következő levezetésben feltesszük, hogy f, g véges értékű: kis gyakorló feladat az általános eset kezelése.) Ha λ mindenhol nulla, akkor f megengedett áram, és készen vagyunk.

Ha λ nem azonosan nulla, akkor az $S = (v : \lambda(v) > 0)$ és $T = (v : \lambda(v) < 0)$ halmazok nem-üresek. Készítsük el a $D' = (V', A')$ digráfot úgy, hogy $V' = V \cup \{s, t\}$ és $A' = A \cup (s, v) : v \in S \cup ((v, t) : v \in T)$. Definiáljuk a g' kapacitás függvényt a következőképpen. $g'(sv) := \lambda(v)$ ha $v \in S, g'(vt) := -\lambda(v)$ ha $v \in T$, és $g'(a) := g(a) - f(a)$ ha $a \in A$. Legyen $M = \sum(\lambda(v) : v \in S)$. A következő lemma a kapcsolatot írja le egyrészt D megengedett áramai és D' megengedett st folyamai között, másrészt D' M-nél kisebb vágásai és D (5.1)-et megsértő halmazai között.

Lemma 2.3.2 (a) *Ha x M-nagyságú megengedett st-folyam D'-ben (a g' kapacitásra vonatkozóan), akkor $f + x$ (az eredeti A-ra megszorítva) megengedett áram.*

(b) *Ha $\delta_{g'}(X + s) < M$ valamely $X \subseteq V$ halmazra, akkor X megsérti a Hoffman féle (2.3) feltételt.*

Biz. (a) A megengedettség, azaz $f \leq f + x \leq g$, következik a konstrukcióból. A megmaradási szabály nyilván fennáll $V - (S \cup T)$ pontjaiban. Mivel x nagysága M, minden s-ből kilépő él telített. Így S-nek bármely v pontjára az eredeti gráfban érvényes, hogy $x(sv) + \varrho_x(v) = \delta_x(v)$, azaz $\varrho_f(v) - \delta_f(v) + \varrho_x(v) = \delta_x(v)$, és így $\varrho_{f+x}(v) = \delta_{f+x}(v)$, vagyis a megmaradási szabály érvényes S pontjaiban is. A bizonyítás T pontjaira analóg módon végezhető el.

(b) $\lambda(S) = M > \delta_{g'}(X + s) = \delta_{g-f}(X) + \lambda(S - X) - \lambda(T \cap X)$, amibe $\lambda(S - X) = \lambda(S) - \lambda(S \cap X)$-t helyettesítve kapjuk, hogy $0 > \delta_{g-f}(X) - \lambda(S \cap X) - \lambda(T \cap X) = \delta_{g-f}(X) - \lambda(X) = \delta_{g-f}(X) + \delta_f(X) - \varrho_f(X)$, vagyis $\delta_g(X) < \varrho_f(X)$. •

Feladat 2.3.2 *Vezessük le Hoffman tételét az MFMC tételből, ha f-nek lehetnek $\{-\infty\}$, g-nek pedig $\{+\infty\}$ komponensei.*

A fenti redukció azt is mutatja, hogy egy maximális folyam illetve minimális vágás meghatározására szolgáló algoritmus segítségével el lehet dönteni, hogy teljesül-e (2.3), és ha igen, akkor tudunk találni megengedett áramot.

Megmutatjuk, hogy Hoffman tételéből könnyen következik az MFMC tétel (nemtriviális iránya).

Biz. (Hoffman $\to$ MFMC). Jelölje m_g a szóbanforgó minimum értékét. (Ez a minimum nyilvánvalóan létezik, merthogy véges sok szám minimumáról van szó. Az viszont még ezen a ponton nem világos, hogy létezik maximális nagyságú folyam.) Adjunk D-hez egy új $e = ts$ élt és definiáljuk $f(e) = m_g, g(e) := \{\infty\}$. Az eredeti éleken legyen f mindenhol nulla.

Könnyen látszik, hogy most (2.3) fennáll, és így az 2.3.1 tétel szerint létezik megengedett áram (amely ráadásul egészértékű, ha g az). Kihagyva a hozzávett e élt, m_g nagyságú folyamot kapunk. •

2.3.1 Hálózati mátrixok

Fontos megjegyezni, hogy a hálózati mátrixokkal megadott poliéderek nemürességének feladata megoldhatók áram problémaként. Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf, F feszítő fa és legyen $N := E - F$ a nem-fa élek halmaza. Legyen adott $f = (f_F, f_N)$ és $g = (g_F, g_N)$ korlát, melyekre $f \leq g$. Jelölje az F-hez tartozó $(0, \pm 1)$-es hálózati mátrixot A, míg a D digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia mátrixát B. Legyen továbbá $x = (x_F, x_N)$.

TÉTEL 2.3.3 *A* $\{x : f_F \leq Ax_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N\}$ *poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha a* $\{x : Bx = 0, f \leq x \leq g)$ *megengedett áram poliéder nemüres.*

Biz. Amennyiben $x = (x_F, x_N)$ áram (azaz $Bx = 0$), úgy könnyen látszik, hogy $x_F = Ax_N$, és persze $cx = c_N x_N$. Emiatt $f \leq x \leq g$ ekvivalens a $f_F \leq Ax_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N$ feltételekkel. Fordítva, tegyük fel, hogy x_N kielégíti ezen utóbbi egyenlőtlenségeket. Minden $e \in N$ nem-fa élhez legyen χ_e az $(1, a_e)$ vektor, ahol a_e az A mátrix e-hez tartozó oszlopa. (Másszóval, χ_e az e élhez tartozó C_e alapkör $0, \pm 1$-es incidencia vektora.) Ekkor persze χ_e áram, és így az $x := \sum(x_N(e)\chi_e : e \in N)$ is áram, méghozzá olyan, hogy $x(e) = x_N(e)$, ha $e \in N$. Látható, hogy $f_F \leq Ax_N \leq g_F$ azzal ekvivalens, hogy $f_F(e) \leq x(e) \leq g_F(e)$ minden $e \in F$ élre fennáll. •

Gyakran az áramnál általánosabb fogalmat tekintenek. Például az x vektorra azt írjuk elő, hogy minden v pontra $\varrho_x(v) - \delta_x(v) = b(v)$, ahol $b : V \to \mathbf{R}$ előre adott vektor. Vagy még általánosabban, adott $p : V \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b : V \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ esetén $(p \leq b)$ minden v csúcsra legyen

$$p(v) \leq \varrho_x(v) - \delta_x(v) \leq b(v). \tag{2.4}$$

Egy egyszerű fogással azonban ez a feladat áram problémává alakítható. Nevezetesen, vegyünk fel egy új s csúcsot, és D valamennyi pontjából vezessünk egy-egy élt s-be. Egy új vs élen legyen $f(vs) := p(v), g(vs) := b(v)$. Jelölje a kibővített élek halmazát E'. Tetszőleges $x : E \to \mathbf{R}$ vektorhoz legyen $x' : E' \to \mathbf{R}$ a következőképpen definiálva: $x'(e) := x(e)$ ha $e \in E$, és $x'(e) := \varrho_x(v) - \delta_x(v)$ ha $e' = vs$ $(v \in V)$. Hasonlóképp terjesszük ki f-t és g-t az új élekre: $f(us) := p(u), g(us) := b(u)$. Könnyen látszik, hogy x akkor és csak akkor teljesíti (2.2)-t és (2.3)-t, ha x' megengedett áram.

Feladat 2.3.3 *Hoffman tételének általánosításaként igazoljuk, hogy akkor és csak akkor létezik az (2.2)-t és (2.4)-t kielégítő* x *vektor, ha* $\varrho_f(X) - \delta_g(X) \leq \min(p(X), b(V - X))$ *fennáll minden* $X \subseteq V$*-re.*

March 9, 2009umaxfo

Fejezet 3

KÖLTSÉGES FOLYAMOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Legyen adva $D = (V, A)$ irányított gráf az s forrás- és a t nyelőponttal. Adott még az éleken a g nemnegatív kapacitás függvény és a c nemnegatív költségfüggvény. Feltesszük, hogy g egészértékű. Korábban már láttuk, hogy miként lehet egy maximális M nagyságú s-ből t-be vezető folyamot polinom időben kiszámítani. Most minden 0 és M közé eső k egészre szeretnénk találni egy olyan k nagyságú folyamot, melynek költsége minimális. Egy z folyam **költségét** a $cz = \sum[c(e)z(e) : e \in A]$ skaláris szorzattal definiáljuk. Azt mondjuk, hogy a z st-folyam **minimális költségű folyam**, ha z a legkisebb költségű a megengedett, z-vel azonos nagyságú st-folyamok közül.

3.1 Minimális költségű folyam algoritmus

Az alábbiakban ismertetjük Ford és Fulkerson [1962] algoritmusát. Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V-n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. Használni fogjuk a következő jelölést. $\bar{c}(uv) = c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$, ahol $uv \in A$. Potenciálok segítségével egy z folyam cz költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$\sum c(uv)z(uv) = \sum[\pi(v) - \pi(u)]z(uv) + \sum \bar{c}(uv)z(uv) = \pi(t)k + \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) < 0] + \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) > 0] \geq \pi(t)k + \sum \bar{c}(uv)g(uv) + 0.$

Ebből következik, hogy egy z folyam bizonyosan minimális költségű, amennyiben létezik olyan π potenciál, amelyre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ez pontosan akkor van így, ha fennáll a következő két optimalitási feltétel.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \qquad (ii)$$

[Tetszőleges π potenciálra a $\pi(v) - \pi(u)$ potenciál különbség egy semleges költségfüggvényt definiál az élhalmazon abban az értelemben, hogy minden k nagyságú folyamnak ugyanaz a költsége, éspedig $k(\pi(t) - \pi(s))$. Így, ha a c költségfüggvényt egy potenciál különbséggel eltoljuk, akkor a kapott $\bar{c}(uv) := c(uv) - (\pi(v) - \pi(u))$ költségfüggvény ekvivalens az eredetivel. Ennek alapján az optimalitási feltételeket úgy is lehet interpretálni, hogy egy z folyam akkor és csak akkor minimális költségű, ha létezik egy olyan $\bar{c}$ ekvivalens költségfüggvény, amely ha egy uv élen pozitív, úgy a folyam az élen az alsó korláton van, azaz $z(uv) = 0$, míg ha $\bar{c}(uv)$ negatív, úgy a folyam a a felső korláton van, azaz $z(uv) = g(uv)$.]

Ford és Fulkerson módszere a maximális folyam kiszámítására vonatkozó Ford-Fulkerson algoritmus finomításának tekinthető. Minden lehetséges egész k értékre megkonstruálunk egy minimális költségű k nagyságú folyamot. Az eljárás az azonosan nulla folyammal és az azonosan nulla potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamot illetve egy minimális vágást kaptunk.

ITERATÍV LÉPÉS Az általános helyzetben adott a z folyam és a π potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. D'-nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy uv él **előre él**, ha $uv \in A, \bar{c}(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Egy uv él **hátra él**, ha $vu \in A, \bar{c}(vu) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Legyen S az s-ből D'-ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehetséges.

1. Eset *$t \notin S$, azaz t nem elérhető s-ből.*
Legyen $\varepsilon_1 = min(\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(S), z(uv) < g(uv))$ és $\varepsilon_2 = min(-\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(V-S), z(uv) > 0)$, ahol az üres halmazon vett minimumot ∞-nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Az optimalitási feltételek és az S definíciója miatt ε pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az S-ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az S-be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így tehát $\delta_g^+(S) = val(z)$, az aktuális z folyam maximális nagyságú és az S-ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk π-t úgy, hogy minden $v \in V-S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal. Az S és az ε definíciójából rögtön kapjuk:

Állítás 3.1.1 *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott z folyam kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a régi S által feszített élek változatlanok maradnak és ezért az s-ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint S. Ezért az 1. eset legfeljebb $|V|-1$-szeri előfordulása után biztosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagypedig az alábbi 2. eset.

2. Eset *$t \in S$, vagyis t elérhető s-ből.* Legyen P a D'-ben egy s-ből t-be vezető irányított út. Módosítsuk z-t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = z(uv)+1$, ha uv a P-nek előre éle és legyen $z'(uv) = z(uv)-1$, vu a P-nek hátra éle.

A módosításból adódik:

Állítás 3.1.2 *A módosított folyam és változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Ezzel az algoritmus leírását be is fejeztük. Mi mondható az eljárás futásidejéről? Lényegében M darab növelésre van szükségünk (2. eset), így az eljárás polinomimális, amennyiben mind az M minimális költségű folyamot meg kell határoznunk.

Elképzelhető persze olyan helyzet is, amikor például csak egy maximális nagyságú minimális költségű folyamot kell kiszámítanunk. Ebben az esetben az algoritmus természetesen nem biztosan polinomiális, hiszen lépésszáma az M nagyságával arányos. De még ebben az esetben is két fontos speciális eset kezelhető.

Ha a legnagyobb kapacitás nem túlságosan nagy (nevezetesen, ha $|V|$ polinomjával korlátozható), akkor a fenti eljárás nyilván polinomiális, függetlenül attól, hogy a c költség-függvény egészértékű-e vagy sem.

Tegyük most fel, hogy a kapacitások tetszőlegesek, a költség-függvény egészértékű és "kicsi". Ekkor az algoritmus következő módosítása erősen polinomiális algoritmust eredményez. Tekintsük az algoritmus egy közbenső helyzetét, amikor egy π potenciál rendelkezésre áll. A szoros élek digráfjában (egy uv él **szoros**, ha $\bar{c}(uv) = 0$) számítsunk ki (a Max-flow Min-cut algoritmusssal) egy maximális nagyságú z folyamot és egy S minimális ki-kapacitású $s\bar{t}$-halmazt. Ha D-ben minden S-be belépő és S-ből kilépő él szoros, akkor S minimális vágást határoz meg és az aktuális z folyam maximális nagyságú, amely kielégíti az optimalitási feltételeket. Ebben az esetben az algoritmus véget ér.

Amennyiben D-nek létezik nem-szoros éle, amely S-be be- vagy kilép, akkor ε, ahogy azt fentebb az 1. esetnél kiszámítottuk, véges lesz. Módosítsuk π-t úgy, mint az előbb, azaz minden $v \in V-S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal.

Azt állítjuk, hogy a $\pi(t)$ érték a D digráf valamely (irányítatlan értelemben vett) s-ből t-be vezető útjának a költsége. Valóban, minden folyam-növeléskor a segédgráfban van olyan st út, amely szoros élekből áll.

Következik, hogy a különböző $\pi(t)$ értékek száma (vagyis az 1. eset előfordulásainak száma) felülről korlátozható az élek össz-költségével. Tehát az eljárás polinomiális, ha a c egészértékű és legnagyobb értéke $|V|$ polinomjával korlátozható.

Van olyan példa (sorozat), amely azt mutatja, hogy ha c-nek csak az egészértékűségét tesszük fel, akkor az algoritmus nem polinomiális.

Feladat 3.1.1 *Igazoljuk, hogy tetszőleges c esetén a fenti algoritmus véges sok lépésben véget ér.*

3.2 Részbenrendezett halmazok láncai és antiláncai

Legyen $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz. Egy lánc elemszámát néha a lánc **hosszának** nevezik. A leghosszabb lánc hossza a részbenrendezett halmaz **magassága**. A legnagyobb antilánc elemszáma részbenrendezett halmaz **szélessége**.

3.2.1 A Dilworth tétel és polárisa

Először a magasságra és a szélességre vonatkozóan két fontos tételt bizonyítunk. Az első meglehetősen egyszerű (néha a Dilworth tétel polárisának hívják):

TÉTEL 3.2.1 (poláris Dilworth) *A P-t fedő antiláncok minimális $c = c(P)$ száma egyenlő a leghosszabb lánc hosszával, vagyis P magasságával.*

Biz. Világos, hogy max $\leq$ min. Az egyenlőség igazolásához jelölje A_1 a minimális elemek halmazát. Ez nyilván antilánc. Jelölje c' a $P' := P - A_1$ magasságát. Indukcióval P' felbontható c' darab antiláncra, így P felbontható $c' + 1$ darab antiláncra. Másrészt P' bármely eleme nagyobb, mint A_1 valamelyik eleme, és ezért P' bármely lánca megnövelhető egy A_1-beli elemmel, vagyis P-ben van $c' + 1$ elemű lánc. •

A fenti induktív bizonyítás könnyen algoritmussá alakítható, amely megtalál egy antilánc felbontást és egy láncot, melyekre egyenlőség áll.

Legyen A_1 a P minimális elemeinek halmaza. Legyen A_2 az A_1 elhagyása után a minimális elemek halmaza. Ezt folytatva megkonstruáljuk az $A_1, \ldots, A_c$ antiláncokból álló felbontását P-nek. Most visszafelé haladva előállítunk egy c elemből álló láncot. Legyen a_c az A_c antilánc tetszőleges eleme. Az a_c elem nem került bele A_{c-1}-be, ezért van A_{c-1}-nek egy a_c-nél kisebb a_{c-1} eleme. Ez az elem nem került A_{c-2}-be, tehát van A_{c-2}-ben egy a_{c-2} elem, amely kisebb, mint a_{c-1}. Ezt az eljárást folytatva, megkapunk egy c elemű láncot.

