KOMBINATORIKUS ALGORITMUSOK II.

Frank András

2003

1. Fejezet

ÁRAMOK ÉS FOLYAMOK

Jelöljön $D = (V, E)$ egy irányított gráfot. Tetszőleges $x : E \to R_+$ vektorra és $S \subseteq V$ halmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$.

D-ben adott egy s forráspont és egy t nyelőpont úgy, hogy s-be nem lép be él és t-ből nem lép ki él. **Folyamon** egy olyan nemnegatív $x : E \to R_+$ vektort értünk, amely minden, s-től és t-től különböző pontra teljesíti a **megmaradási szabályt** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra, ahol Amennyiben még az $x \leq g$ feltétel is teljesül, **megengedett folyamról** beszélünk. Egy s-t tartalmazó, de t-t nem tartalmazó X halmazt nevezzünk $s\bar{t}$-halmaznak.

Tetszőleges S $s\bar{t}$-halmaz és x folyam esetén $\delta_x(S) - \varrho_x(S) = \sum(\delta_x(v) - \varrho_x(v) : v \in S) = \delta_x(s) - \varrho_x(s) = \delta_x(s)$. Vagyis minden S $s\bar{t}$-halmazra a $\delta_x(S) - \varrho_x(S)$ értékkel definiált **tiszta kiáramlás** független S választásától. Ezt a közös, $\delta_x(s)$-sel (és $\varrho_x(t)$-vel) egyenlő értéket nevezzük az x folyam **nagyságának.** Az $x(uv)$ szám a folyam **értéke** az $uv \in A$ élen. Az x folyamot **út-folyamnak** (**kör-folyamnak**) nevezzük, ha x csak egy s-ből t-be vezető út (irányított kör) mentén pozitív.

Gyakorlat 1.1 *Igazoljuk, hogy minden nem-negatív folyam kör- és út-folyamok nem-negatív kombinációja.*

Alapvető a következő Fordtól és Fulkersontól származó tétel.

TÉTEL 1.1 *Akkor és csak akkor létezik k nagyságú megengedett folyam, ha minden S $s\bar{t}$-halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, g egészértékű, k pedig egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.*

A tételt néha az alábbi ekvivalens alakban említik. (Az MFMC elnevezés az angol Max-flow Min-cut rövidítése.)

TÉTEL 1.2 (MFMC) *A megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha g egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.*

Az MFMC tételt először racionális g kapacitás függvényre igazoljuk a Ford-Fulkerson növelő utas algoritmus segítségével.

1.1 A NÖVELŐ UTAK MÓDSZERE

Legyen x megengedett folyam. Ekkor tetszőleges S $s\bar{t}$-halmaz esetén ax x folyam nagyságára érvényes az alábbi becslés. $\delta_x(s) = \delta_x(s) - \varrho_x(s) = \sum[\delta_x(v) - \varrho_x(v) : v \in S] = \delta_x(S) - \varrho_x(S) \leq \delta_g(S)$. Ebből adódik, hogy az 1.1 tételben a feltétel szükségessége illetve az 1.2 tételben max $\leq$ min egyenlőtlenség.

Az is megállapíthaó, hogy egy x folyam bizonyosan maximális nagyságú, amennyiben létezik egy olyan S $s\bar{t}$-halmaz, amelyre teljesülnek az alábbi **optimalitási feltételek**.

(a) $\quad x(a) = g(a)$ minden a élre, amely kilép S-ből, és
(b) $\quad x(a) = 0$ minden a élre, amely belép S-be.

Jelen célunk egy ilyen x folyam és S halmaz algoritmikus megkeresése. Ezt először csak egészértékű (illetve racionális) g kapacitás függvény esetén tesszük meg, majd tetszőleges g-re.

A Fordtól és Fulkersontól származó algoritmus tetszőleges x megengedett st-folyamból indul ki (például $x \equiv 0$), és azt iteratívan javítja. Készítsünk el egy $D_x = (V, A_x)$ digráfot a következőképp. Egy uv él A_x-hez tartozik, ha vagy (i) $uv \in A$ és $x(uv) < g(uv)$, és ekkor ezen élét D_x-nek **előre** élnek hívjuk, vagy (ii) $vu \in A$ és $x(vu) > 0$, és ekkor uv neve **hátra** él. Jelölje S az s-ből D_x-ben irányított úton elérhető pontok halmazát.

1. eset *$t \notin S$, azaz t nem érhető el s-ből.* Mivel D_x semelyik éle sem lép ki S-ből, ezért D-ben minden S-ből kilépő él telített (azaz $x(uv) = g(uv)$) és minden S-be belépő uv élen $x(uv) = 0$. Vagyis az (a) és (b) optimalitási feltételek teljesülnek és az algoritmus végetér: az adott x folyam nagysága egyenlő $\delta_g(S)$-sel.

2. eset *$t \in S$, azaz t elérhető s-ből.* Legyen P tetszőleges s-ből t-be vezető irányított út D_x-ben.

Legyen $\Delta_1 := \min\{g(uv) - x(uv) : uv \text{ előre éle } P\text{-nek}\}$ és $\Delta_2 = \min\{x(v, u) : uv \text{ hátra éle } P\text{-nek}\}$. Legyen $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$. Ekkor Δ pozitív. Nevezzük P egy élét **kritikusnak**, ha Δ ezen az élen éretik el.

Módosítsuk x-t a következőképp. Ha uv előre éle P-nek, úgy a D uv élén növeljük $x(uv)$-t Δ-val. Ha uv hátra éle P-nek, úgy a D vu élén csökkentsük $x(vu)$-t Δ-val. Könnyen látható, hogy a módosított x' megengedett folyam lesz, amelynek nagysága Δ-val nagyobb, mint x-é. Következésképp, ha g egészértékű, akkor a 2. eset csak véges sokszor fordulhat elő, vagyis véges sok növelés után az 1. eset következik be, amikor is az algoritmus véget ér. Tehát egész kapacitások esetén az MFMC tétel bizonyítást nyert.

Amennyiben g racionális, a nevezők legkisebb közös többszörösével a kapacitásokat végigszorozva visszajutunk az egész kapacitású esethez. •

Megjegyzendő, hogy ha g irracionális, akkor a fenti eljárás nem biztosan ér véget véges sok lépésben (amint az példával demonstrálható). Másik hátrány, hogy még egész kapacitások esetén is az iterációk száma arányos lehet az előforduló legnagyobb kapacitás nagyságával. Így az algoritmus bonyolultsága az input méretének exponenciális függvényével arányos, azaz nem polinomiális. (Egy szám nagysága a jegyei számának exponenciális függvénye.)

1.1.1 Skálázási technika

Az alábbiakban bemutatunk egy ügyes fogást, amelynek segítségével bizonyos eljárásokat polinomiális futásidejűvé lehet tenni. Használatát a maximális folyam problémán szemléltetjük, mert ott igen egyszerű, de számos alkalommal bonyolultabb körülmények között is használható.

Tételezzük fel, hogy a kapacitások egész számok és kettes számrendszerben vannak megadva. A legnagyobb kapacitás álljon M jegyből. Összesen M darab folyam problémát fogunk megoldani, mindegyikben a megelőzően megkapott maximális folyamot használjuk kiindulási folyamként. Jelölje g_i azt a kapcitás függvényt, amely úgy áll elő, hogy minden élen az eredeti kapacitásnak (balról) az első i jegyét tekintjük, míg a többit eltöröljük. Tegyük fel, hogy a g_i kapacitás függvényre nézve már meghatároztuk az x_i maximális folyamot. Ekkor $2x_i$ megengedett folyam a g_{i+1}-re nézve. A $2x_i$-ből kiindulva alkalmazzuk a fent leírt növelő út módszert a g_{i+1} kapacitás függvényre vonatkozólag.

Miután minden e élre $g_{i+1}(e)$ értéke vagy $2g_i(e)$ vagy $2g_i(e) + 1$, legfeljebb élszámnyi növelés után megkapjuk az x_{i+1} maximális folyamot (a g_{i+1}-re nézve). Összesen tehát legfeljebb $M|A|$ növelés segítségével megkonstruáltunk egy eredeti kapacitásokra vonatkozó maximális folyamot.

1.1.2 Legrövidebb növelő utak

A fenti eljárás hátránya, hogy csak egész (és így racionális) kapacitásokra működik. Ezen nehézség leküzdésére J. Edmonds and R. Karp [1972] és E.A. Dinitz [1970] javasolták, hogy minden iterációban a legkisebb élszámú növelő utat válasszuk. Ez az egyszerű megszorítás lehetővé teszi, hogy a Ford-Fulkerson algoritmus bonyolultságát $|V|$ és $|A|$ polinomjával korlátozzuk, függetlenül a kapacitások nagyságától. (Ezt persze úgy értve, hogy a számokkal végzett alapműveleteket egyetlen lépésnek tekintjük.)

TÉTEL 1.3 *Ha a Ford-Fulkerson féle növelő utas algoritmusban mindig a legrövidebb növelő utat használjuk, úgy az eljárás tetszőleges g kapacitás függvény esetén legfeljebb $O(|V||A|)$ növelés után véget ér.*

Biz. Jelölje $\sigma_x(v)$ a v távolságát D_x-ben s-től. (Ha nincs egyáltalán s-ből v-be út, akkor $\sigma_x(v) = \infty$). Legyen P egy legrövidebb út D_x-ben s-ből t-be. Ekkor P mindegyik uv élére, $\sigma_x(v) = \sigma_x(u) + 1$.