Feladat 3.2.1 *Igazoljuk, hogy egy legalább $kl + 1$ tagú számsorozatban vagy van $k + 1$ tagú monoton növő rész-sorozat, vagy van $l + 1$ tagú szigorúan monoton csökkenő rész-sorozat. Előfordulhat-e, hogy mind a két rész-sorozat létezik?*

Érvényes tételt kapunk, ha a 3.2.1 tételben a lánc és antilánc szavakat felcseréljük:

TÉTEL 3.2.2 (Dilworth) *A P-t fedő láncok minimális $a = a(P)$ száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával, vagyis P szélességével.*

Biz. A max $\leq$ min egyenlőtlenség ismét nyilvánvaló. A fordított irány igazolásához készítsünk el egy $G = (X, Y; E)$ páros gráfot, melynek mindkét osztálya a P halmaznak felel meg és valamely x_i elem y_j-vel akkor van összekötve, ha $p_i > p_j$. (x_i NINCS összekötve y_i-vel.)

Lemma 3.2.3 *G tetszőleges M párosításának megfelel P-nek egy $n - |M|$ láncból álló felbontása.*

Biz. Tekintsük az X halmaz M által fedetlen pontjait. Ezek száma $n - |M|$. Legyen x_i olyan pont, amelyet M nem fed. Mindegyik ilyen x_i elemhez megkonstruálunk egy C_i láncot, a következőképpen. Ha y_i fedetlen, akkor C_i álljon az egyetlen p_i elemből. Ha y_i-t fedi valamely M-beli $x_j y_i$ él, akkor $p_j > p_i$, és legyen p_j a lánc következő eleme. Ha y_j-t fedi valamely M-beli $x_k y_j$ él, akkor legyen p_k a lánc következő eleme. Így folytatva, a láncot addig növeljük, amig a lánchoz utolsónak vett p_m elemhez tartozó y_m csúcsot már nem fedi M-beli él.

Íly módon az M által nem fedett $n - |M|$ darab X-beli csúcs mindegyikéhez definiáltunk egy láncot P-ben. A lemma következik abból, hogy az így kapott láncok páronként diszjunktak és lefedik P-t. •

Lemma 3.2.4 *Legyen $S \subseteq X \cup Y$ a páros gráf éleinek minimális lefogása. Ekkor P-ben van olyan A antilánc, amelyre $|S| + |A| = n$.*

Biz. Először belátjuk, hogy ha $x_i \in S$, akkor $y_i \notin S$. Ha indirekt mindkét csúcs S-ben volna, akkor S minimalitása miatt a gráfnak létezne olyan $x_i y_j$ illetve $x_k y_i$ éle, melyekre $y_j, x_k \notin S$. Ekkor tehát $p_k > p_i > p_j$, amiből $p_k > p_j$, és így $x_k y_j$ éle a gráfnak. Ezt az élt viszont nem fogja le S, amely ellentmondás azt bizonyítja, hogy valóban nem lehet x_i és y_i mindegyike S-ben.

Legyen most $A := \{p_i : x_i \notin S, y_i \notin S\}$. Rögtön látszik, hogy az A halmaz kielégíti a lemma követelményeit. •

A két lemmát felhasználva Dilworth tétele rögtön következik a Kőnig tételből, ami szerint egy páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával. • •

3.2.2 Két általánosítás

A Dilworth tétel kitejesztéseként megvizsgáljuk, hogy $\alpha \geq 1$ antilánc egyesítése maximum milyen nagy lehet, a polár Dilworth tétel kitejesztéseként pedig azt, hogy $\gamma \geq 1$ lánc egyesítése maximum milyen nagy lehet, Valamely $\mathcal{B}= \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ családra használjuk az $\cup\mathcal{B} = \cup(B_i : i = 1, \ldots, k)$ jelölést. A $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ **lánc-családon** γ darab diszjunkt nemüres láncból álló családot értünk. Jelölje $\mathbf{C}_\gamma$ a γ láncból álló lánc-családok halmazát, míg $\mathbf{C}$ az összes lánc-családot magába foglaló halmazt. Legyen $c_\gamma = \max\{|\cup\mathcal{C}_\gamma| : \mathcal{C} \in \mathbf{C}_\gamma\}$, vagyis c_γ a legnagyobb halmaz elemszáma, amely előáll γ lánc egyesítéseként (azaz a Dilworth tétel alapján nem tartalmaz γ-nál nagyobb elemszámú antiláncot).

Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha\}$ **antilánc-családon** α darab diszjunkt nemüres antiláncból álló családot értünk. Jelölje $\mathbf{A}_\alpha$ az α antiláncból álló antilánc-családok halmazát, míg $\mathbf{A}$ az összes antilánc-családot magában foglaló halmazt. Legyen $a_\alpha = \max\{|\cup\mathcal{A}_\alpha| : \mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha\}$, vagyis a_α a legnagyobb olyan halmaz elemszáma, amely előáll α antilánc egyesíteseként (azaz a poláris Dilworth tétel alapján nem tartalmaz α-nál nagyobb elemszámú láncot).

Dilworth tétele szerint $c_a = n$, a poláris Dilworth tétel szerint $a_c = n$. Mi mondható c_γ-ról $(1 \leq \gamma \leq a)$ és a_α-ról $(1 \leq \alpha \leq c)$?

TÉTEL 3.2.5 (Greene és Kleitman, 1976) $a_\alpha = \min\{q\alpha + |P - \cup\mathcal{C}_q| : \mathcal{C}_q \in \mathbf{C}\}$.

TÉTEL 3.2.6 (Greene, 1976) $c_\gamma = \min\{q\gamma + |P - \cup\mathcal{A}_q| : \mathcal{A}_q \in \mathbf{A}\}$.

Miután egy láncnak és egy antiláncnak legfeljebb egy közös eleme lehet, a_α és c_γ legfeljebb akkora, mint a szóbanforgó minimum.

DEFINÍCIÓ Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha)$ antilánc-család és a $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ lánc-család **ortogonális**, ha

$$P = (\cup\mathcal{A}_\alpha) \cup (\cup\mathcal{C}_\gamma) \tag{3.1}$$

és

$$A_i \cap C_j \neq \emptyset \text{ hacsak } 1 \leq i \leq \alpha,\ 1 \leq j \leq \gamma, \tag{3.2}$$

azaz a lánc-család és az antilánc-család együttesen lefedi P-t és mindegyik A_i antilánc metszi az összes C_j láncot.

A 3.2.5 és 3.2.6 tételek nemtriviális részeit átfogalmazhatjuk az alábbiak szerint.

TÉTEL 3.2.7 *Minden α-ra, $1 \leq \alpha \leq c$, létezik $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}$, valamely γ-ra, amelyek ortogonálisak.*

TÉTEL 3.2.8 *Minden γ-ra, $1 \leq \gamma \leq a$, létezik $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}_\gamma$ és $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}$, valamely α-ra, melyek ortogonálisak.*

A két tétel közös általánosításának bizonyítása a minimális költségű folyam algoritmuson fog alapulni. Elevenítsük ezt fel.

3.2.3 Minimális költségű folyam algoritmus

Legyen adva $D = (V, A)$ irányított gráf az s forrás- és a t nyelőponttal. Adott még az éleken a g nemnegatív kapacitás függvény és a c nemnegatív költségfüggvény. Feltesszük, hogy g egészértékű. Minden 0 és M közé eső k egészre szeretnénk egy olyan k nagyságú folyamot találni, melynek költsége minimális. Egy z folyam **költség**ét a $cz = \sum[c(e)z(e) : e \in A]$ skaláris szorzattal definiáljuk. Azt mondjuk, hogy a z st-folyam **minimális költségű folyam**, ha z a legkisebb költségű a megengedett, z-vel azonos nagyságú st-folyamok közül.

Ismertetjük Ford és Fulkerson [1962] algoritmusát. Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V-n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. Használni fogjuk a következő jelölést. $\bar{c}(uv) = c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$, ahol $uv \in A$. Potenciálok segítségével egy z folyam cz költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$\sum c(uv)z(uv) = \sum[\pi(v) - \pi(u)]z(uv) + \sum \bar{c}(uv)z(uv) = \pi(t)k + \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) < 0] + \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) > 0] \geq \pi(t)k + \sum \bar{c}(uv)g(uv) + 0.$

Ebből következik, hogy egy z folyam bizonyosan minimális költségű, amennyiben létezik olyan π potenciál, amelyre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ez pontosan akkor van így, ha fennáll a következő két optimalitási feltétel.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \tag{ii}$$

Minden lehetséges egész k értékre megkonstruálunk egy minimális költségű k nagyságú folyamot. Az eljárás az azonosan nulla folyammal és az azonosan nulla potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamot illetve egy minimális vágást kaptunk.

ITERATÍV LÉPÉS Az általános helyzetben adott a z folyam és a π potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. D'-nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy uv él **előre él**, ha $uv \in A, \bar{c}(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Egy uv él **hátra él**, ha $vu \in A, \bar{c}(vu) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Legyen S az s-ből D'-ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehetséges.

1. Eset *$t \notin S$, azaz t nem elérhető s-ből.*

Legyen $\varepsilon_1 = min\{\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(S), z(uv) < g(uv)\}$ és $\varepsilon_2 = min\{-\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(V - S), z(uv) > 0\}$, ahol az üres halmazon vett minimumot ∞-nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Az optimalitási feltételek és az S definíciója miatt ε pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az S-ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az S-be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így tehát $\delta_g^+(S) = val(z)$, az aktuális z folyam maximális nagyságú és az S-ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk π-t úgy, hogy minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal. Az S és az ε definíciójából rögtön kapjuk:

Állítás 3.2.9 *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott z folyam kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a régi S által feszített élek változatlanok maradnak és ezért az s-ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint S. Ezért az 1. eset legfeljebb $|V| - 1$-szeri előfordulása után biztosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagypedig az alábbi 2. eset.

2. Eset *$t \in S$, vagyis t elérhető s-ből.* Legyen P a D'-ben egy s-ből t-be vezető irányított út. Módosítsuk z-t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = z(uv) + 1$, ha uv a P-nek előre éle és legyen $z'(uv) = z(uv) - 1$, vu a P-nek hátra éle.

A módosításból adódik:

Állítás 3.2.10 *A módosított folyam és változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Ezzel az algoritmus leírását be is fejeztük. Lényegében M darab növelésre van szükségünk (2. eset), így az eljárás polinomimális, amennyiben mind az M minimális költségű folyamot meg kell határoznunk.

3.2.4 A közös általánosítás

A 3.2.7 és 3.2.8 tételek közös általánosítása így hangzik:

TÉTEL 3.2.11 *A $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz szélessége legyen $a = a(P)$, magassága $c = c(P)$. Létezik egy olyan $\mathcal{C}_a|\ \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}|\ \mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}|\ \mathcal{A}_{i_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_2}|\ \mathcal{C}_{a-j_1-1}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_2}| \ldots$ sorozat, amely a $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{a-1}, \ldots, \mathcal{C}_1$ és az $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_c$ sorozatok összefésülésével keletkezik, ahol $\mathcal{C}_j \in \mathbf{C}_j$ és $\mathcal{A}_i \in \mathbf{A}_i$, és a sorozat bármely tagjára* (akár $\mathcal{C}_j$, akár $\mathcal{A}_i$) *fennáll, hogy ortogonális az utolsó őt megelőző ellentétes típusú tagra.* (Vagyis, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}$ ortogonális $\mathcal{C}_a$-ra, $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ mindegyike ortogonális $\mathcal{A}_{i_1}$-re, stb.)

Biz. Feleltessünk meg P-nek egy $D = (V, A)$ irányított gráfot, ahol $V := \{s, t, x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, és $A := \{(s, x_i) : i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{(y_i, t) : i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{x_i y_j : \text{ha } p_i \geq p_j\}$. Legyen minden e él kapacitása $g(e) \equiv 1$, míg a költsége $c(e) = 1$, ha $e = x_i y_i$ és 0 különben.

Alkalmazzuk a Ford és Fulkerson féle minimális költségű folyam algoritmust. Legyen z és π az algoritmus egy közbenső állapotához tartozó folyam illetve potenciál. Ekkor z $0-1$-értékű, π nemnegatív, $\pi(s) = 0$ és kielégítik a következő optimalitási feltételeket.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \qquad (ii)$$

Írjuk fel, hogy a különféle élekre mit jelentenek az optimalitási feltételek.
$x_i y_i$ típusú élre:

$$\pi(y_i) - \pi(x_i) < 1 \Rightarrow z(x_i y_i) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(y_i) - \pi(x_i) > 1 \Rightarrow z(x_i y_i) = 1. \qquad (ii)$$

$x_i y_j$ típusú élre (tehát amikor $p_i > p_j$):

$$\pi(y_j) - \pi(x_i) < 0 \Rightarrow z(x_i y_j) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(y_j) - \pi(x_i) > 0 \Rightarrow z(x_i y_j) = 1. \qquad (ii)$$

sx_i típusú élre:

$$\pi(x_i) < 0 \Rightarrow z(sx_i) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(x_i) > 0 \Rightarrow z(sx_i) = 1. \qquad (ii)$$

$y_i t$ típusú élre:

$$\pi(y_i) > \pi(t) \Rightarrow z(y_i t) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(y_i) < \pi(t) \Rightarrow z(y_i t) = 1. \qquad (ii)$$

Lemma 3.2.12 *Minden $i = 1, \ldots, n$-re*

$$\pi(y_i) \leq \pi(x_i) + 1. \qquad (3.3)$$

Biz. Az (3.3) fennáll az algoritmus kezdetén. A folyamnövelési lépés nem befolyásolja (3.3)-t, egy potenciálcsere pedig csak akkor ronthatja el, ha a csere előtt $\pi(y_i) = \pi(x_i) + 1$ állt és x_i elérhető volt a D' segédgráfban, miközben y_i nem. Ebben az esetben $\pi'(y_i) = \pi'(x_i) + 2$ érvényes a módosított π' potenciálra. Az (ii) feltétel (ha π'-re alkalmazzuk) maga után vonja, hogy $z(x_i y_i) = 1$. Ezért $z(sx_i) = 1$ és a D' segédgráfnak az egyetlen x_i-be lépő éle $y_i x_i$. De ez ellentmond az indirekt feltevésnek, hogy x_i elérhető, míg y_i nem. •

Lemma 3.2.13 *Ha $p_i > p_j$ és $z(x_i y_j) = 1$, akkor $\pi(x_i) = \pi(y_j)$.*

Biz. Amikor folyamnöveléssel a $z(x_i y_j)$ érték 0-ról 1-re nőtt, akkor $x_i y_j$ éle D'-nek és emiatt $\pi(y_i) - \pi(x_j) = c(x_i y_j) = 0$. Az ezt követő potenciálcserék során, amíg $z(x_i y_j) = 1$, az (i) feltétel alapján a $\pi(y_j) \geq \pi(x_i)$ egyenlőtlenség biztosan érvényben marad. Ráadásul egy potenciálcserét követően a $\pi'(y_j) = \pi'(x_i) + 1$ helyzet sem jöhet létre, mert ekkor x_i elérhető volna D'-ben az s-ből, miközben y_j nem, ami viszont nem lehetséges, miután $y_j x_i$ az egyedüli él D'-ben, amely belép x_i-be. •

Jelölje P' azon p_h elemek halmazát, melyekre $z(x_h y_h) = 0$. Ekkor a Dilworth tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan azon $x_i y_j$ $(i < j)$ élek halmaza, melyekre $z(x_i y_j) = 1$, megfelel egy $\mathcal{C}_\gamma$ lánc-családnak, ahol $\gamma = n - val(z)$, és ez a lánc-család a P' partícióját adja. $\alpha := \pi(t)$-re definiáljunk egy $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha\}$ családot, ahol $A_i = \{p_j : \pi(x_j) + 1 = \pi(y_j) = i\}$.

Lemma 3.2.14 *$\mathcal{A}_\alpha$ antilánc-családot alkot, amely ortogonális $\mathcal{C}_\gamma$-ra.*

Biz. Először mutassuk meg, hogy mindegyik A_i antilánc. Valóban, ha indirekt $p_m, p_j \in A_i$ valamely $p_m > p_j$ elemekre, akkor $\pi(y_j) - \pi(x_m) = 1$, és ezért (ii) alapján, $z(x_m, y_j) = 1$, ellentétben a 3.2.13 lemmával.

(3.1) igazolása érdekében legyen p_m olyan elem, amely nincs $P' = \cup\mathcal{C}_\gamma$-ban, ami azzal ekvivalens, hogy $z(x_m, y_m) = 1$. Ekkor (i) miatt $\pi(y_m) - \pi(x_m) \geq 1$, így a 3.2.12 lemma miatt $\pi(y_m) - \pi(x_m) = 1$. Vagyis $\pi(y_m)$-t i-vel jelölve $p_m \in A_i$, tehát (3.1) fennáll.

Igazoljuk végül, hogy $A_i \cap C_j \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq \alpha, 1 \leq j \leq \gamma)$. Álljon a C_j lánc mondjuk a $p_1 > \ldots > p_k$ elemekből $(k \geq 1)$. Ekkor $z(y_1 t) = 0$, így (ii) miatt $\pi(y_1) \geq \pi(t)$, amiből persze $\pi(y_1) = \pi(t) = \alpha$. Hasonlóan $z(sx_k) = 0$, így (i) miatt $\pi(x_k) \leq 0$, amiből $\pi(x_k) = 0$. A 3.2.13 lemmából kapjuk, hogy $\pi(x_1) = \pi(y_2), \pi(x_2) = \pi(y_3), \ldots, \pi(x_{k-1}) = \pi(y_k)$. Ezt a 3.2.12 lemmával összevetve kapjuk, hogy a $0 = \pi(x_k), \pi(y_k), \pi(y_{k-1}), \pi(y_{k-2}), \ldots, \pi(y_1) = \alpha$ egész számokból álló sorozat olyan, hogy minden tagja legfeljebb eggyel nagyobb a megelőzőnél. Íly módon minden i-re $(1 \leq i \leq \alpha)$ kell olyan m indexnek lennie, amelyre $\pi(x_m) = \pi(y_m) + 1 = i$. Vagyis $p_m \in C_j \cap A_i$. •

Tegyük most fel, hogy a minimális költségű folyamot kiszámító algoritmus a következőképpen futott le. Kiindulva a π azonosan nulla potenciálból és a z azonosan nulla folyamból, a folyam nagysága egyenként k_0-ig nő, a potenciál nagysága (ami definíció szerint a $\pi(t)$ érték) egyenként i_1-ig, azután ismét a folyam nagysága k_1-ig, …, stb. Végül a folyam nagysága k_q-ra, a potenciál nagysága i_q-ra nő. Az algoritmus a maximális nagyságú folyam elérésekor ér véget, amely nagyság esetünkben n, azaz $k_q = n$.

Legyen $a := n - k_0$ és $j_i := k_i - k_0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Az utolsó lemma alapján az algoritmus $(k_0, 1)$ paraméterekkel jellemzett fázisához a $\mathcal{C}_a$ a tagú lánc-család és az $\mathcal{A}_1$ egytagú antilánc-család tartozik, melyek ortogonálisak egymásra. Ezután a potenciál nagysága, mint már említettük, egyenként i_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}$ antilánc-családok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{C}_a$-ra. Ezután a folyam értéke egyenként k_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ lánc-családok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{A}_{i_1}$-re, és így tovább. Ezzel a tétel bizonyítását és az algoritmus ismertetését befejeztük. • •

Feladat 3.2.2 *Dilworth után nevezzünk egy maximális (azaz a elemszámú) antiláncot* **D-antilánc***nak. Igazoljuk, hogy a diszjunkt D-antiláncok maximális száma egyenlő a D-antiláncokat lefogó elemek minimális számával.* (Segítség: Tekintsük a 3.2.11 tételben leírt sorozat $\mathcal{A}_{i_1} | \ \mathcal{C}_{a-1}$ tagjait.)

March 9, 2009file: lgreen

Fejezet 4

PÁROSÍTÁSOK

4.1 PÁROS GRÁFOK

4.1.1 Maximális elemszámú párosítások

Az egész elmélet kiindulópontja Kőnig klasszikus tétele.

TÉTEL 4.1.1 (Kőnig Dénes) *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

Biz. Egy ν elemű párosítás lefogásához kell legalább ν csúcs, így az összes élhez is kell, ezért $\nu \leq \tau$. Ebből az is következik, hogy $(*)$ *egy ν elemű L lefogás egy ν elemű párosítás minden élét pontosan egyszer fogja le.*

A fordított irányhoz lássuk be, hogy G élei lefoghatók $\nu(G)$ ponttal. Indirekt, legyen G minimális ellenpélda abban az értelemben, hogy $\nu(G) < \tau(G)$, de minden G-nél kisebb G' gráfra $\nu(G') = \tau(G')$.

Minden u csúcsot elkerül maximális párosítás, mert ha valamelyiket nem, úgy $\nu(G-u) < \nu(G)$, és miután $G-u$ élei már lefoghatók $\nu(G-u) \leq \nu(G) - 1$ ponttal, ezen lefogáshoz u-t hozzávéve G éleinek egy legfeljebb $\nu(G)$ elemű lefogását kapnánk.

Legyen $e = st$ a gráf egy éle, melyre $s \in S, t \in T$. A $G - e$ éleinek létezik $\nu(G)$ elemű $L := A \cup B$ lefogása, ahol $A \subseteq S, B \subseteq T$. Az L nem fogja le e-t, mert különben G éleinek is $\nu(G)$ elemű lefogása volna. $G - s$-nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek B-t fedő M_B része $(*)$ miatt nem fedi A egyetlen pontját sem. $G - t$-nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek A-t fedő M_A része $(*)$ miatt nem fedi B egyetlen pontját sem. De most $M_A \cup M_B \cup \{e\}$ párosítása G-nek, melynek elemszáma $|A| + |B| + 1 = \nu(G) + 1$, ellentmondás. •

A most következő algoritmikus bizonyítás lényegében Kőnig eredeti bizonyítása kicsit algoritmikusabb nyelven elmondva. (Kőnig nem tekintette explicit azt a kérdést, hogy miként lehet megtalálni a szóbanforgó alternáló utakat, de a bizonyításából ez közvetlenül kiolvasható.)

Algoritmikus bizonyítás.

A nemtriviális $\nu \geq \tau$ irány igazolásához konstruálunk egy M párosítást és egy L lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges M párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb párosítást, és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan iteráljuk az eljárást, vagy pedig egy $|M|$-mel megegyező elemszámú lefogást, amikoris az algoritmus véget ér.

Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S-ben illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg).

Két eset lehetséges. Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkapunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. (Technikailag az eljárást nagyon egyszerű végrehajtani: a megtalált út éleinek irányítását egyszerűen megfordítjuk.)

A másik esetben R_T diszjunkt Z-től. Z definíciója folytán Z-ből nem lép ki irányított él. Érvényes továbbá, hogy Z-be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosítás él, hiszen v csak u-n keresztül érhető el, így v csak akkor lehetett irányított úton elérhető R_S-ből, ha u is az volt.

Következik, hogy az $L := (T \cap Z) \cup (S - Z)$ halmaz egyrészt lefogja az összes élt, másrészt minden M-beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. •

A fenti bizonyítás egyúttal hatékony algoritmust is jelent a szóbanforgó optimumok meghatározására. A lépésszám megbecsléséhez figyeljük meg, hogy legfeljebb $n/2$ alkalommal kell utat keresnünk. Miután egyetlen út megkeresése az élszámmal arányos időben történhet, az összlépésszám nem nagyobb, mint $O(nm)$ (ahol n a gráf pontszáma, míg m az élszáma).

A Kőnig tételhez szorosan kapcsolódik Hall tétele.

TÉTEL 4.1.2 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik S-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-féle feltétel:*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra,} \tag{4.1}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon T-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

A tételt rögtön kicsit általánosabb alakban igazoljuk. Definiáljuk egy $X \subseteq S$ halmaz **hiányát** a $h(X) := (|X| - |\Gamma(X)|)$ értékkel és legyen $\mu = \mu(G, S)$ a maximális hiány, azaz

$$\mu := \max_{X \subseteq S} h(X) \tag{4.2}$$

TÉTEL 4.1.3 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által nem fedett S-beli pontok minimális száma egyenlő μ-vel.*

Biz. A max $\leq$ min egyenlőtlenség nyilván fennáll. A fordított irány igazolásához legyen M egy maximális (azaz ν elemű) párosítás és L egy minimális (azaz $\tau = \nu$ elemű) lefogás. Legyen $X := S - L$. Ekkor M pontosan $|S| - \nu$ elemét nem fedi S-nek. Másrészt $\Gamma(X) \subseteq L - S$ és így $|X| - |\Gamma(X)| \geq |S - L| - |L - S| = |S| - |L| = |S| - \tau = |S| - \nu$. •

Legyen $\mathcal{F}$ az S maximális (azaz μ) hiányú részhalmazainak rendszere, vagyis $\mathcal{F} := \{X \subseteq S : |X| - |\Gamma(X)| = \mu\}$. Az $\mathcal{F}$ tagjait röviden **max-hiányú** halmazoknak fogjuk hívni. Az előbbi bizonyítás mutatja, hogy egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn a minimális lefogások és a max-hiányú S-beli halmazok között: Ha L minimális lefogás, akkor $S - L$ max-hiányú halmaz, míg ha $H \subseteq S$ max-hiányú halmaz, akkor $\Gamma(H) \cup (S - H)$ minimális lefogás lesz.

Lemma 4.1.4 *$\mathcal{F}$ zárt a metszet és unió képzésre.*

Biz. Könnyű ellenőrizni, hogy a h függvény szupermoduláris, azaz $h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y)$. Tegyük most fel, hogy X és Y két maximális hiányú halmaz (azaz $\mathcal{F}$ elemei). Ekkor $\mu + \mu = h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y) \leq \mu + \mu$, és emiatt valóban $h(X \cap Y) = \mu, h(X \cup Y) = \mu$. •

A lemmából következik, hogy az összes max-hiányú halmaz metszete is és uniója is max-hiányú, azaz létezik egy egyértelmű legszűkebb és egy legbővebb max-hiányú halmaz. Megjegyzendő, hogy Kőnig fenti alternáló utas algoritmusa segítségével e két halmaz könnyen megkonstruálható. Például, a legszűkebb K max-hiányú halmaz, amint azt könnyű kimutatni, éppen $Z \cap S$ lesz, ahol Z jelölte az irányított segédgráfban az R_S-ből elérhető pontok halmazát. Ez egyúttal azt is mutatja, hogy az algoritmus által produkált $(S - K \cup \Gamma(K))$ lefogás nem függ az algoritmus futásától (szemben az algoritmus által szolgáltatott párosítással). A súlyozott párosítási algoritmus bizonyításához szükségünk lesz még az alábbi hasznos megfigyelésre.

Lemma 4.1.5 *Legyen $K \subseteq S$ a legszűkebb max-hiányú halmaz G-ben. Ha a gráfból kitöröljük az összes olyan élt, amely $\Gamma(K)$ és $S - K$ között vezet, akkor a létrejövő G' gráfban a maximális hiány ugyanaz, mint G-ben. Továbbá G és G' max-hiányú halmazainak rendszere ugyanaz.*

Biz. Miután G egy M maximális párosításának a $\Gamma(K)$-t fedő élei mind K-ban végződnek, az M benne van G'-ben is, vagyis G' max hiánya legfeljebb akkora, mint G-é, de persze kisebb nem lehet, mert G' részgráfja G-nek. Ebből az is következik, hogy a G egy max-hiányú halmaza G'-ben is max-hiányú. Legyen most X tetszőleges max-hiányú halmaz G'-ben. Mivel K max-hiányú G'-ben is, a 4.1.4 lemma szerint $K \cap X$ is max-hiányú G'-ben. De akkor $K \cap X$ max-hiányú G-ben, hiszen $K \cap X$ből indulo'élt nem töröltünk, és így a K minimalitása folytán $K \subseteq X$. Ekkor viszont $\Gamma(X) = \Gamma'(X)$, azaz X max-hiányú G-ben is. •

4.1.2 Súlyozott párosítások

TÉTEL 4.1.6 (Egerváry) *Legyen $G = (V, E)$ teljes páros gráf, melynek pontjai két n elemű osztályba vannak sorolva. Legyen továbbá $c : E \to \mathbf{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokkal történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításainak maximális súlya egyenlő a nemnegatív súlyozott lefogások minimális súlyával, ahol nemnegatív súlyozott lefogáson egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}_+$ függvényt értünk, amelyre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek.*

Egerváryhoz a 4.1.6 tételre adott eredeti bizonyításának a váza a következő. Legyen π egy minimális súlyú nemnegatív, egészértékű súlyozott lefogás. (A π súlyán a $\sum[\pi(v) : v \in S \cup T]$ összeg értendő.) Feltehetjük, hogy π az S elemein mindenütt pozitív, mert ha nem, akkor az S-beli pontokon eggyel növelve, a T-beli pontokon eggyel csökkentve már ilyen lesz. Amennyiben azon élek G_π részgráfjában, melyekre $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$ létezik teljes M párosítás, úgy M maximális súlyú párosítás, melynek súlya egyenlő a $\pi(v)$ értékek összegével. Ha viszont G_π-ben nincs teljes párosítás, úgy Kőnig vagy Hall tétele alapján létezik hiányos X halmaz, azaz olyan, amelynek $|X|$-nél kevesebb szomszédja van. A π értékeit az X pontjain eggyel csökkentve, a $\Gamma_{G_\pi}(X)$ pontjain pedig eggyel növelve, egy másik nemnegatív, súlyozott lefogást kapunk, amelynek súlya kisebb, mint π-é, ellentmondásban π minimális választásával.

Ez a bizonyítás könnyen algoritmizálható, hiszen tetszőleges π súlyozott lefogásból kiindulva vagy talál egy maximális súlyú teljes párosítást, és ekkor az aktuális π is optimális, vagypedig talál egy jobb súlyozott lefogást, amivel az eljárást iterálva véges sok lépés után az első eset következik be. Egy kézenfekvő gyorsítási lehetőség azonnal kínálkozik: a π súlyozott lefogás módosításakor ne eggyel növeljünk vagy csökkentsünk, hanem a legnagyobb olyan δ értékkel, amelyre a módosított π' még súlyozott lefogás. Az így nyert eljárást nevezzük Egerváry algoritmusának. (Hangsúlyozzuk, hogy ez nem ugyanaz, mint a H. W. Kuhn által kifejlesztett primál-duál eljárás, amit ma valójában a világban Kuhn javaslata nyomán Magyar Módszernek hívnak.)

Az Egerváry algoritmusnak az az előnye is megvan, hogy nem egészértékű c súlyfüggvényre is működik, bár ekkor még az is kérdés, hogy az eljárás véges-e egyáltalán, és Egerváry valójában a nemegész c esetét nem algoritmikusan, hanem folytonossági megfontolásokkal intézte el.

Nem kevésbé fontos a másik kérdés, hogy Egerváry algoritmusa milyen hatékony, akár egész a c, akár nem. Példával megmutatható, hogy ha tetszőleges olyan X halmazt használunk a π módosítására, amely megsérti a Hall-féle feltételt, akkor az algoritmus nem polinomiális futásidejű (és ez a kellemetlenség még akkor is előfordulhat, ha X maximális hiányú halmaz.) Ráadásul irracionális költségek esetén még azt sem tudjuk, hogy az algoritmus véges sok lépés után megáll-e.

Egerváry azonban bizonyításában azt javasolja, hogy a π változtatását annak a maximális hiányú X halmaznak a segítségével végezzük, amelyet Kőnig alternáló utas algoritmusa szolgáltat, amely tehát a(z egyértelmű) legszűkebb max-hiányú halmaz. Az alábbiakban kimutatjuk, hogy Egerváry algoritmusa ilyenkor polinomiális, sőt erősen polinomiális futásidejű. Mivel nem jelent semmilyen többlet nehézséget, a bizonyítást rögtön a tétel azon csöppnyit általánosabb alakjára mondjuk el, amikor a páros gráf nem feltétlenül teljes, csupán azt írjuk elő, hogy tartalmazzon teljes párosítást.

TÉTEL 4.1.7 *Tegyük fel, hogy a $G = (S, T; E)$ páros gráfnak van teljes párosítása. Legyen továbbá $c : E \to \mathbf{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokkal történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításainak maximális súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális súlyával, ahol súlyozott lefogáson egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvényt értünk, amelyre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek. Amennyiben G teljes páros gráf, az optimális π választható nemnegatívnak.*

Biz. Tetszőleges M teljes párosításra és π súlyozott lefogásra fennáll, hogy $\sum(\pi(z) : z \in S \cup T) = \sum([\pi(u) + \pi(v)] : uv \in M) \geq \sum(c(uv) : uv \in M)$, vagyis a minimum valóban lagalább a maximum. Az is kiolvasható, hogy itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha az M párosítás minden uv éle **pontos** abban az értelemben, hogy $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$. Célunk tehát azt kimutatni, hogy létezik egy olyan π, amelyre nézve a pontos élek gráfjában létezik teljes párosítás.