Lemma 1.4 *Amikor P mentén végrehajtunk egy növelést, a $\sigma_x(v)$ érték semmilyen v-re sem csökken.*

Biz. Nézzük meg milyen hatással van a növelés a D_x segédgráfra. Mivel a folyamot D-nek csak olyan élein változtattuk, melyek P éleinek felelnek meg, D_x csupán P éleinél változhat. Éspedig, D'_x lehetséges új élei P élei megfordítva, ugyanakkor P kritikus élei (ahol Δ felvétetik) eltűnnek D_x-ből. A v pont s-től való távolsága csak akkor csökkenhetne, ha olyan uw éleket adnánk a segédgráfhoz, melyekre $\sigma_x(w) > \sigma_x(u) + 1$, amiből a lemma következik. •

A növelések sorozatát fázisokra bontjuk. Egy fázis során $\sigma_x(t)$ ugyanaz marad. A lemma szerint legfeljebb $|V| - 1$ fázis lehetséges.

Lemma 1.5 *Egy fázison belül legfeljebb $|A|$ növelésre kerülhet sor.*

Biz. Jelölje $\sigma_i(v)$ a v pont távolságát s-től az i fázis kezdetén az aktuális segédgráfban. Nevezzünk egy uv élt **i-szorosnak**, ha $\sigma_i(v) = \sigma_i(u) + 1$. Az i-dik fázis során csupán i-szoros éleket használunk. Tudjuk, hogy egy növelés legalább egy i-szoros élt eltüntet az aktuális segédgráfból és nem hoz be új i-szoros élt. Mivel a segédgráfnak legfeljebb $|A|$ darab i-szoros éle van, a lemma következik. •

Mindezeket összetéve kapjuk, hogy legfeljebb $|V||A|$ növelésre van szükségünk. • •

Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy az Edmonds-Karp és Dinitz féle algoritmus össz-bonyolultsága $O(|V||A|^2)$, hiszen egyetlen növelés $O(|A|)$ lépést igényel.

Miután a fenti algoritmus futása során a rendelkezésre álló legrövidebb növelő utak közül bármelyiket választhatjuk, a végül kapott maximális folyam függ ezen választásoktól. Nem így a végső S!

Feladat 1.2 (a) *A végül kapott minimális $\delta^+(S)$ vágás független az algoritmus futásától.* (b) *Ha X és Y minimalizálja az $\delta_g(Z)$ értéket az összes $s\bar{t}$-halmazra, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is minimalizáló $s\bar{t}$-halmazok.* (c) *A minimalizáló halmazok metszete S.*

Feladat 1.3 *Adott e élre hogyan lehet eldönteni, hogy* (a) *létezik-e olyan maximális folyam, amely telíti e-t,* (b) *minden maximális folyam telíti e-t.*

Feladat 1.4 *Algoritmikusan határozzuk meg az összes $\{x, y\}$ rendezett csúcspárt, amelyre létezik olyan X halmaz, hogy $s, x \in X, y \in V - X$ és X minimális vágást határoz meg.*

Feladat 1.5 *Adott két kapacitás függvény esetén algoritmikusan döntsük el, hogy létezik-e olyan S $s\bar{t}$-halmaz, amely miondkét kapacitás-függvényre nézve minimális vágást határoz meg.*

Feladat 1.6 *Adott c_1 és c_2 kapacitás függvények esetén keressünk olyan c_1-re nézve minimális $s\bar{t}$-vágást, amely a c_2-re nézve a lehető legkisebb.*

Feladat 1.7 *Készítsünk algoritmust, amely adott költségfüggvényre eldönti, hogy létezik-e k élidegen út s-ből t-be, melyek mindegyike minimális költségű.*

Feladat 1.8 *Digráfban keressünk két diszjunkt halmazt, melyek egyeki $s\bar{t}$-halmaz, másika $t\bar{s}$-halmaz, úgy hogy befok összegük minimális.*

1.1.3 Kombinatorikus alkalmazások

Ismert, hogy az MFMC tételből könnyen levezethető a Menger tételnek az irányított él- és pontváltozata is. Hasznos megfogalmazni ezeknek az alábbi közös általánosítását.

TÉTEL 1.6 (Menger: pont-él változat) *Legyen $D = (V, E)$ digráf és legyenek k, l pozitív egészek. Akkor és csak akkor létezik D-ben kl élidegen út s-ből t-be úgy, hogy minden csúcson legfeljebb l darab út halad keresztül, ha bárhogy kihagyva egy $X \subseteq V - \{s, t\}$ halmazt $(0 \leq |X| \leq k-1)$, a maradékban minden $s\bar{t}$-halmazból legalább $(k - |X|)l$ él kilép.*

Biz. Ha létezik a kívánt útrendszer, akkor ennek legfeljebb $|X|l$ tagja használhat X-beli pontot, tehát a maradék $(k - |X|)l$ darab út $D - X$-ben halad, és ezért $D - X$ minden $s\bar{t}$-halmazból halmazából legalább $(k - |X|)l$ él kilép, vagyis a feltétel szükséges..

Az elegendőség igazolásához feltehetjük, hogy s-be nem lép be él és tből nem lép ki. Használjuk a szokásos pont széthúzós technikát, azaz minden $v \in V$ csúcsot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön v' és v''. Vezessünk l párhuzamos élt v'-ből v''-be, törljük s'-t és t''-t, végül minden $uv \in E$ élre vezessünk egy élt u''-ből v'-be. Az így keletkező $D' = (V', E')$ digráfban legyen a g kapacitás függvény azonosan 1. A tétel feltételéből adódik, hogy minden $S' \subseteq V'$ $s''\bar{t}'$-halmazra $\delta'_g(S) \geq kl$. Ezért az MFMC tétel miatt létezik kl nagyságú folyam, amely egészértékű. Ez a folyam felbomlik körfolyamokra és kl útfolyamra, amely az eredeti D digráfban a konstrukció miatt kl élidegen útnak felel meg úgy, hogy minden csúcson legfeljebb l halad keresztül. •

Figyeljük meg, hogy az $l = 1$ speciális esetben az irányított Menger tétel pontidegen változatát kapjuk k darab belsőleg pontidegen st út létezéséről, míg a $k = 1$ esetben az élidegen változatot l darab élidegen st út létezéséről. (Mivel ilyenkor összesen l élidegen utat keresünk, az a kívánság, hogy minden csúcson legfeljebb csak l haladhat keresztül automatikusan teljesül, így kihagyható.)

TÉTEL 1.7 (Egawa, Kaneko, Matsumoto) *Egy $D = (V, E)$ digráf élei akkor és csak akkor színezhetők ki l színnel, hogy mindegyik színben létezzék k belsőleg pontidegen út s-ből t-be, ha bárhogyan kihagyva egy $X \subseteq V - \{s, t\}$ halmazt $(0 \leq |X| \leq k-1)$, a maradékban minden $s\bar{t}$-halmazból legalább $(k - |X|)l$ él kilép.*

Biz. Tekintsük az 1.6 tétel által biztosított kl élidegen utat. Feltehető, hogy a digráfban nincs is más él, mert azokat kitörölhetjük a feltétel megsértése nélkül. Ekkor minden $v \in V - \{s, t\}$ pont befoka megegyezik a kifokával (és legfeljebb l), továbbá s-ből kl él lép ki és t-be kl él lép be.

Készítsük el a következő páros gráfot. Minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön v' és v''. között. Az s pontot helyettesítsük az $s'_1, \ldots, s'_k$ új pontokkal, míg t-t a $t''_1, \ldots, t''_k$ pontokkal. Vezessünk $l - \varrho(v) = l - \delta(v)$ párhuzamos élt v' és v''. Minden uv élre vezessünk uv egy élt u' és v'' között. Végül az s-ből kifutó kl darab élt osszuk k darab l-es csoportba tetszőlegesen és az i-dik csoportban lévő l darab sv él mindegyikére kössük össze s_i-t v'-vel. Analóg módon a t-be befutó kl élt osszuk k darab l-es csoportba tetszőlegesen és az i-dik csoportban lévő l darab ut él mindegyikére kössük össze u''-t és t_i-t. A keletkező páros gráf minden csúcsa l-ed fokú lesz. Így Kőnig élszínezési tétele miatt ennek éle felbonthatók l darab teljes párosításra. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy teljes párosítás éleinek megfelelő élhalmaz az eredeti digráfban k belsőleg pontidegen utat definiál s-ből t-be. •

TÉTEL 1.8 (Folkman - Fulkerson) *Egy $G = (V, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik l darab élidegen k-élű párosítás, ha V mindegyik X részhalmaza legalább $l(k + |X| - |V|)$ élt feszít.*

1.2 AZ ELŐFOLYAM ALGORITMUS

A Ford és Fulkerson által bevezetett növelő utas módszer, illetve annak finomított változata, az Edmonds-Karp-Dinitz algoritmus segítségével erősen polinomiális időben, nevezetesen $O(nm^2)$ lépésben meg tudtunk határozni egy s-ből t-be menő maximális nagyságú folyamot és egy minimális vágást, ahol n a csúcsok számát jelöli, m pedig az élekét.

Az alábbiakban bemutatunk egy ettől gyökeresen különböző eljárást, az úgynevezett **előfolyam algoritmust**, amely minden szempontból felülmúlja a növelő utas módszert. Az eljárás, amely A.

Goldbergtől és R.E. Tarjantól származik, elvileg is és gyakorlailag is hatékonyabb a növelő utas algoritmusnál. Nem használ növelő utakat, nem használ segédgráfot, sőt még folyamokat sem! Mindegyik lépése kicsiny, lokális változtatásból áll (szemben a növelő utas eljárásnak egy egész út mentén történő változtatásával), és helyességének illetve a lépésszámára adott korlátnak bizonyítása egyszerű.