Legyen π egy olyan súlyozott lefogás (egészértékű, ha c az), amelyre a pontos élek $G_\pi = (S, T; E_\pi)$ részgráfjában a $\mu_\pi (= |S| - \nu(G_\pi))$ érték minimális, és ezen belül, az (egyértelmű) legszűkebb max-hiányú $K \subseteq S$ halmaz a lehető legnagyobb. Készen vagyunk, ha a μ_π maximális hiány nulla, mert ez épp azt jelenti, hogy G_π-nek van teljes párosítása. Tegyük fel tehát, hogy $\mu_\pi > 0$. Mivel G-nek van teljes párosítása, biztosan van olyan e éle G-nek, amely K és $T - \Gamma_\pi(K)$ között vezet, ahol $\Gamma_\pi(K)$ jelöli a K szomszédainak halmazát a G_π-ben. Ilyen él nem pontos, így a

$$\delta := \min(\pi(u) + \pi(v) - c(uv) : uv \in E, u \in K, v \in T - \Gamma_\pi(K)) \tag{4.3}$$

érték pozitív. Módosítsuk π-t úgy, hogy a K-minden elemén δ-val csökkentjük, míg $\Gamma_\pi(K)$ minden elemén δ-val növeljük, azaz

$$v \in K \text{ -ra } \pi'(v) := \pi(v) - \delta, v \in \Gamma_\pi(K) \text{ -ra } \pi'(v) := \pi(v) + \delta, \text{ egyébként } \pi'(v) := \pi(v). \tag{4.4}$$

A δ választása miatt az így módosított π' továbbra is súlyozott lefogás, amely egészértékű, ha c az volt. A π'-ra vonatkozó pontos élek $G_{\pi'}$ gráfja abban különbözik G_π-től, hogy van legalább egy éle (ahol a δ-t definiáló minimum felvétetett) K és $T - \Gamma_\pi(K)$ között, de biztosan nincsen éle $T \cap \Gamma_\pi(K)$ és $S - K$ között (miközben G_π-nek lehetett). A 4.1.5 lemma szerint $\mu_{\pi'} = \mu_\pi$, és $G_{\pi'}$-ben a legszűkebb max-hiányú halmaz szigorúan bővebb, mint K, és ez ellentmond π választásának.

Beláttuk tehát, hogy van olyan π súlyozott lefogás, amelyre a pontos élek részgráfjában van teljes párosítás. Végül tegyük fel, hogy G teljes páros gráf, és igazoljuk, hogy π választható nemnegatívnak. Legyen a π

legnegatívabb értéke $-\alpha$ ahol $\alpha > 0$ és legyen $\pi(v) = -\alpha$, ahol v mondjuk S-ben van. ekkor minden $u \in T$ csúcsra $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv) \geq 0$ miatt $\pi(u) \geq \alpha$. Így ha π-t úgy módosítjuk, hogy S elemein növeljük α-val, míg T elemein csökkentjük α-val, akkor egy másik minimális súlyozott lefogás keletkezik, amelyik már nemnegatív. •

Az is belátható, hogy az optimális súlyozott lefogás pontosan akkor választható nemnegatívnak, ha a maximális súlyú párosítás teljes párosításon vétetik fel (amely feltétel persze teljes páros gráf esetén fennáll.)

A bizonyítás alapján Egerváry algoritmusa a következő. Az algoritmus bemenete egy teljes párosítással rendelkező páros gráf, míg a kimenete egy maximális súlyú párosítás és egy minimális súlyú súlyozott lefogás. Szubrutinként szükségünk van a súlyozatlan esetre vonatkozó fentebb ismertetett alternáló utas algoritmusra, amely egy tetszőleges $G' = (S, T; E')$ páros gráfban megkonstruál egy maximális M' párosítást és a(z egyértelmű) legszűkebb $K' \subseteq S$ max-hiányú halmazt (melyekre tehát $|M'| = |\Gamma'(K')| + |S - K'|$.) Hivatkozás kedvéért ezt Kőnig szubrutinnak nevezzük.

Az algoritmus egy általános lépésében rendelkezésre áll egy π súlyozott lefogás (amely egészértékű, ha c az, és amely kezdetben lehet például az azonosan α lefogás, ahol α a $c(e)$ költségek maximuma. Alkalmazzuk a Kőnig szubrutint a π-re nézve pontos élek G_π részgráfjára. Amennyiben G_π-ben van M teljes párosítás, úgy az algoritmus az aktuális π súlyozott lefogás és M teljes párosítás kiadásával véget ér. Ha viszont G_π-nek nincs teljes párosítása, úgy a szubrutin által szolgáltatott (G_π-re nézve) legszűkebb K_π max-hiányú halmaz segítségével 4.4 szerint módosítjuk π-t, és az eljárást iteráljuk.

Mi mondható az algoritmus lépésszámáról? Tekintsük egy fázisnak az algoritmus azon szakaszát, amíg a pontos élek (egyre változó) részgráfjában a maximális hiány változatlan. Nyilván legfeljebb $|S|$ fázis létezik. Egy fázis során a szubrutint legfeljebb $|S|$-szer hívjuk meg, hiszen beláttuk, hogy a π cseréjekor a legszűkebb max-hiányú halmaz szigorúan bővül. Vagyis a súlyozatlan esetre vonatkozó alternáló utas algoritmusnak legfeljebb $|S|^2$-szeri meghívásával az algoritmus futása befejeződik. Miután Kőnig algoritmusának lépésszámára $O(|S||E|)$ korlát volt mondható, a leírt súlyozott eljárás teljes futásideje $O(|S|^3|E|)$.

Bár ez a lépészám nem különösebben látványos (és valójában hatékonyabb eljárások is léteznek), mindenesetre azt megkaptuk, hogy az algoritmus polinomiális futásidejű, sőt erősen polinomiális is abban az értelemben, hogy a futásidő egyáltalán nem függ a szereplő c költségfüggvénytől, amennyiben feltesszük, hogy a számokkal végzett összadást, kivonást és összehasonlítást egyetlen lépésben tudjuk elvégezni.

A jelen megközelítés előnye, hogy tisztán mutatja a súlyozatlan és a súlyozott párosítási algoritmusok viszonyát. A súlyozatlan Kőnig-féle algoritmus teljesen szeparáltan, szubrutinként kerül felhasználásra. Amint azt H. W. Kuhn megmutatta, a két eljárás összevonható, aminek talán hátránya, hogy az algoritmus összetettebbé válik, de előnye, hogy jobb lépésszám becslés adódik. Most ismertetjük a Kuhn által javasolt Magyar Módszert.

Kuhn algoritmusa súlyozott teljes párosítás meghatározására

Az általános lépésben tekintjük a pontos élek által (az $S \cup T$ ponthalmazon) alkotott G_π részgráfot. Legyen M egy már rendelkezésre álló párosítás G_π-ben. Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi G_π-beli élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S-ben illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg). Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkaptunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. Ekkor az eljárás egy fázisa véget ér, és az új M' párosítással folytatva iteráljuk az eljárást.

Nézzük most azt az esetet, amikor R_T diszjunkt Z-től. Legyen $K_\pi := Z \cap S$ és módosítsuk π-t a 4.4-ben leírtak szerint. Ekkor az R_S-ből elérhető pontok halmaza szigorúan bővül. Így egy fázis (ami alatt tehát a pontos élek gráfjában a maximális párosítás elemszáma nem nő) $|S|$ útkereső eljárás alkalmazása után véget ér. Mivel egy útkeresés $O(|E|)$ lépésben végrehajtható és legfeljebb $|S|$ fázis van, az algoritmus teljes futásideje $O(|E||S|^2)$.

A fejezet lezárásaképp megmutatjuk, hogy a maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosítás meghatározásának problémája egyszerű fogással visszavezethető a maximális súlyú teljes párosítására.

TÉTEL 4.1.8 *Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális ν'_c súlya egyenlő a nemnegatív (!) súlyozott lefogások minimális τ'_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π' is választható egészértékűnek.*

Biz. A $\nu'_c \leq \tau'_c$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, így csak a fordított iránnyal foglalkozunk. Új pontok esetleges hozzávételével elérhetjük, hogy a páros gráf két osztálya egyforma méretű legyen. Egészítsük ki a gráfot 0 súlyú élek bevételével egy G teljes páros gráffá. A súlyfügvény ezen kiterjesztését továbbra is jelölhetjük c-vel. A 4.1.7 tétel (második része) szerint G-nek létezik egy M teljes párosítása és c-nek egy π nemnegatív súlyozott lefogása, melyekre $c(M) = \sum \pi(v)$. Mivel az új élek súlya 0, így az új élek kihagyásával M-ből keletkező G'-beli M' párosítás súlya változatlanul $c(M)$. Miután új pontból (ha van) csak 0 súlyú él megy ki, így π értéke az új pontokon 0, vagyis, ha π-t megszorítjuk az eredeti pontokra, akkor a kelektező π'-re $\sum \pi'(v) = \sum \pi(v)$, és így $\sum \pi'(v) = c(M')$. •

Végül megjegyezzük, hogy tetszőleges rögzített k pozitív egészre Ford és Fulkerson minimális költségű folyam algoritmusának segítségével ki lehet számolni a maximális (vagy minimális) súlyú k élű párosítást, ha ilyen párosítás egyáltalán létezik.

file: umagyar,

4.2 Minimális költségű fenyők

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, amelynek egy adott s pontjából minden más pontja elérhető irányított úton, ami azzal ekvivalens, hogy D tartalmaz feszítő s-fenyőt. Adott az éleken egy nemnegatív $c : A \to \mathbf{R}_+$ költség- (vagy másnéven súly-) függvény. Keressünk minimális összköltségű feszítő s-fenyőt.

Egy $z : 2^{V-s} \to \mathbf{R}_+$ halmazfüggvényt **c-megengedettnek** nevezünk, ha

$$c(e) \geq \sum(z(X) : e \text{ belép } X\text{-be}) \quad \text{minden } e \in E \text{ élre.} \tag{4.5}$$

TÉTEL 4.2.1 *[Fulkerson, 1974] Az s-fenyők minimális költsége egyenlő $max\{\sum[z(X) : X \subseteq V - s] : z$ c-megengedett$\}$. Továbbá, ha c egészértékű, akkor az optimális z választható egészértékűnek.*

Biz. Legyen F feszítő s-fenyő és z egy c-megengedett vektor. Ekkor

$$c(F) = \sum(c(a) : e \in F) \geq \sum(\sum(z(X) : e \text{ belép } X- \text{ be}) : e \in F) \geq \sum(z(X) : X \subseteq V - s) \tag{4.6}$$

amiből max $\leq$ min következik. (4.6)-ben akkor van végig egyenlőség, ha a következő optimalitási feltételek teljesülnek.

$$c(e) = \sum(z(X) : e \text{ belép } X\text{-be}) \text{ minden } e \in F \text{ élre,} \tag{4.7}$$

$$z(X) > 0 \text{ esetén } \varrho_F(X) = 1. \tag{4.8}$$

Az alábbi algoritmus egy olyan F feszítő s-fenyőt és megengedett z-t konstruál, amelyre (4.7) és (4.8) teljesül. Két fázisból áll. Az elsőben z-t konstruáljuk meg, míg a másodikban F-t. Mindkét rész egyfajta értelemben mohó lesz. Az első fázis minden lépésében módoítjuk a költségfüggvényt, és az aktuális költségfüggvényt c'-vel fogjuk jelölni. Egy e élt a c' aktuális költségfüggvényre nézve **0-élnek** nevezzük, ha $c'(e) = 0$.

1. fázis *Amíg van $V - s$-nek olyan nemüres részhalmaza, amelybe nem lép be 0-él, ismételjük a következő lépést. Válasszunk egy olyan minimális nemüres $X \subseteq V - s$ részhalmazt, amelybe nem lép 0-él. Legyen $z(X) := \min(c'(e) : e$ belép X-be) és csökkentsük $c'(e)$-t a $z(X)$ értékkel az összes X-be lépő e élen.*

A módosított c' továbbra is nemnegatív, és mindazokon az X-be belépő éleken 0-vá vált, amelyeken az előbbi minimum eléretik. Az 1. fázis tehát akkor fejeződik be, amikor már minden $X \subseteq V - s$ részhalmazba lép be 0-él, vagyis amikor már létezik 0-élekből álló feszítő s-fenyő.

2. fázis *Az s pontból kiindulva, 0-élek egymás utáni hozzávételével felépítünk egy F s-fenyőt. Ha az építési eljárás egy lépésében több, mint egy olyan 0-él van, amely a már megkonstruált részfenyő ponthalmazából kilép, akkor azt az élt adjuk a részfenyőhöz, amely az 1 fázis során a leghamarabb vált 0-éllé.*

Az előállítás szabályai miatt világos, hogy a megkonstruált z vektor c-megengedett, továbbá, hogy (4.7) fennáll.

Lemma 4.2.2 *z és F kielégítik (4.8)-t.*

Biz. Legyen X olyan halmaz, amelyre $z(X) > 0$ és tegyük fel indirekt, hogy $\varrho_F(X) > 1$. Ekkor a 2. fázisnak van egy olyan pillanata, amikor az aktuális F' részfenyő olyan, hogy $\varrho_{F'}(X) = 1$ és az F'-höz éppen hozzáadásra kerülő e él belép X-be.

Tekintsük most az 1. fázisnak azt a pillanatát, amikor $z(X)$ pozitív lett. Ekkor az X-be még nem lépett 0-él, ugyanakkor az X-nek már minden valódi nemüres részhalmazába lépett. Speciálisan, az $X - V(F')$ halmazba is lépett egy f 0-él, és mivel ez X-be nem léphetett, így f töve $X \cap V(F')$-ben van. Az f tehát már $z(X)$ pozitívvá válásának pillanatában 0-él volt, amikor még e nem volt az. Miután az f éllel is lehetne növelni az F' részfenyőt, ellentmondásra jutottunk a 2. fázis választási szabályával, amely szerint a legkorábban 0-éllé vált éllel kell növelni az aktuális részfenyőt. •

A lemmából következik, hogy az algoritmus által megtalált F feszítő s-fenyő és z megengedett duális megoldás kielégítik az optimalitási feltételeket, amiből az algoritmus helyessége, valamint Fulkerson tétel is következik. • •

Az előbbihez kapcsolódik a következő probléma. Legyen $D = (V, E)$ ismét egy irányított gráf éleinek halmazán egy w súlyfüggvénnyel. Keressünk maximális súlyú fenyvest!

Egy (p, y) párt **fedésnek** nevezünk, ha $p : V \to R_+$ és $y : 2^V \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív függvények melyekre $w(u, v) \leq p(v) + \sum(y(B) : u, v \in B \subseteq V)$ teljesül minden $uv \in E$ élre. A fedés **értéke** $\sum(p(v) : v \in V) + \sum(y(B)(|B| - 1) : B \subseteq V)$.

TÉTEL 4.2.3 (Chu and Liu – 1965, Edmonds – 1967) *Egy fenyves súlyának maximuma a fedések minimális értékével egyenlő. Ha w egészértékű, akkor az optimális fedés is választható annak.*

Biz. Könnyen látszik, hogy $max \leq min$. A fordított irány belátásához egészítsük ki D-t egy új s ponttal és vezessünk s-ből minden $v \in V$ pontba egy új sv élt. A megnövelt D' digráfon definiáljunk egy c költségfüggvényt a következőképpen. Az új élek költsége legyen $M := max(w(e) : e \in E)$, míg minden eredeti $e \in E$ élre legyen $c(e) = M - w(e)$.

Az 4.2.1 tétel szerint létezik $z : 2^V \to \mathbf{R}_+$ c-megengedett vektor és egy D'-nek egy F feszítő s-fenyője amelyek kielégítik (4.7)-t és (4.8)-t. Legyen $p(v) := M - \sum(z(B) : v \in B)$, és $|B| > 1$ esetén legyen $y(B) := z(B)$ $(B \subseteq V)$. Könnyen látható, hogy az így kapott (p, y) fedést alkot, továbbá, hogy az értéke egyenlő a D digráf $F \cap A$ fenyvesének súlyával. •

Feladat 4.2.1 *Legyen $T \subseteq V - s$ adott halmaz olyan, hogy a digráf minden pozitív költségű élének a feje T-ben van (a költségfüggvény nemnegatív). Olyan minimális költségű s gyökerű fenyő keresése, amely T minden pontját tartalmazza (de nem feltétlenül feszítő) speciális esete a T-metsző halmazrendszerek korábban tárgyalt lefogási problémájának. Mutassuk meg, hogy a feladat visszavezethető a minimális költségű feszitő fenyő problémájára.*

Feladat 4.2.2 *Igazoljuk hogy egy $D = (V, E)$ digráfban éleknek egy adott $F \subseteq E$ részhalmaza akkor és csak akkor egészíthető ki s gyökerű feszítő fenyővé, ha nem lehet úgy megadni a $V - s$ halmaznak $|V| - |F|$ darab nemüres részhalmazát, hogy ezek egyikébe sem lép F-beli él és $E - F$ minden eleme legfeljebb egybe lép.*

(Útmutatás. Alkalmazzuk az 4.2.1 tételt alkalmas költségfüggvényre.)

Feladat 4.2.3 *Tegyük fel, hogy adott $V - s$ részhalmazainak egy $\{A_1, \dots, A_t\}$ rendszere. Hogyan lehetne algoritmikusan eldönteni, hogy a digráf tartalmaz-e olyan feszítő fenyőt, amely mindegyik A_i halmazba pontosan egyszer lép bele?*

(Útmutatás. Keressünk minimális költségű fenyőt okosan választott költségfüggvényre.)

Feladat 4.2.4 *Tegyük most fel, hogy létezik olyan s-gyökerű feszítő fenyő, amely az $\{A_1, \dots, A_t\}$ halmazok mindegyikébe egyetlen éllel lép bele. Készítsünk algoritmust, amely az ilyen fenyők közül egy megadott költségfüggvényre vonatkozó minimális költségűt talál.*

4.3 Maximális párosítások általános gráfokban

Valamely G irányítatlan gráfra jelölje $\nu = \nu(G)$ a független élek maximális számát vagyis a legnagyobb párosítás elemszámát. Láttuk, hogy az alternáló utak módszerével miként lehet páros gráfban maximális elemszámú párosítást megkonstruálni. Az eljárás egyúttal bizonyította a Kőnig tételt is, amely szerint a szóbanforgó maximum egyenlő a pontokat lefogó élek minimális τ számával. Nem páros gráfokban a $\nu = \tau$ min-max reláció már nem feltétlenül igaz, amint ezt a háromszög példája mutatja. Itt $\nu = 1, \tau = 2$. Az általános gráfokra vonatkozó jellemzés W.T. Tutte-tól származik.

TÉTEL 4.3.1 (Tutte) *A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha a pontok tetszőleges X részhalmazára az X elhagyásával keletkező páratlan (pontszámú) komponensek száma legfeljebb $|X|$.*

Az X elhagyásával keletkező páratlan komponensek számát jelölje $q(X)$. Tetszőleges M teljes párosítás egy páratlan pontszámú halmazból páratlan sok éllel lép ki, így speciálisan legalább eggyel. Ebből látszik, hogy ha létezik teljes párosítás, akkor $q(X)$ legfeljebb $|X|$, azaz a Tutte-féle feltétel szükséges.

Az elegendőséget kicsit általánosabb alakban igazoljuk. Amennyiben teljes párosítás nem létezik, megkérdezhetjük, hogy milyen nagy létezik, azaz mekkora ν. Jelöljük a $q(X) - |X|$ különbséget $\gamma(X)$-szel. (A Tutte féle feltétel azt jelenti, hogy $\gamma(X) \leq 0$.) Tegyük most fel, hogy valamely X ponthalmazra $\gamma(X) > 0$. Ekkor tetszőleges M párosítás legalább $\gamma(X)$ pontot nem fed le, vagy másszóval M legfeljebb $|V| - \gamma(X)$ pontot fedhet le, azaz

$$|M| \leq (|V| - \gamma(X))/2. \tag{4.9}$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha

(a) *Az X elhagyásával keletkező bármely C komponensre az M-nek a C-be eső része legfeljebb egy pont híján fedi C-t.* (b) *X nem feszít M-beli élt.*

(c) *M fedi X minden pontját.*

Egy ilyen X halmazt **gátnak** nevezünk. A Tutte tétel általánosítása mármost a következő.

TÉTEL 4.3.2 (Berge-Tutte formula) *G-ben a független élek maximális ν száma egyenlő* $\max(|V| - \gamma(X))/2$-*vel, ahol a maximum V összes X részhalmazára megy.*

A fenti meggondolás alapján a max $\leq$ min egyenlőtlenség következik. A fordított egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

Létezik olyan M párosítás és pontoknak olyan X részhalmaza, melyekre (a), (b) és (c) fennáll.

Az alábbi J. Edmondstól származó algoritmus ilyen M-et és X-et konstruál meg. Az eljárás fázisokból áll. Egy fázisban valamely korábban megtalált M párosításból indulunk ki és keresünk egy olyan P M-alternáló utat, amely két szabad (azaz, M által nem fedett) pontot köt össze. Nevezzük az ilyen utat **növelő útnak.**

Amennyiben találunk egy P növelő utat, úgy az $M' := M \otimes P$ szimmetrikus differencia olyan párosítás lesz, amelynek eggyel több éle van, mint M-nek, és ekkor a következő fázisra térünk. Amikor az algoritmus már nem talál M-alternáló utat, akkor megad majd egy X részhalmazt, amely az aktuális M párosítással együtt kielégíti a három optimalitási feltételt.

Legyen tehát M valamilyen párosítás, S a szabad pontok halmaza és $v \in V - S$-re jelöljük $\mu(v)$-vel a v párosításbeli szomszédját. Az S pontjaira pedig definiáljuk $\mu(v) = v$. Az eljárás egy F **M-alternáló** erdőt épít fel, amely a következő tulajdonságú erdő.

(i) F-nek $|S|$ darab komponense van, mindegyike egyetlen szabad pontot tartalmaz, amely a komponens gyökere.

(ii) F bármely pontjából a gyökérhez vezető út M-alternáló.

(iii) Ha valamely fedett v pont F-ben van, akkor a $v\mu(v)$ él is F-hez tartozik.

Az F erdőben nem lévő pontok halmazát **tisztásnak** hívjuk és $C := C(F)$-fel jelöljük. Nyilván az M-nek C-ben levő élei C-t párosítják. **Külső** pontnak hívjuk az F azon pontjait, melyek a gyökértől páros távolságban vannak. F többi pontja **belső** pont. (Az elnevezés arra utal, hogy a végül kapott külső pontok, amint majd az Edmonds-Gallai tétel nyomán kiderül, olyanok, hogy mindegyikhez van egy őt nem lefedő maximális párosítás, míg a belső pontok mindegyikét valamennyi maximális párosítás fedi.)

Kiinduláskor F a szabad pontokból áll és élt nem tartalmaz. Az általános lépés leírásához legyen F M-alternáló erdő. Három esetet különböztetünk meg.

1. eset. Az F-nek létezik olyan u és v külső pontja, melyek az F különböző komponenséhez tartoznak és amelyek között vezet él a gráfban. Ekkor az u és v komponensében a gyökerekhez vezető két alternáló utat az uv él mentén összekapcsolva egy P növelő utat kapunk, és ekkor az adott fázis végetér.

2. eset. F-nek létezik olyan u külső pontja, amely szomszédos egy v tisztáson lévő v ponttal. Ekkor az uv élt és a $v\mu(v)$ párosító élt F-hez véve nagyobb M-alternáló erdőt kapunk.

3. eset. F-nek egy komponensében létezik u és v külső pont, melyek szomszédosak. Ekkor az F-ben az u-t és v-t összekötő egyértelmű út az uv éllel együtt egy páratlan kört alkot. Húzzuk össze ezt a kört egy ponttá. Ekkor F-ből egy másik alternáló erdő keletkezik, melynek az összehúzott pont külső pontja.

Nevezzünk valamely K páratlan kört **M-alternálónak,** ha valamely r pontjából a körön akármelyik irányba elindulva minden második él M-beli. Az r pontot a kör **bázisának** hívjuk. Az M-alternáló kör legfontosabb tulajdonsága, hogy

($*$) K bármely pontjából vezet a bázisba párosítás éllel kezdődő alternáló út.

A fenti 3. esetben egy M-alternáló páratlan kört húztunk össze. A ($*$) tulajdonságból látjuk, hogy ha az összehúzott gráfban létezik növelő út, akkor ebből előállíthatjuk az eredeti gráf egy növelő útját. Ebből az is következik, hogy ha az 1. eset olyankor fordul elő, amikor már bizonyos összehúzásokat végrehajtottunk, akkor az eredeti gráfnak is elő tudunk állítani egy növelő útját. Azt is megfigyelhetjük, hogy (esetleg többszöri) összehúzással keletkezett pont ősképe olyan halmaz, amelyet a beleeső M-beli élek egy pont híján kipárosítanak.

TEHÁT: Ameddig a 2. vagy 3. eset fordul elő, járjunk el az ott leírtak szerint. Amennyiben az 1. eset következik be, azaz az összehúzott gráfban van növelő út, akkor keressünk az eredeti gráfban növelő utat és egy nagyobb párosítást, majd térjünk a következő fázisra.

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, amikor a fenti három eset egyike sem áll fenn. Jelölje X a belső pontok halmazát, C a tisztást és D a külső pontok ősképeinek halmazát. Emlékezzünk rá, hogy belső pont sohasem összehúzott pont. Külső pontból csak belső pontba vezet él, ezért G-ben az X elhagyásakor a külső pontok ősképei páratlan komponensek lesznek. Így M és X kielégítik az optimalitási feltételeket. Evvel az algoritmus leírását és egyúttal a Berge-Tutte formula igazolását befejeztük. •

Feladat 4.3.1 *Vezessük le Tutte tételéből: (a) Petersen tételét (amely szerint 2-élösszefüggő 3-reguláris gráfban létezik teljes párosítás), (b) a Berge-Tutte formulát, (c) Hall tételét.*

4.3.1 Kritikus gráfok

A párosítások elméletében a következő fogalom alapvető fontosságú. Egy gráfot **faktor-kritikusnak** vagy röviden **kritikusnak** nevezünk, ha bármely pontját elhagyva létezik teljes párosítása.

(A matroidelmélet előadásban bebizonyítottuk Gallai Lemmáját, amely szerint, ha G olyan összefüggő gráf, amelynek bármely pontját elhagyva $\nu(G)$ csökken, akkor G faktor-kritikus. A bizonyítás azon múlt, hogy a feltevés szerint G párosítás matroidjának M^* duálisában nincsen hurok és bármely két szomszédos pont kételemű matroidbeli kört alkot. Ebből a G összefüggőségét felhasználva következik, hogy a V alaphalmaz M^*-beli rangja egy ,ami viszont azt jelenti, hogy G faktor-kritikus.)

Egy $Q \subseteq V$ páratlan pontszámú részhalmaz által feszített gráfot valamely M párosításra nézve **M-kritikusnak** mondunk, ha az M Q-ba eső élei egyetlen r pont, az ún **bázispont** kivételével lefedik Q-t és Q minden pontjából vezet r-be páros élszámú alternáló út (azaz olyan, amelynek első éle párosítás él.)

TÉTEL 4.3.3 *Legyen adott a G gráf egy M párosítása, amely az r pontot nem fedi le, a többit lefedi. A következők ekvivalensek:*

(a) G M-kritikus,
(b) G felépíthető a bázispontjából kiindulva M-alternáló utak illetve körök egymás utáni hozzávételével,
(c) G felépíthető bármely pontjából kiindulva páratlan élszámú utak és körök hozzávételével,
(d) G faktor-kritikus.

Biz. ($a \to b$) Tegyük fel, hogy r-ből kiindulva már felépítettünk G-nek egy részgráfját a megadott módon. Jelölje a részgráf ponthalmazát T. (A kezdetben T az egyetlen r pontból áll.) Akkor vagyunk készen, ha $T = V$, ekkor ugyanis a még G-ből esetleg hiányzó éleket egyélű M-alternáló utakként bevéve, megkapjuk G-t. Ha még $T \neq V$, akkor létezik olyan uv él, amelyre $u \in T, v \notin T$. (Miután a definícióból adódóan M-kritikus gráf összefüggő, ilyen él létezik.) A gráf M-kritikus, így v-ből létezik r-be vezető páros M-alternáló út. Legyen ennek p az első T-be eső pontja és jelölje P' az útnak v-ből p-be vezető szegmensét. Most az uv él a P'-vel együtt egy M-alternáló utat vagy kört alkot, amellyel T tovább építhető.

($b \to c$) Triviális, mert egy M-alternáló út páratlan élszámú.

($c \to d$) Fülek száma szerinti indukció. Két esetet kell különválasztani, annak megfelelően, hogy a kihagyandó pont az utolsó fülön van vagy sem.

($d \to a$) Legyen v a gráf tetszőleges pontja. Mivel G faktor-kritikus, $G - v$-nek létezik egy M_v teljes párosítása. Két párosítás szimmetrikus differenciája mindig diszjunkt alternáló körökből és utakból áll. Mivel mind M mind M_v a G-nek egyetlen pontját nem fedi le, így szimmetrikus differenciájuk egyetlen alternáló utat tartalmaz, és az a v és r pontokat köti össze. Így tehát létezik v-ből r-be páros élszámú M-alternáló út. •

Az alábbiakban megadunk egy kicsit bonyolultabb konstrukciót, amely M-kritikus gráfot eredményez. A tétel szemléletesen azt mondja, hogy ha egy páratlan kör pontjaiba M-kritikus gráfokat "fújunk be", akkor M-kritikus gráfot kapunk.

TÉTEL 4.3.4 *Tegyük fel, hogy a G gráfban az M párosítás egy r pont kivételével mindent lefed, továbbá, hogy a ponthalmaz fel van osztva páratlan sok diszjunkt M-kritikus részgráfra, melyek mindegyikét egyetlen pontra húzva M-kritikus (azaz M-alternáló) C páratlan kört kapunk. Ekkor G maga is M-kritikus.*

Biz. Vegyünk a gráfnak egy tetszőleges $v_1 = v$ pontját és mutassuk meg, hogy létezik v-ből r-be páros élszámú M-alternáló út. Amennyiben v és r ugyanabban a P_r partíció részben van, akkor P_r M-kritikussága miatt a kívánt út létezik.

Tegyük most fel, hogy a P_v és P_r partíció részek különbözők. Jelölje $P_1 := P_v, P_2, \ldots, P_t := P_r$ azokat a partíció részeket, amelyeket a C körben a P_v-ből a P_r-be menve kapunk, ha a P_1-ből kilépő r_1r_2 párosítás él felé indulunk el. (Tehát t páratlan!)

Először P_1-ben a v-ből indulva elmegyünk egy páros élszámú M-alternáló úton a P_1 gyökeréig, az ebbe jövő M-élen átmegyünk P_2-be. Legyen a P_2-ből kilépő nem-párosítás él u_2v_2 ahol $u_2 \in P_2, v_2 \in P_3$. Használjuk fordítva az u_2-ből r_2-be vezető páros élszámú M-alternáló utat, így már eljutottunk u_2-be. Most tovább lépünk az u_2v_2 élen a P_3-részbe, ahonnan a v_2 ponttal kezdve iteráljuk az eljárást. •

Amint láttuk, Edmonds algoritmusa megkonstruál egy gátat és egy párosítást, melyekre fennállnak az optimalitási kritériumok. A kapott gát és párosítás elvileg függhet az algoritmus futásától és a párosítás vonatkozásában ténylegesen ez is a helyzet; egy háromszög esetén például akármelyik maximális (:egy-élű) párosítást megadhatja. Annál meglepőbb, hogy az algoritmus által megtalált gát kizárólag a gráftól függ és független azoktól a választásoktól, amelyeket az algoritmus futása során tettünk. (Tehát például, ha az aktuális alternáló erdőt többféleképpen lehetett növelni, akkor a végül kapott gát nem függ attól, hogy melyik növelést választottuk.) Az algoritmus által talált gát éppen a Gallai-Edmonds tételben definiált kanonikus gáttal egyezik meg.

TÉTEL 4.3.5 (Gallai és Edmonds) *Jelölje $D(G)$ azon pontok halmazát, amelyeket G-nek valamely maximális párosítása nem fed le. Álljon $A(G)$ a $V - D(G)$ azon pontjaiból, melyeknek van $D(G)$-beli szomszédja, és legyen $C(G)$ a maradék pontok halmaza. Ekkor $A(G)$ gátja G-nek, éspedig éppen az, amelyet az algoritmus megtalál, $D(G)$ a $V - A(G)$ páratlan komponenseinek egyesítése, $C(G)$ pedig a $V - A(G)$ páros komponenseinek egyesítése. $D(G)$ komponensei faktor-kritikus gráfok. Végül, ha eltöröljük a páros komponenseket és az A-ban lévő éleket, és a páratlan komponensek mindegyikét összehúzzuk egy-egy pontra, akkor olyan páros gráfot kapunk, amelyben az A minden X nemüres részhalmazának legalább $|X| + 1$ szomszédja van.*

Biz. Tetszőleges A' gáthoz jelölje D' a $G - A'$ páratlan komponenseinek unióját, C' pedig a párosakét. Tetszőleges maximális M' párosítás esetén az M' lefedi a X'-t és C'-t. Ezért $D(G)$ biztosan része D'-nek.

Legyen most A' az algoritmus által talált gát. Csak azt kell kimutatnunk, hogy a külső pontok őseképének (ami D') minden v elemét fedetlenül hagyja valamely maximális elemszámú párosítás. Az 4.3.4 tétel szerint tudjuk, hogy egy külső pont ősképe M-kritikus, ezért létezik v-ből az alternáló fa gyökerébe egy P páros élszámú M-alternáló út. Ekkor P és M szimmetrikus differenciája egy maximális párosítás, amely elkerüli v-t.

A tétel utolsó részéhez azt figyeljük meg, hogy az algoritmus által talált alternáló erdőben a belső pontok akármely X részhalmazának legalább $|X + 1|$ külső pont szomszédja van. Ez pedig azért van így, mert a belső pontok másodfokúak, és ha mindegyik z belső pontra a belőle kiinduló uz, vz élt az uv éllel helyettesítjük, akkor egy erdőt kapunk, amelyre az állítás azt jelenti, hogy egy erdő tetszőleges X élhalmaza legalább $|X|$ ponttal érintkezik. Ez pedig közismert és egyszerű. •

Feladat 4.3.2 *Tekintsünk egy olyan gátat, amelyre az elhagyásával keletkező páratlan komponensek úniója minimális. Igazoljuk, hogy ez éppen a Gallai-Edmonds tételében lévő gát.*

4.4 Minimális súlyú teljes párosítás keresése

Legyen adva a $G = (V, E)$ gráf élein c nemnegatív költség-függvény, és tegyük fel G-nek létezik teljes párosítása. Az alábbiakban páratlan vágáson olyan vágást értünk, melynek két partja páratlan sok pontot tartalmaz.