Az eljárás egyik kulcsa az, hogy folyam helyett annak egy relaxációjával dolgozik. A $D = (V, E)$ digráf élhalmazán értelmezett $x : E \to \mathbf{R}_+$ függvényt **előfolyamnak** nevezzük, ha az s pont kivételével minden v csúcsra $\gamma_x(v) \geq 0$, ahol $\gamma_x(v) := \varrho_x(v) - \delta_x(v)$. Egy t-től különböző v csúcsot **aktívnak** mondunk, ha $\gamma_x(v) > 0$, míg ha $\gamma_x(v) = 0$ teljesül, akkor **passzívnak**. Az x előfolyam akkor folyam, ha minden $v \in V - \{s,t\}$ csúcs passzív. Egy e élt **csökkenthetőnek** (vagy pozitívnak) mondunk, ha $x(e) > 0$, és **növelhetőnek** (vagy telítetlennek), ha $x(e) < g(e)$. (Egy másik lehetséges interpretáció szerint minden $v \in V - s$ pontból végtelen kapacitású élt vezetünk t-be. Az így keletkező D' gráf egy folyama és egy D-beli előfolyam között egy-egy értelműen megfelel egymásnak.)

Az eljárás másik lényegi része, hogy a csúcsokat egy h szintfüggvény segítségével szintekbe soroljuk; az algoritmus során a csúcsok időnként felsőbb szintre lépnek (lejjebb soha). Egy v csúcs aktuális szintjét a $h(v) \geq 0$ szám jelzi. Az eljárás során végig $h(t) = 0$ és $h(s) = n$, ahol n a csúcsok száma. Emiatt mindig van olyan $0 < i < n$ érték, amelyre a $\{v : h(v) = i\}$ szint üres, azaz Egy uv élt nevezzünk **felmenőnek** illetve **lemenőnek** annak megfelelően, hogy $h(v) > h(u)$ vagy $h(v) < h(u)$.

Az algoritmus bármely közbenső állapotában adott egy x előfolyam és egy h szint-függvény, melyek a következő **illeszkedési feltételeket** teljesítik.

1. $x(uv) > 0$ esetén $h(v) \leq h(u) + 1$, azaz csökkenthető él legfeljebb egy szintet lép fel.
2. $x(uv) < g(uv)$ esetén $h(v) \geq h(u) - 1$, azaz növelhető él legfeljebb egy szintet lép le.

Másként fogalmazva, felmenő csökkenthető élre $h(v) = h(u) + 1$, és lemenő növelhető élre $h(v) = h(u) - 1$. Az ilyen éleket nevezzük **feszes**nek. Az algoritmus csak feszes éleken fog előfolyamot változtatni. Mielőtt az algoritmust ismertetnénk, megemlítjük az illeszkedési feltételeknek néhány egyszerű következményét.

Lemma 1.9 *Ha az x előfolyam kielégíti az illeszkedési feltételeket, úgy egy olyan $0 < i < n$ indexre, amelyre a $\{v : h(v) = i\}$ szint üres, az $S := \{v : h(v) > i\}$ halmazba nem lép be csökkenthető él és S-ből nem lép ki növelhető él.* •

Következésképp, ha x történetesen folyam, akkor $s \in S \subseteq V - t$ miatt x szükségképpen maximális nagyságú folyam és a lemmabeli S halmaz minimális vágást határoz meg.

Lemma 1.10 *Tetszőleges $v \neq t$ aktív pont szintje legfeljebb $2n - 2$.*

Biz. Indukcióval könnyen látszik, hogy minden előfolyam előállítható irányított körök és s-ből induló irányított utak (karakterisztikus vektorainak) nemnegatív lineáris kombinációjaként. Ebből adódik, hogy minden aktív pontba vezet s-ből pozitív (azaz csökkenthető) élekből álló irányított út. Mivel az 1. illeskedési feltétel miatt csökkenthető él legfeljebb egy szintet lép fel és minden t-t nem használó egyszerű út legfeljebb $n - 2$ élből áll, ezért aktív pont szintje legfeljebb $n + n - 2$. •

1.2.1 Az algoritmus lépései

Kiinduláskor minden $v \neq s$ csúcsra $h(v) = 0$, $h(s) = n$, továbbá $x(sv) = g(sv)$ minden s-ből induló élre, míg az összes többi élre $x(e) = 0$. Ezen h és x nyilván teljesítik az illeszkedési feltételeket. Az algoritmus minden lépése vagy egyetlen pont szintjének eggyel történő megemelése vagy egyetlen él x-értékének módosítása.

Ha nem létezik aktív csúcs, magyarán az aktuális x előfolyam folyam, akkor az 1.9 lemmában látottak szerint x maximális folyam, és az algoritmus végetér.

Ha létezik aktív csúcs, úgy válasszunk ki egy maximális szintűt és jelöljük z-vel.

A. (Szintemelés) Ha nem létezik sem z-be felmenő csökkenthető él, sem z-ből lemenő növelhető él, akkor helyezzük z-t eggyel magasabb szintre (azaz növeljük meg a $h(z)$ értéket eggyel.)

B. (Előfolyam módosítás)

B1. Ha létezik z-be belépő $e = uz$ feszes él (azaz felmenő csökkenthető él), úgy csökkentsük $x(e)$-t a $\min\{x(e), \gamma_x(z)\}$ értékkel.
B2. Ha létezik z-ből kilépő $e = zu$ feszes él (azaz lemenő növelhető él), úgy növeljük $x(e)$-t a $\min\{g(e) - x(e), \gamma_x(z)\}$ értékkel.

Két egymást követő szintemelés között végzett tevékenységet nevezzük az algoritmus egy **fázisának.** Miután csak aktív pontnak emelkedik a szintje és minden aktív pont szintje az 1.10 lemma szerint legfeljebb $2n-2$, szintemelés összesen legfeljebb $2n^2$-szer fordulhat elő, vagyis legfeljebb $2n^2$ fázis van.

Csak előfolyam módosításkor keletkezhet új aktív pont éspedig a(z aktív) z alatti u pont. Miután mindig maximális szintű aktív pontot választunk, ha ez egyszer passzívá válik, akkor ugyanazon fázis során már az is marad. Így egy fázis alatt minden élen az x-értéket legfeljebb egyszer módosítjuk. Következésképp az algoritmus legfeljebb $O(n^2m)$ lépés után végetér.

Jobb lépésszám becslés

Kicsit körültekintőbb becsléssel javíthatunk a korláton. Egy előfolyam módosítást nevezzünk **kiegyenlítőnek**, ha a minimum $\gamma_x(z)$-n vétetik fel, azaz a módosítás végrehajtása z-t passzívvá teszi. Ha a módosítás az $e = uv$ élen nem kiegyenlítő, akkor e megszűnik feszesnek lenni. Nevezetesen, ha e felmenő (lemenő) él volt, akkor őrajta az x-érték nullára csökken ($g(e)$-re nő). Legközelebb csak akkor lehet az e élen módosítás, ha lemenővé (felmenővé) változott, tehát ha a $h(u)$ (illetve $h(v)$) szint legalább kettővel megemelkedett.

Mivel a legmagasabb szint kisebb, mint $2n$, tetszőleges élen az egész algoritmus során legfeljebb $2n$ nem-kiegyenlítő módosítás fordulhat elő. Így a nem-kiegyenlítő módosítások teljes száma legfeljebb $2nm$. Miután egy fázis során kiegyenlítő módosítás legfeljebb n lehet, és a fázisok száma legfeljebb $2n^2$, kapjuk, hogy a kiegyenlítő módosítások teljes száma legfeljebb $2n^3$. Ezeket összevetve az algoritmus teljes lépésszámára az $O(n^3)$ becslés adódik.

1.3 ÁRAMOK

Legyen $f : E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : E \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az x vektort **áramnak** (circulation) nevezzük, ha teljesül a rá **megmaradási szabály** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (Figyelem: az f-ben megengedünk $-\infty$ komponenst, ami persze csak annyit jelent, hogy az illető élen az áram értéke nincs alulról korlátozva. Ez azt is jelenti, hogy csak az olyan e élen rendelünk majd az $f(e) \leq x(e)$ egyenlőtlenséghez duál változót, amelyen az $f(e)$ korlát véges. Analóg módon a g-nek lehetnek $+\infty$ komponensei, de az x áram komponensei mindig valósak. Az f alsó korlátban $+\infty$-t, a g felső korlátban pedig $-\infty$-t nem engedünk meg. Néha előírjuk, hogy az f vagy a g komponensei egészértékűek legyenek; ebbe beleértjük a $\pm\infty$-t is.) Az x áramot **megengedettnek** (feasible) mondjuk, ha

$$f \leq x \leq g. \tag{1.1}$$

Gyakorlat 1.9 *(a) Igazoljuk, hogy x akkor és csak akkor áram, ha $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (b) Ha x áram, akkor $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra is fennáll.*

Alapvető az alábbi, Alan Hoffmantól származó tétel.

TÉTEL 1.11 (Alan Hoffman, 1960) *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{1.2}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (1.2) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.

Biz. (MFMC $\to$ Hoffman) Minden $v \in V$ csúcsra legyen $\lambda(v) := \varrho_f(v) - \delta_f(v)$. (Az itt következő levezetésben feltesszük, hogy f, g véges értékű: kis gyakorló feladat az általános eset kezelése.) Ha λ mindenhol nulla, akkor f megengedett áram, és készen vagyunk.

Ha λ nem azonosan nulla, akkor az $S = (v : \lambda(v) > 0)$ és $T = (v : \lambda(v) < 0)$ halmazok nem-üresek. Készítsük el a $D' = (V', A')$ digráfot úgy, hogy $V' = V \cup \{s, t\}$ és $A' = A \cup (s, v) : v \in S \cup ((v, t) : v \in T)$. Definiáljuk a g' kapacitás függvényt a következőképpen. $g'(sv) := \lambda(v)$ ha $v \in S, g'(vt) := -\lambda(v)$ ha $v \in T$, és $g'(a) := g(a) - f(a)$ ha $a \in A$. Legyen $M = \sum(\lambda(v) : v \in S)$. A következő lemma a kapcsolatot írja le egyrészt D megengedett áramai és D' megengedett st folyamai között, másrészt D' M-nél kisebb vágásai és D (5.1)-et megsértő halmazai között.

Lemma 1.12 (a) *Ha x M-nagyságú megengedett st-folyam D'-ben (a g' kapacitásra vonatkozóan), akkor $f + x$ (az eredeti A-ra megszorítva) megengedett áram.*

(b) *Ha $\delta_{g'}(X + s) < M$ valamely $X \subseteq V$ halmazra, akkor X megsérti a Hoffman féle (1.2) feltételt.*

Biz. (a) A megengedettség, azaz $f \leq f + x \leq g$, következik a konstrukcióból. A megmaradási szabály nyilván fennáll $V - (S \cup T)$ pontjaiban. Mivel x nagysága M, minden s-ből kilépő él telített. Így S-nek bármely v pontjára az eredeti gráfban érvényes, hogy $x(sv) + \varrho_x(v) = \delta_x(v)$, azaz $\varrho_f(v) - \delta_f(v) + \varrho_x(v) = \delta_x(v)$, és így $\varrho_{f+x}(v) = \delta_{f+x}(v)$, vagyis a megmaradási szabály érvényes S pontjaiban is. A bizonyítás T pontjaira analóg módon végezhető el.

(b) $\lambda(S) = M > \delta_{g'}(X + s) = \delta_{g-f}(X) + \lambda(S - X) - \lambda(T \cap X)$, amibe $\lambda(S - X) = \lambda(S) - \lambda(S \cap X)$-t helyettesítve kapjuk, hogy $0 > \delta_{g-f}(X) - \lambda(S \cap X) - \lambda(T \cap X) = \delta_{g-f}(X) - \lambda(X) = \delta_{g-f}(X) + \delta_f(X) - \varrho_f(X)$, vagyis $\delta_g(X) < \varrho_f(X)$. •

Feladat 1.10 *Vezessük le Hoffman tételét az MFMC tételből, ha f-nek lehetnek $\{-\infty\}$, g-nek pedig $\{+\infty\}$ komponensei.*

A fenti redukció azt is mutatja, hogy egy maximális folyam illetve minimális vágás meghatározására szolgáló algoritmus segítségével el lehet dönteni, hogy teljesül-e (1.2), és ha igen, akkor tudunk találni megengedett áramot.

Megmutatjuk, hogy Hoffman tételéből könnyen következik az MFMC tétel (nemtriviális iránya).

Biz. (Hoffman $\rightarrow$ MFMC). Jelölje m_g a szóbanforgó minimum értékét. (Ez a minimum nyilvánvalóan létezik, merthogy véges sok szám minimumáról van szó. Az viszont még ezen a ponton nem világos, hogy létezik maximális nagyságú folyam.) Adjunk D-hez egy új $e = ts$ élt és definiáljuk $f(e) = m_g, g(e) := \{\infty\}$. Az eredeti éleken legyen f mindenhol nulla.

Könnyen látszik, hogy most (1.2) fennáll, és így az 1.11 tétel szerint létezik megengedett áram (amely ráadásul egészértékű, ha g az). Kihagyva a hozzávett e élt, m_g nagyságú folyamot kapunk. •

1.3.1 Hálózati mátrixok

Fontos megjegyezni, hogy a hálózati mátrixokkal megadott poliéderek nemürességének feladata megoldhatók áram problémaként. Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf, F feszítő fa és legyen $N := E - F$ a nem-fa élek halmaza. Legyen adott $f = (f_F, f_N)$ és $g = (g_F, g_N)$ korlát, melyekre $f \leq g$. Jelölje az F-hez tartozó $(0, \pm 1)$-es hálózati mátrixot A, míg a D digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia mátrixát B. Legyen továbbá $x = (x_F, x_N)$.

TÉTEL 1.13 *A $\{x : f_F \leq Ax_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N\}$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha a $\{x : Bx = 0, f \leq x \leq g)$ megengedett áram poliéder nemüres.*

Biz. Amennyiben $x = (x_F, x_N)$ áram (azaz $Bx = 0$), úgy könnyen látszik, hogy $x_F = Ax_N$, és persze $cx = c_N x_N$. Emiatt $f \leq x \leq g$ ekvivalens a $f_F \leq Ax_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N$ feltételekkel. Fordítva, tegyük fel, hogy x_N kielégíti ezen utóbbi egyenlőtlenségeket. Minden $e \in N$ nem-fa élhez legyen χ_e az $(1, a_e)$ vektor, ahol a_e az A mátrix e-hez tartozó oszlopa. (Mással szóval, χ_e az e élhez tartozó C_e alapkör $0, \pm 1$-es incidencia vektora.) Ekkor persze χ_e áram, és így az $x := \sum(x_N(e)\chi_e : e \in N)$ is áram, méghozzá olyan, hogy $x(e) = x_N(e)$, ha $e \in N$. Látható, hogy $f_F \leq Ax_N \leq g_F$ azzal ekvivalens, hogy $f_F(e) \leq x(e) \leq g_F(e)$ minden $e \in F$ élre fennáll. •

Gyakran az áramnál általánosabb fogalmat tekintenek. Például az x vektorra azt írjuk elő, hogy minden v pontra $\varrho_x(v) - \delta_x(v) = b(v)$, ahol $b : V \rightarrow \mathbf{R}$ előre adott vektor. Vagy még általánosabban, adott $p : V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b : V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ esetén $(p \leq b)$ minden v csúcsra legyen

$$p(v) \leq \varrho_x(v) - \delta_x(v) \leq b(v). \tag{1.3}$$

Egy egyszerű fogással azonban ez a feladat áram problémává alakítható. Nevezetesen, vegyünk fel egy új s csúcsot, és D valamennyi pontjából vezessünk egy-egy élt s-be. Egy új vs élen legyen $f(vs) := p(v), g(vs) := b(v)$. Jelölje a kibővített élek halmazát E'. Tetszőleges $x : E \to \mathbf{R}$ vektorhoz legyen $x' : E' \to \mathbf{R}$ a következőképpen definiálva: $x'(e) := x(e)$ ha $e \in E$, és $x'(e) := \varrho_x(v) - \delta_x(v)$ ha $e' = vs$ $(v \in V)$. Hasonlóképp terjesszük ki f-t és g-t az új élekre: $f(us) := p(u), g(us) := b(u)$. Könnyen látszik, hogy x akkor és csak akkor teljesíti (1.1)-t és (1.2)-t, ha x' megengedett áram.

Feladat 1.11 *Hoffman tételének általánosításaként igazoljuk, hogy akkor és csak akkor létezik az (1.1)-t és (1.3)-t kielégítő x vektor, ha $\varrho_f(X) - \delta_g(X) \leq \min(p(X), b(V - X))$ fennáll minden $X \subseteq V$-re.*

2003. május 22.umaxfo

2. Fejezet

KÖLTSÉGES FOLYAMOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Legyen adva $D = (V, A)$ irányított gráf az s forrás- és a t nyelőponttal. Adott még az éleken a g nemnegatív kapacitás függvény és a c nemnegatív költségfüggvény. Feltesszük, hogy g egészértékű. Korábban már láttuk, hogy miként lehet egy maximális M nagyságú s-ből t-be vezető folyamot polinom időben kiszámítani. Most minden 0 és M közé eső k egészre szeretnénk találni egy olyan k nagyságú folyamot, melynek költsége minimális. Egy z folyam **költségét** a $cz = \sum(c(e)z(e) : e \in A)$ skaláris szorzattal definiáljuk. Azt mondjuk, hogy a z st-folyam **minimális költségű folyam**, ha z a legkisebb költségű a megengedett, z-vel azonos nagyságú st-folyamok közül.

2.1 Minimális költségű folyam algoritmus

Az alábbiakban ismertetjük Ford és Fulkerson [1962] algoritmusát. Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V-n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. Használni fogjuk a következő jelölést. $\bar{c}(uv) = c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$, ahol $uv \in A$. Potenciálok segítségével egy z folyam cz költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$\sum c(uv)z(uv) = \sum(\pi(v) - \pi(u))z(uv) + \sum \bar{c}(uv)z(uv) = \pi(t)k + \sum(\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) < 0) + \sum(\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) > 0) \geq \pi(t)k + \sum \bar{c}(uv)g(uv) + 0.$

Ebből következik, hogy egy z folyam bizonyosan minimális költségű, amennyiben létezik olyan π potenciál, amelyre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ez pontosan akkor van így, ha fennáll a következő két optimalitási feltétel.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \qquad (ii)$$

[Tetszőleges π potenciálra a $\pi(v) - \pi(u)$ potenciál különbség egy semleges költségfüggvényt definiál az élhalmazon abban az értelemben, hogy minden k nagyságú folyamnak ugyanaz a költsége, éspedig $k(\pi(t) - \pi(s))$. Így, ha a c költségfüggvényt egy potenciál különbséggel eltoljuk, akkor a kapott $\bar{c}(uv) := c(uv) - (\pi(v) - \pi(u))$ költségfüggvény ekvivalens az eredetivel. Ennek alapján az optimalitási feltételeket úgy is lehet interpretálni, hogy egy z folyam akkor és csak akkor minimális költségű, ha létezik egy olyan $\bar{c}$ ekvivalens költségfüggvény, amely ha egy uv élen pozitív, úgy a folyam a minimumon van, azaz $z(uv) = 0$, míg ha $\bar{c}(uv)$ negatív, úgy a folyam a maximumon van, azaz $z(uv) = g(uv)$.]