A duális probléma: rendeljünk páratlan vágásokhoz változókat, melyek nemtriviális vágáson nemnegatívak és minden e élre az élt tartalmazó páratlan vágások változóinak összege legfeljebb $c(e)$, az él költsége. Az így hozzárendelt változókat **megengedettnek** hívjuk. (Egy páratlan vágás **triviális,** ha egyik oldala egypontú.)

Azaz,

$$\sum(y_B : e \in B) \leq c(e) \text{ minden } e \text{ élre,} \tag{$*$}$$

ahol az összegzés a B páratlan vágásokra megy.

Az élhalmazon egy súlyozást **páros körösszegűnek** nevezünk, ha egészértékű és minden kör súlya páros szám. Ha y egészértékű, akkor a $(*)$ baloldalán szereplő érték az élhalmazon páros körösszegű súlyozást definiál.

Legyen $c_y(e) := c(e) - \sum(y_B : e \in B)$. y megengedettsége azt jelenti, hogy c_y nemnegatív. Egy e élt, amelyre $c_y(e) = 0$ **telítettnek** vagy **pontosnak** fogunk hívni.

TÉTEL 4.4.1 *Teljes párosítás minimális költsége egyenlő* $\max\{\sum[y_B$: y *megengedett duális megoldás*$]\}$. *Amennyiben c páros körösszegű, úgy az optimális y választható egészértékűnek.*

Biz. Egyszerű becslés mutatja, hogy tetszőleges teljes párosítás költsége legalább akkora, mint a duális változók összege. Az egyenlőség kimutatásához megkonstruálunk egy M teljes párosítást és egy y megengedett duális megoldást, melyekre egyenlőség áll. Ez pedig pontosan akkor áll fenn, ha teljesül a következő két optimalitási kritérium.

1. M minden éle telített.
2. Minden B páratlan vágásra, amelyre $y_B > 0$, fennáll, hogy $|B \cap M| = 1$.

Az azonosan 0 duális megoldásból indulunk ki, ami nyilván megengedett. Az általános lépésben adott a következő alakú megoldás. Legyen $\mathcal{F}$ a csúcsok részhalmazainak olyan lamináris rendszer, melynek minden tagja páratlan elemszámú, és bármely tagjára az abban lévő maximális tagokat összehúzva a telített élek faktor-kritikus gráfot alkotnak. Egy B nemtriviális páratlan vágásra y_B akkor és csak akkor pozitív, ha B-t az $\mathcal{F}$ nem egyelemű tagja definiálja.

Jelölje G_0' az $\mathcal{F}$ maximális tagjai összehúzásával keletkező és csak telített éleket tartalmazó gráfot. Legyen adva G_0'-nek egy M' párosítása.

1. eset Amennyiben M' a G_0'-nek teljes párosítása, akkor az $\mathcal{F}$ tagjain kintről befelé haladva egyenként végigmegyünk, és M'-t kiegészítjük a G telített élekből álló teljes párosításává, amely $\mathcal{F}$ minden tagjába pontosan egy éllel lép be.

2. eset Ha M' nem teljes, akkor G_0'-ban valamely szabad pontból építünk egy F alternáló fát. (Ez egy apró különbség a "nem-súlyozott" algoritmushoz képest, ahol alternáló erdőt építettünk.) A következő esetek lehetnek.

1. M' növelése. F külső pontjából vezet G_0'-beli él szabad pontba. Ez meghatároz egy növelő utat. E mentén cserélve egy M'-nél eggyel nagyobb párosítást kapunk és erre nézve iteráljuk az eljárást.

A maximális elemszámú párosítást kereső algoritmushoz képest van egy fontos különbség. Ott, amikor alternáló utat találtunk, végrehajtjuk a növelést és az új, megnövelt párosítással mindent elölről kezdünk. Tehát eldobjuk a régi M-re felépített alternáló erdőt, az összehúzásokat, stb. Most, ha egy növelést végrehajtunk, akkor az eddigi alternáló fát ugyan eldobjuk, de a korábbi összehúzásokat megtartjuk. Ez azt jelenti, hogy az M' vizsgálatakor már vannak G_0'-ban olyan pontok, melyek az M' előtt lettek összehúzva. Így most előfordulhat, hogy az F alternáló fának belső pontja is (korábban) összehúzott pont.

2. Fa növelés. F egy külső u pontjából egy tisztáson lévő v pontba vezet G_0'-nek éle. Ekkor az uv élt és a $v\mu(v)$ élt a fához vesszük.

3. F két külső pontja között vezet él G_0'-ben. A keletkező páratlan kört összehúzzuk. Az új pont F külső pontja lesz.

4. Amennyiben az 1-2-3 lépések egyike sem hajtható végre, akkor megváltoztatjuk az y-t a következőképpen. A külső pontok ősképének duál-változóját növeljük, a belső pontok ősképének duál-változóját csökkentjük ugyanazzal az alább meghatározandó Δ értékkel. Minden külső pont ősképét $\mathcal{F}$-hez vesszük.

Legyen z belső pont korábban összehúzott pont, legyen zv a z-vel szomszédos M-beli él, és zu a z-vel szomszédos másik fabeli él. Amennyiben z ősképének a duál-változója nullává válik, akkor a z pont Z-vel jelölt ősképét kihagyjuk $\mathcal{F}$-ből. Ezenkívül z-t visszafújjuk abban az értelemben, hogy helyettesítjük azzal a C gráffal, amely a Z-ben lévő 0 módosított költségű élek gráfjából keletkezik az $\mathcal{F}$ maximális Z-ben fekvő tagjainak összehúzásával. $\mathcal{F}$ definíciója miatt a C gráf faktor-kritikus. Legyen v' a C-nek olyan pontja, melyre vv' telített él (vagyis az az él, mely a zv élt definiálta) és legyen M_C a $C - v'$ egy teljes párosítása. Vegyük M-hez az M_C elemeit. Ezenkívül a C-ben vegyünk egy M_C-ben alternáló P utat a v' pont és az u pont között (ilyen van, mert C faktor-kritikus). Most a G_0'-ben lévő alternáló fa a P úttal együtt a z felfújásával keletkezett gráfban alternáló fát alkot.

Mekkora legyen Δ? Az alábbi m_1, m_2, m_3 mennyiségek minimuma. Legyen m_1 a külső pontokból a fán kívüli pontokba (azaz tisztás plusz többi szabad pont) menő G-beli (!) élek módosított költségeinek minimuma. Mivel a 2. lépés nem volt alkalmazható, m_1 pozitív. Legyen m_2 a fában szereplő összehúzott belső pontok duálváltozóinak minimuma. Végül legyen m_3 az F fa külső pontjait összekötő G-beli élek módosított költségének minimumának a fele. Mivel a 3. lépés nem volt alkalmazható, az m_3 pozitív.

Alapvető megfigyelés, hogy bármely uv élnek, amelyik a fában két külső pontot köt össze, a módosított költsége páros. Ez azért van így, mert uv a fában egy olyan G'_0-beli C kört definiál, melynek minden más éle telített, azaz 0 módosított költségű. Mármost bármely összehúzott pont őseképe a telített éleken összefüggő, így a C körből előállítható az eredeti G gráf egy köre, melynek minden éle, az uv él (őseképének) kivételével, telített. De a páros körösszeg tulajdonság miatt ebből következik, hogy $c_y(uv)$ páros.

Ezen megfontolásból alapján m_3 is egész szám. Könnyen látszik, hogy az új duális megoldás is megengedett. Az algoritmust az új párosításra, az új alternáló fára és az új duál-változókra iteráljuk.

Milyen lépés-szám becslés adható a fenti algoritmusra? A szabad pontok száma sohasem növekszik és párosítás növeléskor csökken. Nevezzük az algoritmus két párosítás növelés közötti részét fázisnak. Nyilván legfeljebb $n/2$ fázis lehetséges.

Egy fázison belül minden összehúzás külső pontot eredményez. Mivel mindig csak belső pontot fújunk fel, csak olyan pont felfújására kerülhet sor, amelyet korábbi fázisban húztunk össze. Ezért egy fázis $O(m)$ lépést igényel.

Feladat 4.4.1 *Igazoljuk, hogy az algoritmus során a páratlan kör összehúzása a páros körösszeg tulajdonságot nem rontja el.*

file: lmatch

4.5 Minimális költségű m-áramok

Legyen $D = (V, A)$ egy $n \geq 2$ csúcsú digráf, az élein $f : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó és $g : A \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ felső korlátokkal, melyekre $f \leq g$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektor **megengedett**, ha $f \leq x \leq g$. Adott egy $m : V \to \mathbf{R}$ vektor, amelyre létezik megengedett m-áram, valamint egy $c : A \to \mathbf{R}$ költség-függvény. (Az x **m-áram**, ha minden v csúcsra $m(v) := \varrho_x(v) - \delta_x(v)$.) Egy x m-áram **költségén** a cx skaláris szorzatot értjük. Határozzuk meg a legolcsóbb megengedett m-áramot! Elemi (polinomiális) transzformációkkal a probléma visszavezethető arra a speciális esetére (egy nagyobb digráfon), amikor $f \equiv 0$ és $g \equiv \infty$, így ezeket az alábbiakban feltesszük. Ekkor x megengedettsége azt jelenti, hogy $x \geq 0$. Azt is feltesszük, hogy c konzervatív, mert ha van negatív kör, akkor $g \equiv \infty$ miatt cx nem korlátos alulról.

Optimalitás és hiba

Adjuk D-hez minden h élének megfordítottját $-c(h)$ költséggel és jelölje $D^* = (V, A^*)$ az így kapott digráfot. A kiterjesztett költség-függvényt továbbra is c-vel jelöljük. Legyen $\pi : V \to \mathbf{R}$ tetszőleges potenciál. Definiáljuk D^*-nak mindegyik uv élére a $c_\pi(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$ eltolt költséget. D^* tetszőleges K irányított körére nyilván $c(K) = c_\pi(K)$.

A D^* egy $D' = (V, A')$ részgráfjának **hibája** (c-re vontkozólag) az a legkisebb $\varepsilon \geq 0$ szám, amellyel egységesen megnövelve a $c(e)$ értékeket minden $e \in A'$ élen a kapott c^+ konzervatív lesz D'-n. Karp módszerével ε meghatározható. Gallai tétele szerint létezik c^+-ra nézve megengedett π potenciál, ami tehát olyan, hogy minden $e \in A'$ élre $c_\pi(e) \geq -\varepsilon$ és D'-ben van csupa $-\varepsilon$ c_π-költségű élből álló irányított kör. Ilyenkor azt mondjuk, hogy π **igazolja** ε-t. Rögtön adódik, hogy D'-ben a minimális körátlag c_π-re vonatkozólag és így c-re vonatkozólag is pontosan $-\varepsilon$.

Adott $x \geq 0$ m-áramra a $D_x = (V, A_x)$ **segédgráf** a D^* azon részgráfja, amelyben minden $uv \in A$ élre $uv \in A_x$ (előre él), és $x(uv) > 0$ esetén vu is A_x-ben van (hátra él). Az x **hibáján** D_x hibáját értjük, jele $\varepsilon(x)$. Az $\varepsilon(x)$-et igazoló potenciált jelölje π_x.

TÉTEL 4.5.1 *Tegyük fel, hogy $f \equiv 0$, $g \equiv \infty$. Az $x \geq 0$ m-áramra a következők ekvivalensek.*
(a) *Az x minimális költségű.*
(b) *D_x-ben nincs negatív kör.*
(c) *Létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$, hogy minden $uv \in A$ élre $c_\pi(uv) \geq 0$ és ráadásul $x(uv) > 0$ esetén $c_\pi(uv) = 0$.*

Biz. (a)=>(b). Ha D_x-ben létezik C negatív kör, akkor annak előre éleinek megfelelő D-beli éleken növeljük, hátra éleinek megfelelőkön pedig csökkentsük x-t egy kicsiny számmal. A keletkező megengedett m-áram költsége (C negativitása miatt) kisebb, mint x költsége.

(b)=>(c). Gallai tétele szerint ha egy digráfban nincsen negatív kör, akkor létezik megengedett potenciál. A D_x gráfban egy π potenciálnak megengedettsége pontosan azzal ekvivalens, hogy π-re teljesülnek a (c)-beli feltételek. (Ez tehát valójában a (b) és (c) ekvivalenciáját bizonyítja.)

(c)=>(a). Legyen $z \geq 0$ m-áram. Mivel két m-áram különbsége áram, a Δ_π potenciál különbségre $\Delta_\pi x = \Delta_\pi z$. A π-re tett feltételből $c_\pi x = 0$ és $c_\pi z \geq 0$, amikből $cz = c_\pi z + \Delta_\pi z \geq c_\pi x + \Delta_\pi x = cx$. •

Fix élek

Adott $z \geq 0$ m-áramra egy $h \in A$ él **z-fix**, ha bármely legfeljebb $\varepsilon(z)$ hibájú $y \geq 0$ m-áramra $y(h) = 0$. A következő lemma azt a szemléletes érzést önti formába, hogy ha egy élnek az eltolt költsége az aktuális hibához képest nagy, akkor az élen minden kis hibájú vagy optimális m-áram értéke nulla.

Lemma 4.5.2 *Tegyük fel, hogy adott $z \geq 0$ m-áram esetén a $h = st \in A$ élre $c_{\pi_z}(h) \geq 2n\varepsilon(z)$. Ekkor h z-fix.*

Biz.

Állítás 4.5.3 *Legyen $y \geq 0$ m-áram, melyre $z(h) < y(h)$. Legyen D' az a digráf, amelybe egy $uv \in A$ élt beteszünk, ha $z(uv) < y(uv)$, továbbá egy $uv \in A$ élt fordítva beteszünk, ha $z(uv) > y(uv)$. Ekkor létezik D'-ben h-t tartalmazó irányított kör.*

Biz. Jelölje T a t-ből elérhető csúcsok halmazát. Ha s benne van, akkor egy t-ből s-be vezető út az st éllel a keresett kört adja. Ha s nem elérhető, akkor D-ben minden T-ből kilépő e élre $z(e) \geq y(e)$, azaz $\delta_z(T) \geq \delta_y(T)$, továbbá minden T-be belépő e élre $z(e) \leq y(e)$, és így $z(h) < y(h)$ miatt $\varrho_y(T) > \varrho_z(T)$, ami lehetetlen, mert $\varrho_z(T) - \delta_z(T) = m(T) = \varrho_y(T) = \delta_y(T)$ miatt $\varrho_z(T) - \varrho_y(T) = \delta_z(T) - \delta_y(T)$. •

A lemma bizonyítására térve mindenesetre $z(st) = 0$, mert $z(st) > 0$ esetén ts D_z-ben van, de akkor $c_{\pi_z}(ts) = -c_{\pi_z}(st) \leq -2n\varepsilon(z) < -\varepsilon(z)$, holott minden D_z-beli e élre $c_{\pi_z}(e) \geq -\varepsilon(z)$. Legyen $y \geq 0$

m-áram, amelyre $\varepsilon(y) \leq \varepsilon(z)$, és tegyük fel indirekt, hogy $y(h) > 0 = z(h)$. Tekintsük az Állítás által biztosított C kört, melynek megfordítottját jelölje C'. A definícióból kapjuk, hogy C benne van D_z-ben, C' pedig D_y-ban. Ezért $c_{\pi_z}(C) \geq 2n\varepsilon(z) + (|C|-1)(-\varepsilon(z)) \geq 2n\varepsilon(z) + (n-1)(-\varepsilon(z)) = (n+1)\varepsilon(z)$, és így $c_{\pi_y}(C') = c_{\pi_z}(C') \leq -(n+1)\varepsilon(z)$, azaz $c_{\pi_y}(C')/|C'| < c_{\pi_y}(C')/(n+1) \leq -\varepsilon(z)$. Tehát C' átlaga kisebb, mint $-\varepsilon(z)$, ellentmondásban az $\varepsilon(y) \leq \varepsilon(z)$ feltevéssel. • •

Nagyjavítás

Tegyük fel, hogy $x \geq 0$ m-áram nem optimális, azaz létezik D_x-ben C negatív kör. Jelölje $\varepsilon(x)$ a D_x hibáját valamint π_x az ezt igazoló potenciált. A C menti **körjavítás**on azt értjük, hogy D azon élein, melyek a C előre éleinek felelnek meg, x értékeit Δ-val növeljük, míg a C hátra éleinek megfelelő D-beli éleken az x értékét Δ-val csökkentjük, ahol Δ a C hátra éleinek megfelelő D-beli éleken az $x(uv)$ értékek minimuma. (A körnek bizonyosan van hátra éle, hiszen feltettük, hogy c konzervatív A-n.)

Amíg csak lehet, válasszunk ki D_x-ben élidegen $C_1, \ldots, C_k$ köröket úgy, hogy C_1 minden élének c_{π_x}-költsége $-\varepsilon(x)$ (azaz C_1 minimális átlagú), míg a többi C_i minden élének c_{π_x}-költsége negatív. Végezzük el ezek mentén a körjavításokat. Ezt a műveletet nevezzük **nagyjavítás**nak.

Lemma 4.5.4 *Az x-ből egy nagyjavítással kapott x' m-áramra $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)(1-1/n)$.*

Biz. Ha a $D_{x'}$ egy e élének c_{π_x}-költsége negatív, akkor e D_x-ben is benne volt. Továbbá a C_i menti javítások során mindegyik körnek az egyik éle kiesik a segédgráfból, ezért $D_{x'}$-ben már minden K körnek van olyan h éle, amelyre $c_{\pi_x}(h) \geq 0$. De ekkor $c_{\pi_x}(K) \geq -\varepsilon(x)(|K|-1)$, amiből $c_{\pi_x}(K)/|K| \geq -\varepsilon(x)(1-1/|K|) \geq -\varepsilon(x)(1-1/n)$, vagyis $D_{x'}$-ben a minimális körátlag legalább $-\varepsilon(x)(1-1/n)$, vagyis az x' hibája legfeljebb $\varepsilon(x)(1-1/n)$. •

Lemma 4.5.5 *Egy $x \geq 0$ m-áramból $N := 2n\lceil\log(n)\rceil$ nagyjavítás után kapott z m-áramra $\varepsilon(z) < \varepsilon(x)/2n$.*

Biz. A 4.5.4 lemma szerint a hiba egy nagyjavítás során az $(1-1/n)$-szeresére csökken, így n nagyjavítás után az $(1-1/n)^n$-szeresére. Mivel $[1+1/(n-1)]^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n-1} > 2$, ezért $(1-1/n)^n = 1/[1+1/(n-1)]^n < 1/2$ és így a hiba n nagyjavítás után legfeljebb a felére csökken. Amiből adódik, hogy minden $r > 0$ egészre nr nagyjavítás után a hiba a 2^r-ed részére csökken, speciálisan $r = \lceil\log(2n)\rceil$-re, N nagyjavítás után a $2n$-ed részére. •

Lemma 4.5.6 *Ha ts a D_x nagyjavításánál használt C_1 kör minimális c_{π_z}-költségű éle, akkor st A-ban van és st z-fix.*

Biz. Mivel C_1-nek a c_{π_x}-re vonatkozó átlaga $-\varepsilon(x)$, így a c_{π_z}-átlaga is $-\varepsilon(x)$, és ezért $c_{\pi_z}(ts) \leq -\varepsilon(x)$. A 4.5.5 lemma szerint $\varepsilon(z) \leq \varepsilon(x)/2n$, így $c_{\pi_z}(ts) \leq -2n\varepsilon(z)$, azaz $c_{\pi_z}(st) = -c_{\pi_z}(ts) \geq 2n\varepsilon(z)$. Ha indirekt st nincs A-ban, akkor $ts \in A$, amiből $ts \in A_{\pi_z}$ és $\pi_z(ts) \geq -\varepsilon(z)$ vagyis $\pi_z(st) = -\pi_z(ts) \leq \varepsilon(z)$ következne, holott $c_{\pi_z}(st) \geq 2n\varepsilon(z) > \varepsilon(z)$. Tehát $st \in A$ és a 4.5.2 lemmából következik, hogy az st él z-fix. •

Az algoritmus tetszőleges megengedett m-áramból kiindulva nagyjavításokat végez mindaddig, amíg a segédgráfban van negatív kör. Legfeljebb $O(n \log n)$ nagyjavítás után egy él fix lesz és ezért $O(|A| n \log n)$ nagyjavítás után legolcsóbb m-áramot kapunk.

A vázolt eljárás Goldbeg és Tarján algoritmusának egy változata. Ők minden körjavítást minimum átlagú kör mentén végeztek ezért Karp algoritmusát annyiszor hívták meg, ahány körjavítás történt vagyis $O(|A|^2 n \log n)$-szer. A fenti leírásban Karp algoritmusát minden nagyjavításban csak egyszer kell meghívni, így összesen csak $O(|A| n \log n)$-szer.

4.6 A Lucchesi-Younger tétel algoritmikusan

Egy $D = (V, A)$ digráfot akkor mondtunk erősen összefüggőnek, ha bármely pontjából minden másikba vezet irányított út. Nevezzük a digráf pontjainak egy X részhalmazát **mag**nak, ha nem lép ki belőle él. A mag **triviális**, ha $\emptyset$ vagy V. Ha egy X magba lép be él, akkor a X-be belépő élek $\varrho(X)$ halmazát neveztük egyirányú (más néven irányított) vágásnak. Ismert megfigyelés, hogy D pontosan akkor erősen összefüggő, ha nincs nemtriviális magja, azaz nem létezik egyirányú vágás.

Egy $D = (V, A)$ digráf éleinek valamely F részhalmazát **irányított kötés**nek vagy röviden **kötés**nek nevezzük, ha F elemeinek összehúzása erősen összefüggő digráfot eredményez. Kötés akkor létezik, ha D irányítatlan értelemben összefüggő, így ezt a továbbiakban feltesszük. Látszik, hogy F pontosan akkor kötés, ha elemeinek fordítottját D-hez adva erősen összefüggő digráfot kapunk, ami még azzal is ekvivalens, hogy F minden egyirányú vágást lefog.

Korábban már találkoztunk a minimális kötés elemszámára vonatkozó Lucchesi-Younger tétellel illetve annak a kikeresztezési technikán alapuló nem-algoritmikus bizonyításával. Jelen célunk egy alternatív, algoritmikus bizonyítás leírása, amelynek segítségével polinom időben kiszámítható a szóbanforgó minimum illetve maximum.

TÉTEL 4.6.1 (Lucchesi és Younger) *$D = (V, A)$ irányított gráfban a minimális kötés τ elemszáma egyenlő az élidegen egyirányú vágások maximális ν számával.*

Biz. Feltehetjük, hogy D irányítatlan értelemben összefüggő. Nyilván $\nu \leq \tau$. Az egyenlőség igazolásához leírunk egy algoritmust, amely megkonstruál egy F kötést és talál $|F|$ darab élidegen egyirányú vágást.

A magok metszetre-unióra zárt rendszert alkotnak. Valamely X nemüres magra jelölje $\sigma^*(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek számát. Nyilván $\sigma^*(\emptyset) = 1$ és $\sigma^*(V) = 0$.

Lemma 4.6.2 *A magokon értelmezett σ^* függvény szupermoduláris.*

Biz. Ha X és Y mag, akkor $d(X, Y) = 0$. Tekintsük az X és Y halmazok által feszített élek $I(X)$ és $I(Y)$ halmazát. Miután $d(X, Y) = 0$,

$$I(X \cup Y) = I(X) \cup I(Y) \text{ és } I(X \cap Y) = I(X) \cap I(Y). \tag{4.10}$$

Jelölje r az irányítatlan értelemben vett gráf körmatroidjának rangfüggvényét. Mivel r szubmoduláris és $r(I(X)) = |X| - \sigma^*(V - X)$, így a σ^* szupermodularitása következik. •

Legyen a σ függvény ugyanaz, mint a σ^*, azzal az eltéréssel, hogy $\sigma(\emptyset) = 0$. Ekkor σ metsző szupermoduláris a magokon. Rögtön látszik, hogy egy $F \subseteq A$ kötésre és X magra $\varrho_F(X) \geq \sigma(X)$, ahol $\varrho_F(X)$ az X-be belépő F-beli élek számát jelöli. (Ez az egyenlőtlenség az üres X halmaz kivételével a σ^* függvényre is igaz. Azért kell a σ^* helyett a σ-val dolgoznunk, hogy az egyenlőtlenség mindenhol érvényes legyen).

Egy nemtriviális X magot valamint a hozzá tartozó $\varrho(X)$ egyirányú vágást **pontos**nak hívunk (F-re nézve), ha $\sigma(X) = \varrho_F(X)$. Mivel a V alaphalmazra $\sigma(V) = 0 = \varrho_F(V)$, így a V magot is pontosnak tekintjük, bár ehhez nem tartozik egyirányú vágás. Amennyiben $\varrho_F(X) = 1$, **1-pontos** magról ill. vágásról beszélünk. Látható, hogy minden nemtriviális magú pontos vágás felbomlik 1-pontos vágások diszjunkt uniójára (éspedig a $D - X$ komponensei által meghatározott vágásokra), továbbá minden nemtriviális pontos mag 1-pontos magok metszete. A szokásos technikával igazolható, hogy:

Lemma 4.6.3 *Metsző pontos magok metszete és uniója pontos.* •

Ebből rögtön következik, hogy egy v pontot tartalmazó pontos halmazok $B_F(v) = B(v)$ metszete pontos. A $B(v)$ halmaz tehát a v-t tartalmazó egyértelmű legszűkebb pontos halmaz.

$B(v)$ a következőképp számolható. Ha $B(v)$ nem az egész V, akkor $B(v)$ a v-t tartalmazó 1-pontos halmazok metszete. Készítsünk egy D^+ segédgráfot úgy, hogy minden A-beli él egy párhuzamos példányát és minden F-beli él megfordítottját adjuk D-hez. Ekkor persze D^+ erősen összefüggő.

Állítás 4.6.4 *$B(v)$ azon u csúcsokból áll, amelyekbe D^+-ban vezet v-ből 2 élidegen út, azaz $\lambda(v, u : D^+) \geq 2$.*

Biz. Ha létezik X 1-pontos $v\bar{u}$-mag, akkor D^+-ban X-ből egyetlen él lép ki (éspedig az X-be belépő egyetlen F-beli él megfordítottja), tehát ilyenkor $\lambda(v, u : D^+) \leq 1$. Megfordítva, ha $\lambda(v, u : D^+) = 1$, úgy a Menger tétel miatt létezik egy X $v\bar{u}$-halmaz, amelyből D^+-ben az egyetlen xy él lép ki. A konstrukció miatt X mag, amelyre yx az egyetlen F-beli él, amely D-ben belelép, vagyis X 1-pontos. •

Gyakorlat 4.6.1 *Pontos halmazokból álló összefüggő hipergráf ponthalmaza is pontos.*

Az algoritmus tetszőleges F kötésből indul ki (ami kezdetben lehet például egy feszítő fa). Az általános lépésben vagy egy kisebb kötést talál, vagy pedig $|F|$ élidegen egyirányú vágást. Készítsünk el egy $D' = (V, A')$ segédgráfot és az élhalmazán egy c' költség-függvényt a következőképpen. $A - F$ minden eleme A'-höz tartozik és a költsége $+1$. Az F elemeit megfordítva tegyük A'-be és ezen fordított élek költsége legyen -1. Végül minden v pontba vezessünk $B(v)$ minden pontjából egy 0 költségű ún. **ugró** élt. uv pontosan akkor ugró él, ha nem lép be 1-pontos magba. Mivel eredeti él megfordítottja nem lép be semmilyen magba, minden A-beli él megfordítottja ugró él lesz.

A közismert algoritmussal döntsük el, hogy létezik-e D'-ben a c' költség-függvényre nézve negatív kör. Keressünk egyet, ha van, illetve keressünk egy π megengedett (egészértékű) potenciált, ha nincs.

1. eset *D'-ben nincs negatív kör, azaz létezik π egészértékű megengedett potenciál.*

Állítás 4.6.5 *Ha uv ugró él, akkor*

$$\pi(v) \leq \pi(u). \tag{4.11}$$

Ha $uv \in A - F$, akkor

$$\pi(v) \leq \pi(u) + 1. \tag{4.12}$$

Ha $uv \in F$, akkor

$$\pi(v) \geq \pi(u) + 1. \tag{4.13}$$

Biz. uv ugró élre $\pi(v) - \pi(u) \leq c'(uv) = 0$, azaz $\pi(v) \leq \pi(u)$. Ha $uv \in A - F$, akkor uv él D'-ben, így $\pi(v) - \pi(u) \leq c'(uv) = 1$, azaz $(v) \leq \pi(u) + 1$. Ha $uv \in F$, akkor vu él D'-ben, így $\pi(u) - \pi(v) \leq c'(vu) = -1$, azaz $\pi(v) \geq \pi(u) + 1$. •

Feltehető, hogy π minimális értéke 0, hiszen a π konstanssal történő eltolása a megengedettséget nem befolyásolja. Jelölje t a π maximális értékét. Feltehető, hogy 1 és t között valamennyi i értékre a

$$\{v : \pi(v) = i\} \text{ halmaz nem üres,} \tag{4.14}$$

mert ha az volna, akkor módosítsuk π-t úgy, hogy $\pi(v) > i$ esetén eggyel csökkentjük. Miután c' $0, \pm 1$ értékű, továbbra is megengedett potenciált kapunk. Ezt a változtatást mindaddig csinálhatjuk, amíg (4.14) nem teljesül.

Legyen $V_i := \{v : \pi(v) \geq i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, ahol t a π maximális értéke. Ekkor (4.14) miatt $V \supset V_1 \supset \ldots \supset V_t$. Semelyik V_i-be sem lép be ugró él, mert ha uv belépne, akkor $\pi(v) > \pi(u)$, ellentétben az állítással. Következik, hogy D-ben V_i-ből nem lép ki él, azaz V_i mag. Az állításból az is látható, hogy minden $uv \in A - F$ él legfeljebb egy V_i-be lép be és minden $uv \in F$ él legalább egybe.

Állítás 4.6.6 *A V_i maghoz tartozó $\varrho(V_i)$ egyirányú vágás felbontható 1-pontos egyirányú vágások diszjunkt uniójára.*

Biz. Mivel V_i-be nem lép be ugró él, minden $v \in V_i$ pontra $B(v) \subseteq V_i$, és ezért a $\{B(v) : v \in V_i\}$ hipergráf komponenseinek $Z_1, \ldots, Z_l$ ponthalmazai a V_i partícióját alkotják. A 4.6.1 gyakorlat alapján mindegyik Z_j mag pontos, továbbá a $\varrho(Z_j)$ vágások partícionálják a $\varrho(V_i)$ vágást. Miután minden nemtriviális pontos vágás diszjunkt 1-pontos vágások uniója, az állítás következik. •

Ha tehát az 1. eset áll fenn, akkor találtunk egyirányú vágásoknak egy olyan rendszerét, amelynek minden tagját F pontosan egyszer fogja le, minden $A - F$ beli él legfeljebb egyikükben van benne, minden F-beli él pedig legalább egyikükben. Ekkor mindegyik F-beli élhez a rendszerből bármelyik olyat kiválasztva, amelyben ő benne van, $|F|$ darab páronként élidegen egyirányú vágást kapunk.

2. eset *A D' segédgráfban létezik negatív kör.*

Legyen C olyan negatív kör, amely minimális abban az értelemben hogy nincs C-nek két olyan nem egymást követő a, b pontja, amelyekre a-ból b-be vezet ugró él és a körön a b-től a-ig vezető P ív költsége negatív. Tetszőleges negatív körből kiindulva egy ilyen értelmű minimális negatív kört algoritmikusan is könnyen megkaphatunk, hiszen a szóbanforgó ab ugró él létezése esetén $P + ab$ kisebb élszámú negatív kört ad.

Lemma 4.6.7 *A C kör ugró élei elrendezhetők egy olyan $e_1 = u_1v_1, e_2 = u_2v_2, \ldots, e_k = u_kv_k$ sorba, amelyben semelyik u_j-ből sem vezet ugró él v_i-be, ahol $i < j$.*

Biz. C minden ugró élének feleltessünk meg egy új pontot és ezek közül valamely x pontból egy másik y-ba vezessünk élt, ha az x-hez tartozó ugró él tövéből vezet ugró él az y-hoz tartozó ugró él fejébe. A lemma állítása azzal ekvivalens, hogy az így nyert H segédgráf pontjainak van topologikus sorrendje (olyan sorrend, amelyben későbbi pontból korábbiba nem vezet él.) Ismert, hogy aciklikus digráfnak létezik topológikus sorrendje. Tegyük ezért fel indirekt, hogy H-ban van irányított kör. Ez azt jelenti, hogy C bizonyos ugró élei ciklikusan sorbarendezhetők az $f_1 = s_1t_1, f_2 = s_2t_2, \ldots, f_m = s_mt_m$ sorrendbe úgy, hogy s_it_{i+1} ugró él (ahol

$t_{m+1} = t_1$). Legyen C_i a C körnek az az íve, amely t_{i+1}-ből vezet s_i-be. A C-re tett minimalitási feltevés alapján C_i költsége nemnegatív.