Ford és Fulkerson módszere a maximális folyam kiszámítására vonatkozó Ford-Fulkerson algoritmus finomításának tekinthető. Minden lehetséges egész k értékre megkonstruálunk egy minimális költségű k nagyságú folyamot. Az eljárás az azonosan nulla folyammal és az azonosan nulla potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamot illetve egy minimális vágást kaptunk.

ITERATÍV LÉPÉS Az általános helyzetben adott a z folyam és a π potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. D'-nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy uv él **előre él,** ha $uv \in A, \bar{c}(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Egy uv él **hátra él,** ha $vu \in A, \bar{c}(vu) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Legyen S az s-ből D'-ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehetséges.

1. Eset *$t \notin S$, azaz t nem elérhető s-ből.*

Legyen $\varepsilon_1 = min(\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(S), z(uv) < g(uv))$ és $\varepsilon_2 = min(-\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(V-S), z(uv) > 0)$, ahol az üres halmazon vett minimumot ∞-nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Az optimalitási feltételek és az S definíciója miatt ε pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az S-ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az S-be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így tehát $\delta_g^+(S) = val(z)$, az aktuális z folyam maximális nagyságú és az S-ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk π-t úgy, hogy minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal. Az S és az ε definíciójából rögtön kapjuk:

Állítás 2.1 *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott z folyam kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a régi S által feszített élek változatlanok maradnak és ezért az s-ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint S. Ezért az 1. eset legfeljebb $|V| - 1$-szeri előfordulása után biztosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagypedig az alábbi 2. eset.

2. Eset *$t \in S$, vagyis t elérhető s-ből.* Legyen P a D'-ben egy s-ből t-be vezető irányított út. Módosítsuk z-t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = z(uv) + 1$, ha uv a P-nek előre éle és legyen $z'(uv) = z(uv) - 1$, vu a P-nek hátra éle.

A módosításból adódik:

Állítás 2.2 *A módosított folyam és változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Ezzel az algoritmus leírását be is fejeztük. Mi mondható az eljárás futásidejéről? Lényegében M darab növelésre van szükségünk (2. eset), így az eljárás polinomimális, amennyiben mind az M minimális költségű folyamot meg kell határoznunk.

Elképzelhető persze olyan helyzet is, amikor például csak egy maximális nagyságú minimális költségű folyamot kell kiszámítanunk. Ebben az esetben az algoritmus természetesen nem biztosan polinomiális, hiszen lépésszáma az M nagyságával arányos. De még ebben az esetben is két fontos speciális eset kezelhető.

Ha a legnagyobb kapacitás nem túlságosan nagy (nevezetesen, ha $|V|$ polinomjával korlátozható), akkor a fenti eljárás nyilván polinomiális, függetlenül attól, hogy a c költség-függvény egészértékű-e vagy sem.

Tegyük most fel, hogy a kapacitások tetszőlegesek, a költség-függvény egészértékű és "kicsi". Ekkor az algoritmus következő módosítása erősen polinomiális algoritmust eredményez. Tekintsük az algoritmus egy közbenső helyzetét, amikor egy π potenciál rendelkezésre áll. A szoros élek digráfjában (egy uv él **szoros,** ha $\bar{c}(uv) = 0$) számítsunk ki (a Max-flow Min-cut algoritmusssal) egy maximális nagyságú z folyamot és egy S minimális ki-kapacitású $s\bar{t}$-halmazt. Ha D-ben minden S-be belépő és S-ből kilépő él szoros, akkor S minimális vágást határoz meg és az aktuális z folyam maximális nagyságú, amely kielégíti az optimalitási feltételeket. Ebben az esetben az algoritmus véget ér.

Amennyiben D-nek létezik nem-szoros éle, amely S-be be- vagy kilép, akkor ε, ahogy azt fentebb az 1. esetnél kiszámítottuk, véges lesz. Módosítsuk π-t úgy, mint az előbb, azaz minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal.

Azt állítjuk, hogy a $\pi(t)$ érték a D digráf valamely (irányítatlan értelemben vett) s-ből t-be vezető útjának a költsége. Valóban, minden folyam-növeléskor a segédgráfban van olyan st út, amely szoros élekből áll.

Következik, hogy a különböző $\pi(t)$ értékek száma (vagyis az 1. eset előfordulásainak száma) felülről korlátozható az élek össz-költségével. Tehát az eljárás polinomiális, ha a c egészértékű és legnagyobb értéke $|V|$ polinomjával korlátozható.

2003. május 22.uminfo

2.2 Részbenrendezett halmazok láncai és antiláncai

Legyen $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz. Egy lánc elemszámát néha a lánc **hosszának** nevezik. A leghosszabb lánc hossza a részbenrendezett halmaz **magassága**. A legnagyobb antilánc elemszáma részbenrendezett halmaz **szélessége**.

2.2.1 A Dilworth tétel és polárisa

Először a magasságra és a szélességre vonatkozóan két fontos tételt bizonyítunk. Az első meglehetősen egyszerű (néha a Dilworth tétel polárisának hívják):

TÉTEL 2.3 (poláris Dilworth) *A P-t fedő antiláncok minimális c száma egyenlő a leghosszabb lánc hosszával, vagyis P magasságával.*

Biz. Világos, hogy max $\leq$ min. Az egyenlőség igazolásához jelölje A_1 a minimális elemek halmazát. Ez nyilván antilánc. Jelölje c' a $P' := P - A_1$ magasságát. Indukcióval P' felbontható c' darab antiláncra, így P felbontható $c' + 1$ darab antiláncra. Másrészt P' bármely eleme nagyobb, mint A_1 valamelyik eleme, és ezért P' bármely lánca megnövelhető egy A_1-beli elemmel, vagyis P-ben van $c' + 1$ elemű lánc. •

A fenti induktív bizonyítás könnyen algoritmussá alakítható, amely megtalál egy antilánc felbontást és egy láncot, melyekre egyenlőség áll.

Legyen A_1 a P minimális elemeinek halmaza. Legyen A_2 az A_1 elhagyása után a minimális elemek halmaza. Ezt folytatva megkonstruáljuk az $A_1, \ldots, A_c$ antiláncokból álló felbontását P-nek. Most visszafelé haladva előállítunk egy c elemből álló láncot. Legyen a_c az A_c antilánc tetszőleges eleme. Az a_c elem nem került bele A_{c-1}-be, ezért van A_{c-1}-nek egy a_c-nél kisebb a_{c-1} eleme. Ez az elem nem került A_{c-2}-be, tehát van A_{c-2}-ben egy a_{c-2} elem, amely kisebb, mint a_{c-1}. Ezt az eljárást folytatva, megkapunk egy c elemű láncot.

Feladat 2.1 *Igazoljuk, hogy egy legalább $kl + 1$ tagú számsorozatban vagy van $k + 1$ tagú monoton növő rész-sorozat, vagy van $l + 1$ tagú szigorúan monoton csökkenő rész-sorozat. Előfordulhat-e, hogy mind a két rész-sorozat létezik?*

Érvényes tételt kapunk, ha a 2.3 tételben a lánc és antilánc szavakat felcseréljük:

TÉTEL 2.4 (Dilworth) *A P-t fedő láncok minimális a száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával, vagyis P szélességével.*

Biz. A max $\leq$ min egyenlőtlenség ismét nyilvánvaló. A fordított irány igazolásához készítsünk el egy $G = (X, Y; E)$ páros gráfot, melynek mindkét osztálya a P halmaznak felel meg és valamely x_i elem y_j-vel akkor van összekötve, ha $p_i > p_j$. (x_i NINCS összekötve y_i-vel.)

Lemma 2.5 *G tetszőleges M párosításának megfelel P-nek egy $n - |M|$ láncból álló felbontása.*

Biz. Tekintsük a B halmaz M által fedetlen pontjait. Ezek száma $n - |M|$. Legyen x_i olyan pont, amelyet M nem fed. Mindegyik ilyen x_i elemhez megkonstruálunk egy C_i láncot, a következőképpen. Ha y_i fedetlen, akkor C_i álljon az egyetlen p_i elemből. Ha y_i-t fedi valamely M-beli $x_j y_i$ él, akkor $p_j > p_i$, és legyen p_j a lánc következő eleme. Ha y_j-t fedi valamely M-beli $x_k y_j$ él, akkor legyen p_k a lánc következő eleme. Így folytatva, a láncot addig növeljük, amig a lánchoz utolsónak vett p_m elemhez tartozó y_m csúcsot már nem fedi M-beli él.

Íly módon az M által nem fedett $n - |M|$ darab X-beli csúcs mindegyikéhez definiáltunk egy láncot P-ben. A lemma következik abból, hogy az így kapott láncok páronként diszjunktak és lefedik P-t. •

Lemma 2.6 *Legyen $S \subseteq X \cup Y$ a páros gráf éleinek minimális lefogása. Ekkor P-ben van olyan A antilánc, ameyre $|S| + |T| = n$.*

Biz. Először belátjuk, hogy ha $x_i \in S$, akkor $y_i \notin S$. Ha indirekt mindkét csúcs S-ben volna, akkor S minimalitása miatt a gráfnak létezne olyan $x_i y_j$ illetve $x_k y_i$ éle, melyekre $y_j, x_k \notin S$. Ekkor tehát $p_k > p_i > p_j$, amiből $p_k > p_j$, és így $x_k y_j$ éle a gráfnak. Ezt az élt viszont nem fogja le S, amely ellentmondás azt bizonyítja, hogy valóban nem lehet x_i és y_i mindegyike S-ben.

Legyen most $A := \{p_i : x_i \notin S, y_i \notin S\}$. Rögtön látszik, hogy az A halmaz kielégíti a lemma követelményeit. •

A két lemmát felhasználva Dilworth tétele rögtön következik a Kőnig tételből, ami szerint egy páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával. • •

2.2.2 Közös általánosítás

A fenti két tételnek megadjuk egy közös általánosítását. Valamely $\mathcal{B}= \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ családra használjuk az $\cup\mathcal{B} = \cup(B_i : i = 1, \ldots, k)$ jelölést. A $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ **lánc-családon** γ darab diszjunkt nemüres láncból álló családot értünk. Jelölje $\mathbf{C}_\gamma$ a γ láncból álló lánc-családok halmazát, míg $\mathbf{C}$ az összes lánc-családot magába foglaló halmazt. Legyen $c_\gamma = \max|\cup\mathcal{C}_\gamma| : \mathcal{C} \in \mathbf{C}_\gamma$, vagyis c_γ a legnagyobb halmaz elemszáma, amely előáll γ lánc egyesítéseként (azaz a Dilworth tétel alapján nem tartalmaz γ-nál nagyobb elemszámú antiláncot).

Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha\}$ **antilánc-családon** α darab diszjunkt nemüres antiláncból álló családot értünk. Jelölje $\mathbf{A}_\alpha$ az α antiláncból álló antilánc-családok halmazát, míg $\mathbf{A}$ az összes antilánc-családot magában foglaló halmazt. Legyen $a_\alpha = \max|\cup\mathcal{A}_\alpha| : \mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$, vagyis a_α a legnagyobb halmaz elemszáma, amely előáll α antilánc egyesíteseként (azaz a poláris Dilworth tétel alapján nem tartalmaz α-nál nagyobb elemszámú láncot).

Dilworth tétele szerint $c_a = n$, a poláris tétel szerint $a_c = n$. Mi mondható c_γ-ról $(1 \le \gamma \le a)$ és a_α-ról $(1 \le \alpha \le c)$?

TÉTEL 2.7 (Greene és Kleitman, 1976) $a_\alpha = \min\{q\alpha + |P - \cup\mathcal{C}_q| : \mathcal{C}_q \in \mathbf{C}\}$.

TÉTEL 2.8 (Greene, 1976) $c_\gamma = \min\{q\gamma + |P - \cup\mathcal{A}_q| : \mathcal{A}_q \in \mathbf{A}\}$.

Miután egy láncnak és egy antiláncnak legfeljebb egy közös eleme lehet, a_α és c_γ legfeljebb akkora, mint a szóbanforgó minimum.

DEFINÍCIÓ Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha)$ antilánc-család és a $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ lánc-család **ortogonális**, ha

$$P = (\cup\mathcal{A}_\alpha) \cup (\cup\mathcal{C}_\gamma) \tag{2.1}$$

és

$$A_i \cap C_j \neq \emptyset \text{ hacsak } 1 \le i \le \alpha,\ 1 \le j \le \gamma, \tag{2.2}$$

azaz a lánc-család és az antilánc-család együttesen lefedi P-t és mindegyik A_i antilánc metszi az összes C_j láncot.

A 2.7 és 2.8 tételek nemtriviális részeit átfogalmazhatjuk az alábbiak szerint.

TÉTEL 2.9 *Minden α-ra, $1 \le \alpha \le c$, létezik $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}$, valamely γ-ra, amelyek ortognálisak.*

TÉTEL 2.10 *Minden γ-ra, $1 \le \gamma \le a$, létezik $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}_\gamma$ és $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}$, valamely α-ra, melyek ortogonálisak.*

A két tétel közös általánosítása így hangzik.

TÉTEL 2.11 *A $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz szélessége legyen a, magassága c. Létezik egy olyan $\mathcal{C}_a|\ \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}|\ \mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}|\ \mathcal{A}_{i_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_2}|\ \mathcal{C}_{a-j_1-1}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_2}| \ldots$ sorozat, amely a $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{a-1}, \ldots, \mathcal{C}_1$ és az $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_c$ sorozatok összefésülésével keletkezik, ahol $\mathcal{C}_j \in \mathbf{C}_j$ és $\mathcal{A}_i \in \mathbf{A}_i$, és a sorozat bármely tagjára (akár $\mathcal{C}_j$, akár $\mathcal{A}_i$) fennáll, hogy ortogonális az utolsó őt megelőző ellentétes típusú tagra. (Vagyis, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}$ ortogonális $\mathcal{C}_a$-ra, $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ mindegyike ortogonális $\mathcal{A}_{i_1}$-re, stb.)*

Biz. Feleltessünk meg P-nek egy $D = (V, A)$ irányított gráfot, ahol $V := \{s, t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$, és $A := \{(s, x_i) : i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{(y_i, t) : i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{x_i y_j : \text{ha } p_i \geq p_j\}$. Legyen minden e él kapacitása $g(e) \equiv 1$, míg a költsége $c(e) = 1$, ha $e = x_i y_i$ és 0 különben.

Alkalmazzuk a Ford és Fulkerson féle minimális költségű folyam algoritmust. Legyen z és π az algoritmus egy közbenső állapotához tartozó folyam illetve potenciál. Ekkor z $0-1$-értékű, π nemnegatív, $\pi(s) = 0$ és kielégítik a következő optimalitási feltételeket.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \tag{ii}$$

Írjuk fel, hogy a különféle élekre mit jelentenek az optimalitási feltételek.
$x_i y_i$ típusú élre:

$$\pi(y_i) - \pi(x_i) < 1 \Rightarrow z(x_i y_i) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(y_i) - \pi(x_i) > 1 \Rightarrow z(x_i y_i) = 1. \tag{ii}$$

$x_i y_j$ típusú élre (tehát amikor $p_i > p_j$):

$$\pi(y_j) - \pi(x_i) < 0 \Rightarrow z(x_i y_j) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(y_j) - \pi(x_i) > 0 \Rightarrow z(x_i y_j) = 1. \tag{ii}$$

$s x_i$ típusú élre:

$$\pi(x_i) < 0 \Rightarrow z(s x_i) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(x_i) > 0 \Rightarrow z(s x_i) = 1. \tag{ii}$$

$y_i t$ típusú élre:

$$\pi(y_i) > \pi(t) \Rightarrow z(y_i t) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(y_i) < \pi(t) \Rightarrow z(y_i t) = 1. \tag{ii}$$

Lemma 2.12 *Minden $i = 1, \dots, n$-re*

$$\pi(y_i) \leq \pi(x_i) + 1. \tag{2.3}$$

Biz. Az (2.3) fennáll az algoritmus kezdetén. A folyamnövelési lépés nem befolyásolja (2.3)-t, egy potenciálcsere pedig csak akkor ronthatja el, ha a csere előtt $\pi(y_i) = \pi(x_i) + 1$ állt és x_i elérhető volt a D' segédgráfban, miközben y_i nem. Ebben az esetben $\pi'(y_i) = \pi'(x_i) + 2$ érvényes a módosított π' potenciálra. Az (ii) feltétel (ha π'-re alkalmazzuk) maga után vonja, hogy $z(x_i y_i) = 1$. Ezért $z(s x_i) = 1$ és a D' segédgráfnak az egyetlen x_i-be lépő éle $y_i x_i$. De ez ellentmond az indirekt feltevésnek, hogy x_i elérhető, míg y_i nem. •

Lemma 2.13 *Ha $p_i > p_j$ és $z(x_i y_j) = 1$, akkor $\pi(x_i) = \pi(y_j)$.*

Biz. Az (i) feltétel alapján a $\pi(y_j) \geq \pi(x_i)$ egyenlőtlenség végig érvényben van, és az algoritmus indításakor egyenlőség áll. Ha egy potenciálcsere elrontaná ezt, akkor $\pi'(y_j) = \pi'(x_i) + 1$ állna a módosított π' potenciálra, és x_i elérhető volna D'-ben az s-ből, miközben y_j nem. De ez nem lehetséges, mivel $y_j x_i$ az egyedüli él D'-ben, amely belép x_i-be.

Egy folyamcsere csak akkor ronthatja el $\pi(x_i) = \pi(y_j)$-t, ha az aktuális (:= 0) folyamértéket az $x_i y_j$ élen 1-gyel megnöveli. De ekkor $x_i y_j$ éle D'-nek és emiatt $\pi(y_i) - \pi(x_j) = c(x_i y_j) = 0$. •

Jelölje P' azon p_h elemek halmazát, melyekre $z(x_h y_h) = 0$. Ekkor a Dilworth tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan azon $x_i y_j$ $(i < j)$ élek halmaza, melyekre $z(x_i y_j) = 1$, megfelel egy $\mathcal{C}_\gamma$ lánccsaládnak, ahol $\gamma = n - val(z)$, és ez a lánc-család a P' partícióját adja. $\alpha := \pi(t)$-re definiáljunk egy $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ családot, ahol $A_i = \{p_j : \pi(x_j) + 1 = \pi(y_j) = i\}$.

Lemma 2.14 *$\mathcal{A}_\alpha$ antilánc-családot alkot, amely ortogonális $\mathcal{C}_\gamma$-ra.*

Biz. Először mutassuk meg, hogy mindegyik A_i antilánc. Valóban, ha indirekt $p_m, p_j \in A_i$ valamely $p_m > p_j$ elemekre, akkor $\pi(y_j) - \pi(x_m) = 1$, és ezért (ii) alapján, $z(x_m, y_j) = 1$, ellentétben a 2.13 lemmával.

(2.1) igazolása érdekében legyen p_m olyan elem, amely nincs $P' = \cup\mathcal{C}_\gamma$-ban, ami azzal ekvivalens, hogy $z(x_m, y_m) = 1$. Ekkor (i) miatt $\pi(y_m) - \pi(x_m) \geq 1$, így a 2.12 lemma miatt $\pi(y_m) - \pi(x_m) = 1$. Vagyis $\pi(y_m)$-t i-vel jelölve $p_m \in A_i$, tehát (2.1) fennáll.