Könnyen látható, hogy a C minden nem-ugró éle ugyanannyi C_i ívhez tartozik. Jelöljük ezt a számot q-val ($q > 0$). Következik, hogy a C költségének q-szorosa a C_i ívek költségének összege, ami nemnegatív, ellentétben a C kör negatív voltával. •

Módosítsuk F-t a következőképpen. Hagyjuk ki belőle azokat az éleket, amelyeknek megfordítottja a D' segédgráf szóbanforgó C körében van, és vegyük hozzá $A - F$ azon uv elemeit, amelyeknek megfelelő D'-beli uv élek C-ben vannak. A keletkezett halmazt jelölje F'. Miután C negatív kör volt, $|F'| < |F|$. Belátjuk, hogy F' kötés. Jelölje rendre $\delta^u(X)$ illetve $\varrho^u(X)$ a C kör azon ugró éleinek a számát, melyek X-ből kilépnek illetve X-be belépnek.

Állítás 4.6.8 *Tetszőleges X magra* $\varrho_{F'}(X) = \varrho_F(X) + \delta^u(X) - \varrho^u(X)$.

Biz. Jelölje $\delta^1(X)$ a C körnek az X-ből kilépő nem ugró éleinek a számát. Mivel X mag, ezen élek mindegyikének megfordítottja F-beli. Jelölje $\varrho^1(X)$ a C körnek az X-be belépő nem ugró éleinek a számát. Mivel X mag, ezek mindegyike $A - F$-ben is benne van. Emiatt $\varrho^u(X) + \varrho^1(X) = \varrho_C(X) = \delta_C(X) = \delta^u(X) + \delta^1(X)$, azaz $\delta^u(X) - \varrho^u(X) = \varrho^1(X) - \delta^1(X)$. Másrészt az F' definíciójából $\varrho_{F'}(X) = \varrho_F(X) + \varrho^1(X) - \delta^1(X) = \delta^u(X) - \varrho^u(X)$. •

Állítás 4.6.9 *X nemüres magra*

$$\varrho_F(X) - \sigma(X) \geq \varrho^u(X). \tag{4.15}$$

Biz. $\varrho^u(X)$ szerinti indukció. Legyen $\Delta_F(X) := \varrho_F(X) - \sigma(X)$. Ez mindig nemnegatív, hiszen F kötés, továbbá éppen akkor 0, ha X pontos. Az egyenlőtlenség $\varrho^u(X) = 0$ esetén semmitmondó, így legyen $\varrho^u(X) > 0$ és legyen $e_i = u_i v_i$ a C-nek az az ugró éle, amely belép X-be és a 4.6.7 lemmában megadott sorrendben a legkisebb indexű. Legyen $B := B(v_i)$. Ha most $u_j v_j$ egy másik ugró éle C-nek, amely belép X-be, akkor $j > i$, és állítjuk, hogy $u_j \notin B$. Ha ugyanis u_j B-ben volna, akkor $u_j v_i$ is ugró él lenne, ellentétben a sorrendezés tulajdonságával. Így tehát $\varrho^u(X \cup B) = \varrho^u(X) - 1$. Most $\Delta_F(X) + 0 = \Delta_F(X) + \Delta_F(B) \geq \Delta_F(X \cap B) + \Delta_F(X \cup B) \geq 1 + \Delta_F(X \cup B) \geq 1 + \varrho^u(X \cup B) = \varrho^u(X)$, ahol az utolsó egyenlőtlenség az indukciós feltevésből adódik. •

A 4.6.8 és 4.6.9 állításokat összevetve kapjuk, hogy $\varrho_{F'}(X) = \varrho_F(X) - \varrho^u(X) + \delta^u(X) \geq \varrho_F(X) - \varrho^u(X) \geq \sigma(X)$, vagyis F' valóban kötés.

A 2. eset fennállásakor tehát egy olyan kötést találtunk, amely kisebb a kiindulási kötésnél. Emiatt, ha az eljárást iteráljuk, a 2. eset legfeljebb $n - 1$ előfordulása után bizonyosan az 1. eset következik be. • • •

Fejezet 5

ALGORITMUSOK

Ebben a fejezetben néhány érdekes algoritmussal ismerkedünk meg.

5.1 Győri tétele algoritmikusan

Az alábbiakban algoritmikus bizonyítást adunk Győri tételére. Legyen $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ egyszerű irányított út, ahol az e_i irányított él töve v_{i-1} és feje v_i. Jelöljük a P csúcsainak halmazát V-vel. Legyen $\mathcal{F} := \{F_1, \ldots, F_k\}$ a P részútjainak egy rendszere. A következőkben úton általában az út élhalmazát értjük. Egy I út kezdőpontját $b(I)$-vel, végpontját pedig $j(I)$-vel jelöljük.

Azt mondjuk, hogy P részútjainak egy $\mathcal{B}$ rendszere **generálja** $\mathcal{F}$-t vagy hogy $\mathcal{B}$ **generátora** $\mathcal{F}$-nek, ha $\mathcal{F}$ minden tagja előáll néhány $\mathcal{B}$-beli út egyesítéseként. Például $\mathcal{F}$ saját magának generátora, és az egyelemű utakból álló $\{e_1, \ldots, e_n\}$ rendszer is generálja $\mathcal{F}$-t. Jelölje $\gamma(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$ generátorainak minimális elemszámát.

Azt mondjuk, hogy egy F útból és annak egy e éléből álló (F, e) pár **reprezentált utat** alkot. Jelöljük $\mathcal{F}_r$-rel az olyan (F, e) reprezentált utak halmazát, amelyekre $F \in \mathcal{F}$.

Legyen $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ a P részútjainak egy családja és legyen $\mathcal{R} := \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ egy reprezentáló rendszer, azaz az f_i irányított élek különböző elemei P-nek és $f_i \in I_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ **erős reprezentáló rendszer**, ha $I_i \cap I_j$ nem tartalmazza f_i és f_j mindegyikét (i, j, $1 \leq i < j \leq t$). Ebben az esetben a reprezentált utak $\{(I_1, f_1), (I_2, f_2), \ldots, (I_t, f_t)\}$ családját **független**nek nevezzük. Az $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ **erősen reprezentálható**, ha létezik erős reprezentáns rendszere.

Jelölje $\sigma(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$-ben lévő lévő erősen reprezentálható utak maximális számát. Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{R}$ erősen reprezentálható útrendszer, akkor $\mathcal{R}$-t nem lehet $|\mathcal{R}|$-nél kevesebb úttal generálni. Ebből következik, hogy utak tetszőleges $\mathcal{F}$ rendszerére $\sigma(\mathcal{F}) \leq \gamma(\mathcal{F})$. Győri tétele azt állítja, hogy itt valójában egyenlőség szerepel:

TÉTEL 5.1.1 (Győri Ervin) *A P út részútjainak bármely $\mathcal{F}$ családjára fennáll $\sigma(\mathcal{F}) = \gamma(\mathcal{F})$.*

Biz. Csak a nem-triviális $\sigma \geq \gamma$ egyenlőtlenséget igazoljuk.

Jelölje $\mathcal{F}_r$ a reprezentált utak halmazát. $\mathcal{F}_r$ egy (F, f) tagját **lényegesnek** mondjuk, ha nincs olyan F' ($\neq F$) tagja $\mathcal{F}$-nek, amelyre $f \in F' \subset F$. $\mathcal{F}_r$ minden (F, f) lényeges tagjának megfeleltetünk egy (X_K, X_B) halmaz-párt, ahol X_B az F út f-t követő pontjaiból áll, míg $V - X_K$ az F út f-t megelőző pontjaiból. Jelölje $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ az így kapott halmaz-párok családját.

Az algoritmus három fázisból áll. Az elsőben a lényeges párok $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ családjából kiválasztunk egy keresztezésmentes $\mathcal{K}$ részrendszert. A második fázisban Dilworth tételt alkalmazzuk $\mathcal{K}$-ra és az ismert algoritmus segítségével (amely a Dilworth tételnek Kőnig tételre való visszavezetésén és ezáltal az alternáló utas módszeren alapul) $\mathcal{K}$-nak meghatározunk egy maximális $\mathcal{I}$ független részét valamint egy minimális lánc-felbontását. A láncfelbontás irányított élek egy olyan F rendszerének felel meg, amelyek lefogják az $\mathcal{K}$-ban szereplő valamennyi halmaz-párt. Az algoritmus harmadik fázisában F-t átalakítjuk úgy, hogy elemszáma ne változzék és $\mathcal{L}_\mathcal{F}$-nek minden tagját lefogja.

1. Fázis Végigmegyünk a P út élein az $e_1, \ldots, e_n$ sorrendben és az $\mathcal{L}_\mathcal{F}$ tagjait két csoportba soroljuk, $\mathcal{K}$-ba és $\mathcal{T}$-be. Kezdetben mindkét csoport üres. Az $\mathcal{T}$ tagjaira a későbbiek során, mint tiltott párokra hivatkozunk.

Az általános lépésben tekintjük az e_i élt és az összes $(I_1, e_i), (I_2, e_i), \ldots, (I_k, e_i)$ lényeges párt. Mivel ezen párok lényegesek, az I_j utak élhalmazai egymást nem tartalmazzák és a végpontjaik páronként különbözőek. Következésképp feltehető, hogy ezen utak úgy vannak indexelve, hogy $b(I_1) < \ldots < b(I_k)$ és $j(I_1) < \ldots < j(I_k)$. Mindegyik (I_j, e_i) nem tiltott párt bevesszük $\mathcal{K}$-ba, és egy ilyen bevételkor letiltjuk (azaz $\mathcal{T}$-be tesszük) az összes olyan (I_h, e_l) lényeges párt, amelyre $j < h \leq k$, $l > i$ és $e_l \in I_j$.

A konstrukcióból könnyen látszik, hogy az 1. fázis végén kapott $\mathcal{K}$ rendszer keresztezés-mentes lesz.

2. Fázis Alkalmazzuk a Dilworth tételt $\mathcal{K}$-ra és számítsunk ki egy $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ független rész-rendszert és $\mathcal{K}$-nak egy minimális lánc-felbontását, amely egy olyan F élrendszernek felel meg, amely $\mathcal{K}$ minden tagját lefogja, és amelyre $|F| = |\mathcal{I}|$.

3. Fázis Amennyiben F lefogja $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ valamennyi tagját, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy van olyan (I, f) lényeges pár, amelyet F nem fog le. Válasszuk (I, f)-t úgy, hogy az I-nek az f élt megelőző csúcsainak $(I, f)^-$ halmaza minimális legyen. Mivel (I, f)-t F nem fogja le, így (I, f) tiltva lett (azaz $\mathcal{T}$-be került), vagyis van a $\mathcal{K}$-nak olyan (J, e) tagja, amelyre $\{e, f\} \subseteq I \cap J$, e megelőzi f-t és J megelőzi I-t. Válasszunk egy ilyen (J, e) párt úgy, hogy $(J, e)^+$ minimális legyen.

Az (I, f) és (J, e) párok lényegesek, így mind az (I, e), mind a (J, f) pár lényeges. Az $(I, f)^-$ minimalitásából következik, hogy F lefogja az $((I, e)^-, (I, e)^+)$ párt.

Lemma 5.1.2 $(J, f) \in \mathcal{K}$.

Biz. Amennyiben (J, f) tiltott volna, úgy az algoritmus előírása miatt volna egy (J', e') tagja $\mathcal{K}$-nak úgy, hogy J' megelőzi J-t és $\{e', f\} \subseteq J' \cap J$. Nem lehet, hogy e' megelőzi e-t, mert akkor (J, e) is tiltott lett volna, holott $(J, e) \in \mathcal{K}$. Ezek szerint e' vagy egyenlő e-vel, vagy követi e-t. De ekkor $(J', e')^+ \subset (J, e)^+$, ellentétben $(J, e)^+$ minimális választásával. •

Ezek alapján F lefogja mind (I, e)-t, mind (J, f)-t. Jelölje az (I, e)-t lefogó élt $f_1 = x_1y_1$ és a (J, f)-t lefogó élt $f_2 = x_2y_2$. Legyen $f'_1 := x_1y_2$, $f'_2 := x_2y_1$ és legyen $F' := F - \{f_1, f_2\} \cup \{f'_1, f'_2\}$. Mivel f_1 és f_2 sem fogja le (I, f)-t, a szóbanforgó pontok az alábbi sorrendben követik egymást.

$$b(J) \le x_2 < b(I) \le x_1 \le b(e) < y_1 \le b(f) < y_2 \le j(J) < j(I). \tag{12.1}$$

Ebből rögtön adódik, hogy az f'_1 él lefogja az eddig lefogatlan (I, f) párt.

Lemma 5.1.3 *Ha F lefogott egy (I', f') lényeges párt, akkor F' is lefogja.*

Biz. Ez nyilván így van, ha (I', f')-t az F-nek egy f_1-től és f_2-től különböző tagja fogta le. Az is rögtön látszik, hogy minden f_2 által legfogott párt f'_1 és f'_2 valamelyike lefogja. Tehát az egyetlen problematikus eset az, amikor (I', f')-t az F-ből egyedül az f_1 él fogja le.

Tegyük fel indirekt, hogy f'_1 és f'_2 egyike sem fogja le (I', f')-t. Abból hogy f'_1 nem fogja le (I', f')-t, következik, hogy $j(I') < y_2$. Abból hogy f'_2 nem fogja le (I', f')-t, következik, hogy $b(I') > x_2$. Ezért $e \in I' \subseteq J$, ami ellentmond annak, hogy (J, e) lényeges pár. •

A lemmából kapjuk, hogy F' szigorúan több lényeges párt fog le, mint amennyit F lefogott. Így a fenti átcserélési műveletet legfeljebb annyiszor alkalmazva, mint ahány tagja az input útcsaládnak van, $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$-nek egy olyan lefogását kapjuk, amelynek elemszáma megegyezik az $\mathcal{I}$ független rész-rendszer elemszámával. • •

Megjegyzés A fenti algoritmusnak és bizonyításnak egy másik változata is elmondható, ki-ki választhat melyik szimpatikusabb. Eltérés a harmadik fázisban van. A módosított 3. fázisban csupán a $\mathcal{K}$-val és annak F lefogásával foglalkozunk. Amennyiben van F-nek két olyan $f_1 = x_1y_1$ és $f_2 = x_2y_2$ éle, amelyekre

$$x_2 < x_1 < y_1 < y_2$$

és $F' := F - \{f_1, f_2\} \cup \{f'_1, f'_2\}$ is lefogja $\mathcal{K}$-t, úgy cseréljük ki F-t F'-re. Könnyen látszik hogy legfeljebb n^3 ilyen egymás utáni csere létezhet.

Tegyük most fel, hogy F olyan lefogása $\mathcal{K}$-nak, amelyben már ilyen csere nem hajtható végre.

Lemma 5.1.4 *Ha F olyan fedése $\mathcal{K}$-nak, amelyre nézve a fenti csere már nem hajtható végre, akkor F lefogja az összes lényeges párt.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy F nem fogja le az (I, i) lényeges párt. Válasszuk ezt úgy, hogy $|(I, i)^-|$ minimimális. Mivel (I, i) nincs lefogva, így nem tartozik $\mathcal{K}$-hoz, azaz létezik az 1. Fázis szabálya szerint egy olyan (J, j) tagja $\mathcal{K}$-nak amelyre j megelőzi i-t és (J, j) keresztezi (I, i)-t. Válasszunk egy ilyen (J, j) párt úgy, hogy $|(J, j)^+|$ minimális. Miután (I, i) és (J, j) lényegesek, az (I, j) és (J, i) párok is azok. Az $|(I, i)^-|$ minimalitásából következik, hogy F lefogja (I, j)-t, azaz van olyan $e_1 = x_1y_1 \in F$ él, amely lefogja (I, j)-t.

Állítás 5.1.5 $(J, i) \in \mathcal{K}$.

Biz. Ha indirekt (J, i) a $\mathcal{T}$-hez tartozna, akkor az 1. Fázis szabálya szerint létezik egy olyan (J', j') tagja $\mathcal{K}$-nak, amelyre j' megelőzi i-t és (J', j') keresztezi (J, i)-t. A j' él nem előzheti meg j-t, mert különben (J', j') keresztezné (J, j)-t és emiatt (J, j) is $\mathcal{T}$-hez tartozna. Így aztán vagy $j' = j$ vagy pedig j megelőzi j'-t. Mindkét esetben (J', j') keresztezi (I, i)-t és $(J', j')^+ \subset (J, j)^+$, ellentmondásban a $|(J, j)^+|$. minimális választásával. •

Mivel F lefogja $\mathcal{K}$-t és $(J, i) \in \mathcal{K}$, az előbbi állítás miatt van olyan $e_2 = x_2y_2$ eleme C-nek, amely lefogja (J, i)-t. Mivel sem e_1, sem e_2 nem fogja le (I, i)-t, azt kapjuk, hogy

$$b(J) \le x_2 < b(I) \le x_1 \le b(j) < y_1 \le b(i) < y_2 \le j(J) < j(I).$$

A lemma feltétele alapján F-ben nincsen két átcserélhető elem, így kell léteznie olyan (K, k) tagnak $\mathcal{K}$-ban, amelyet F' nem fog le, ekkor (K, k)-t szükségképpen e_1 lefogja, míg e_1' és e_2' nem. Ezért $b(J) \le x_2 < b(K) \le x_1 < y_1 \le j(K) < y_2 \le j(J)$, azaz, $j \in K \subset J$, ellentmondásban a feltevéssel, hogy (J, j) lényeges. • •

Tartalom