Igazoljuk végül, hogy $A_i \cap C_j \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq \alpha, 1 \leq j \leq \gamma)$. Álljon a C_j lánc mondjuk a $p_1 > \ldots > p_k$ elemekből $(k \geq 1)$. Ekkor $z(y_1 t) = 0$, így (ii) miatt $\pi(y_1) \geq \pi(t)$, amiből persze $\pi(y_1) = \pi(t) = \alpha$. Hasonlóan $z(s x_k) = 0$, így (i) miatt $\pi(x_k) \leq 0$, amiből $\pi(x_k) = 0$. A 2.13 lemmából kapjuk, hogy $\pi(x_1) = \pi(y_2), \pi(x_2) = \pi(y_3), \ldots, \pi(x_{k-1}) = \pi(y_k)$. Ezt a 2.12 lemmával összevetve kapjuk, hogy a $0 = \pi(x_k), \pi(y_k), \pi(y_{k-1}), \pi(y_{k-2}), \ldots, \pi(y_1) = \alpha$ egész számokból álló sorozat olyan, hogy minden tagja legfeljebb eggyel nagyobb a megelőzőnél. Íly módon minden i-re $(1 \leq i \leq \alpha)$ kell olyan m indexnek lennie, amelyre $\pi(x_m) = \pi(y_m) + 1 = i$. Vagyis $p_m \in C_j \cap A_i$.

Tegyük most fel, hogy a minimális költségű folyamot kiszámító algoritmus a következőképpen futott le. Kiindulva a π azonosan nulla potenciálból és a z azonosan nulla folyamból, a folyam nagysága egyenként k_0-ig nő, a potenciál nagysága (ami definíció szerint a $\pi(t)$ érték) egyenként i_1-ig, azután ismét a folyam nagysága k_1-ig, ..., stb. Végül a folyam nagysága k_s-re, a potenciál nagysága i_s-re nő. Az algoritmus a maximális nagyságú folyam elérésekor ér véget, amely nagyság esetünkben n, azaz $k_s = n$.

Legyen $a := n - k_0$ és $j_i := k_i - k_0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Az utolsó lemma alapján az algoritmus $(k_0, 1)$ paraméterekkel jellemzett fázisához a $\mathcal{C}_a$ a tagú lánc-család és az $\mathcal{A}_1$ egytagú antilánc-család tartozik, melyek ortogonálisak egymásra. Ezután a potenciál nagysága, mint már említettük, egyenként i_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}$ antilánc-családok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{C}_a$-ra. Ezután a folyam értéke egyenként k_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ lánc-családok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{A}_{i_1}$-re, és így tovább. Ezzel a tétel bizonyítását és az algoritmus ismertetését befejeztük. • •

Feladat *Dilworth után nevezzünk egy maximális (azaz a elemszámú) antiláncot* **D-antiláncnak.** *Igazoljuk, hogy a diszjunkt D-antiláncok maximális száma egyenlő a D-antiláncokat lefogó elemek minimális számával.* (Segítség: Tekintsük a 2.11 tételben leírt sorozat $\mathcal{A}_{i_1} | \ \mathcal{C}_{a-1}$ tagjait.)

file: lgreen 2003. május 22.

3. Fejezet

PÁROSÍTÁSOK

3.1 PÁROS GRÁFOK

3.1.1 Maximális elemszámú párosítások

Az egész elmélet kiindulópontja Kőnig klasszikus tétele.

TÉTEL 3.1 (Kőnig Dénes) *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

Biz. Egy ν elemű párosítás lefogásához kell legalább ν csúcs, így az összes élhez is kell, ezért $\nu \leq \tau$. Ebből az is következik, hogy $(*)$ *egy ν elemű L lefogás egy ν elemű párosítás minden élét pontosan egyszer fogja le.*

A fordított irányhoz lássuk be, hogy G élei lefoghatók $\nu(G)$ ponttal. Indirekt, legyen G minimális ellenpélda abban az értelemben, hogy $\nu(G) < \tau(G)$, de minden G-nél kisebb G' gráfra $\nu(G') = \tau(G')$.

Minden u csúcsot elkerül maximális párosítás, mert ha valamelyiket nem, úgy $\nu(G - u) < \nu(G)$, és miután $G - u$ élei már lefoghatók $\nu(G - u) \leq \nu(G) - 1$ ponttal, ezen lefogáshoz u-t hozzávéve G éleinek egy legfeljebb $\nu(G)$ elemű lefogását kapnánk.

Legyen $e = st$ a gráf egy éle, melyre $s \in S, t \in T$. A $G - e$ éleinek létezik $\nu(G)$ elemű $L := A \cup B$ lefogása, ahol $A \subseteq S, B \subseteq T$. Az L nem fogja le e-t, mert különben G éleinek is $\nu(G)$ elemű lefogása volna. $G - s$-nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek B-t fedő M_B része $(*)$ miatt nem fedi A egyetlen pontját sem. $G - t$-nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek A-t fedő M_A része $(*)$ miatt nem fedi B egyetlen pontját sem. De most $M_A \cup M_B \cup \{e\}$ párosítása G-nek, melynek elemszáma $|A| + |B| + 1 = \nu(G) + 1$, ellentmondás. •

A most következő algoritmikus bizonyítás lényegében Kőnig eredeti bizonyítása kicsit algoritmikusabb nyelven elmondva. (Kőnig nem tekintette explicit azt a kérdést, hogy miként lehet megtalálni a szóbanforgó alternáló utakat, de a bizonyításából ez közvetlenül kiolvasható.)

Algoritmikus bizonyítás.

A nemtriviális $\nu \geq \tau$ irány igazolásához konstruálunk egy M párosítást és egy L lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges M párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb párosítást, és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan iteráljuk az eljárást, vagy pedig egy $|M|$-mel megegyező elemszámú lefogást, amikoris az algoritmus véget ér.

Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S-ben illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg).

Két eset lehetséges. Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkaptunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. (Technikailag az eljárást nagyon egyszerű végrehajtani: a megtalált út éleinek irányítását egyszerűen megfordítjuk.)

A másik esetben R_T diszjunkt Z-től. Z definíciója folytán Z-ből nem lép ki irányított él. Érvényes továbbá, hogy Z-be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosítás él, hiszen v csak u-n keresztül érhető el, így v csak akkor lehetett irányított úton elérhető R_S-ből, ha u is az volt.

Következik, hogy az $L := (T \cap Z) \cup (S - Z)$ halmaz egyrészt lefogja az összes élt, másrészt minden M-beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. •

A fenti bizonyítás egyúttal hatékony algoritmust is jelent a szóbanforgó optimumok meghatározására. A lépésszám megbecsléséhez figyeljük meg, hogy legfeljebb $n/2$ alkalommal kell utat keresnünk. Miután egyetlen út megkeresése az élszámmal arányos időben történhet, az összlépésszám nem nagyobb, mint $O(nm)$ (ahol n a gráf pontszáma, míg m az élszáma).

A Kőnig tételhez szorosan kapcsolódik Hall tétele.

TÉTEL 3.2 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik S-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-féle feltétel:*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra,} \tag{3.1}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon T-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

A tételt rögtön kicsit általánosabb alakban igazoljuk. Definiáljuk egy $X \subseteq S$ halmaz **hiányát** a $h(X) := (|X| - |\Gamma(X)|)$ értékkel és legyen $\mu = \mu(G, S)$ a maximális hiány, azaz

$$\mu := \max_{X \subseteq S} h(X) \tag{3.2}$$

TÉTEL 3.3 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által nem fedett S-beli pontok minimális száma egyenlő μ-vel.*

Biz. A max $\leq$ min egyenlőtlenség nyilván fennáll. A fordított irány igazolásához legyen M egy maximális (azaz ν elemű) párosítás és L egy minimális (azaz $\tau = \nu$ elemű) lefogás. Legyen $X := S - L$. Ekkor M pontosan $|S| - \nu$ elemét nem fedi S-nek. Másrészt $\Gamma(X) \subseteq L - S$ és így $|X| - |\Gamma(X)| \geq |S - L| - |L - S| = |S| - |L| = |S| - \tau = |S| - \nu$. •

Legyen $\mathcal{F}$ az S maximális (azaz μ) hiányú részhalmazainak rendszere, vagyis $\mathcal{F} := \{X \subseteq S : |X| - |\Gamma(X)| = \mu\}$. Az $\mathcal{F}$ tagjait röviden **max-hiányú** halmazoknak fogjuk hívni. Az előbbi bizonyítás mutatja, hogy egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn a minimális lefogások és a max-hiányú S-beli halmazok között: Ha L minimális lefogás, akkor $S - L$ max-hiányú halmaz, míg ha $H \subseteq S$ max-hiányú halmaz, akkor $\Gamma(H) \cup (S - H)$ minimális lefogás lesz.

Lemma 3.4 *$\mathcal{F}$ zárt a metszet és unió képzésre.*

Biz. Könnyű ellenőrizni, hogy a h függvény szupermoduláris, azaz $h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y)$. Tegyük most fel, hogy X és Y két maximális hiányú halmaz (azaz $\mathcal{F}$ elemei). Ekkor $\mu + \mu = h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y) \leq \mu + \mu$, és emiatt valóban $h(X \cap Y) = \mu, h(X \cup Y) = \mu$. •

A lemmából következik, hogy az összes max-hiányú halmaz metszete is és uniója is max-hiányú, azaz létezik egy egyértelmű legszűkebb és egy legbővebb max-hiányú halmaz. Megjegyzendő, hogy Kőnig fenti alternáló utas algoritmusa segítségével e két halmaz könnyen megkonstruálható. Például, a legszűkebb K max-hiányú halmaz, amint azt könnyű kimutatni, éppen $Z \cap S$ lesz, ahol Z jelölte az irányított segédgráfban az R_S-ből elérhető pontok halmazát. Ez egyúttal azt is mutatja, hogy az algoritmus által produkált $(S - K \cup \Gamma(K))$ lefogás nem függ az algoritmus futásától (szemben az algoritmus által szolgáltatott párosítással). A súlyozott párosítási algoritmus bizonyításához szükségünk lesz még az alábbi hasznos megfigyelésre.

Lemma 3.5 *Legyen $K \subseteq S$ a legszűkebb max-hiányú halmaz G-ben. Ha a gráfból kitöröljük az összes olyan élt, amely $\Gamma(K)$ és $S - K$ között vezet, akkor a létrejövő G' gráfban a maximális hiány ugyanaz, mint G-ben. Továbbá G és G' max-hiányú halmazainak rendszere ugyanaz.*

Biz. Miután G egy M maximális párosításának a $\Gamma(K)$-t fedő élei mind K-ban végződnek, az M benne van G'-ben is, vagyis G' max hiánya legfeljebb akkora, mint G-é, de persze kisebb nem lehet, mert G' részgráfja G-nek. Ebből az is következik, hogy a G egy max-hiányú halmaza G'-ben is max-hiányú. Legyen most X tetszőleges max-hiányú halmaz G'-ben. Mivel K max-hiányú G'-ben is, a 3.4 lemma szerint $K \cap X$ is max-hiányú G'-ben. De akkor $K \cap X$ max-hiányú G-ben, hiszen $K \cap X$ből indulo'élt nem töröltünk, és így a K minimalitása folytán $K \subseteq X$. Ekkor viszont $\Gamma(X) = \Gamma'(X)$, azaz X max-hiányú G-ben is. •

3.1.2 Súlyozott párosítások

TÉTEL 3.6 (Egerváry) *Legyen $G = (V, E)$ teljes páros gráf, melynek pontjai két n elemű osztályba vannak sorolva. Legyen továbbá $c : E \to \mathbf{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokkal történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításainak maximális súlya egyenlő a nemnegatív súlyozott lefogások minimális súlyával, ahol nemnegatív súlyozott lefogáson egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}_+$ függvényt értünk, amelyre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek.*

Egervárynak a 3.6 tételre adott eredeti bizonyításának a váza a következő. Legyen π egy minimális súlyú nemnegatív, egészértékű súlyozott lefogás. (A π súlyán a $\sum[\pi(v) : v \in S \cup T]$ összeg értendő.) Feltehetjük, hogy π az S elemein mindenütt pozitív, mert ha nem, akkor az S-beli pontokon eggyel növelve, a T-beli pontokon eggyel csökkentve már ilyen lesz. Amennyiben azon élek G_π részgráfjában, melyekre $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$ létezik teljes M párosítás, úgy M maximális súlyú párosítás, melynek súlya egyenlő a $\pi(v)$ értékek összegével. Ha viszont G_π-ben nincs teljes párosítás, úgy Kőnig vagy Hall tétele alapján létezik hiányos X halmaz, azaz olyan, amelynek $|X|$-nél kevesebb szomszédja van. A π értékeit az X pontjain eggyel csökkentve, a $\Gamma_{G_\pi}(X)$ pontjain pedig eggyel növelve, egy másik nemnegatív, súlyozott lefogást kapunk, amelynek súlya kisebb, mint π-é, ellentmondásban π minimális választásával.

Ez a bizonyítás könnyen algoritmizálható, hiszen tetszőleges π súlyozott lefogásból kiindulva vagy talál egy maximális súlyú teljes párosítást, és ekkor az aktuális π is optimális, vagypedig talál egy jobb súlyozott lefogást, amivel az eljárást iterálva véges sok lépés után az első eset következik be. Egy kézenfekvő gyorsítási lehetőség azonnal kínálkozik: a π súlyozott lefogás módosításakor ne eggyel növeljünk vagy csökkentsünk, hanem a legnagyobb olyan δ értékkel, amelyre a módosított π' még súlyozott lefogás. Az így nyert eljárást nevezzük Egerváry algoritmusának. (Hangsúlyozzuk, hogy ez nem ugyanaz, mint a H. W. Kuhn által kifejlesztett primál-duál eljárás, amit ma valójában a világban Kuhn javaslata nyomán Magyar Módszernek hívnak.)

Az Egerváry algoritmusnak az az előnye is megvan, hogy nem egészértékű c súlyfüggvényre is működik, bár ekkor még az is kérdés, hogy az eljárás véges-e egyáltalán, és Egerváry valójában a nemegész c esetét nem algoritmikusan, hanem folytonossági megfontolásokkal intézte el.

Nem kevésbé fontos a másik kérdés, hogy Egerváry algoritmusa milyen hatékony, akár egész a c, akár nem. Példával megmutatható, hogy ha tetszőleges olyan X halmazt használunk a π módosítására, amely megsérti a Hall-féle feltételt, akkor az algoritmus nem polinomiális futásidejű (és ez a kellemetlenség még akkor is előfordulhat, ha X maximális hiányú halmaz.) Ráadásul irracionális költségek esetén még azt sem tudjuk, hogy az algoritmus véges sok lépés után megáll-e.

Egerváry azonban bizonyításában azt javasolja, hogy a π változtatását annak a maximális hiányú X halmaznak a segítségével végezzük, amelyet Kőnig alternáló utas algoritmusa szolgáltat, amely tehát a(z egyértelmű) legszűkebb max-hiányú halmaz. Az alábbiakban kimutatjuk, hogy Egerváry algoritmusa ilyenkor polinomiális, sőt erősen polinomiális futásidejű. Mivel nem jelent semmilyen többlet nehézséget, a bizonyítást rögtön a tétel azon csöppnyit általánosabb alakjára mondjuk el, amikor a páros gráf nem feltétlenül teljes, csupán azt írjuk elő, hogy tartalmazzon teljes párosítást.

TÉTEL 3.7 *Tegyük fel, hogy a $G = (S, T; E)$ páros gráfnak van teljes párosítása. Legyen továbbá $c : E \to \mathbf{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokkal történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításainak maximális súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális súlyával, ahol súlyozott lefogáson egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvényt értünk, amelyre $\pi(u)+\pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek. Amennyiben G teljes páros gráf, az optimális π választható nemnegatívnak.*

Biz. Tetszőleges M teljes párosításra és π súlyozott lefogásra fennáll, hogy $\sum(\pi(z) : z \in S \cup T) = \sum([\pi(u) + \pi(v)] : uv \in M) \geq \sum(c(uv) : uv \in M)$, vagyis a minimum valóban lagalább a maximum. Az is kiolvasható, hogy itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha az M párosítás minden uv éle **pontos** abban az értelemben, hogy $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$. Célunk tehát azt kimutatni, hogy létezik egy olyan π, amelyre nézve a pontos élek gráfjában létezik teljes párosítás.

Legyen π egy olyan súlyozott lefogás (egészértékű, ha c az), amelyre a pontos élek $G_\pi = (S, T; E_\pi)$ részgráfjában a $\mu_\pi (= |S| - \nu(G_\pi))$ érték minimális, és ezen belül, az (egyértelmű) legszűkebb max-hiányú $K \subseteq S$ halmaz a lehető legnagyobb. Készen vagyunk, ha a μ_π maximális hiány nulla, mert ez épp azt jelenti, hogy G_π-nek van teljes párosítása. Tegyük fel tehát, hogy $\mu_\pi > 0$. Mivel G-nek van teljes párosítása, biztosan van olyan e éle G-nek, amely K és $T - \Gamma_\pi(K)$ között vezet, ahol $\Gamma_\pi(K)$ jelöli a K szomszédainak halmazát a G_π-ben. Ilyen él nem pontos, így a

$$\delta := \min(\pi(u) + \pi(v) - c(uv) : uv \in E, u \in K, v \in T - \Gamma_\pi(K)) \tag{3.3}$$

érték pozitív. Módosítsuk π-t úgy, hogy a K-minden elemén δ-val csökkentjük, míg $\Gamma_\pi(K)$ minden elemén δ-val növeljük, azaz

$$v \in K \text{ -ra } \pi'(v) := \pi(v) - \delta, v \in \Gamma_\pi(K) \text{ -ra } \pi'(v) := \pi(v) + \delta, \text{ egyébként } \pi'(v) := \pi(v). \tag{3.4}$$

A δ választása miatt az így módosított π' továbbra is súlyozott lefogás, amely egészértékű, ha c az volt. A π'-ra vonatkozó pontos élek $G_{\pi'}$ gráfja abban különbözik G_π-től, hogy van legalább egy éle (ahol a δ-t definiáló minimum felvétetett) K és $T - \Gamma_\pi(K)$ között, de biztosan nincsen éle $T \cap \Gamma_\pi(K)$ és $S - K$ között (miközben G_π-nek lehetett). A 3.5 lemma szerint $\mu_{\pi'} = \mu_\pi$, és $G_{\pi'}$-ben a legszűkebb max-hiányú halmaz szigorúan bővebb, mint K, és ez ellentmond π választásának.

Beláttuk tehát, hogy van olyan π súlyozott lefogás, amelyre a pontos élek részgráfjában van teljes párosítás. Végül tegyük fel, hogy G teljes páros gráf, és igazoljuk, hogy π választható nemnegatívnak. Legyen a π legnegatívabb értéke $-\alpha$ ahol $\alpha > 0$ és legyen $\pi(v) = -\alpha$, ahol v mondjuk S-ben van. ekkor minden $u \in T$ csúcsra $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv) \geq 0$ miatt $\pi(u) \geq \alpha$. Így ha π-t úgy módosítjuk, hogy S elemein növeljük α-val, míg T elemein csökkentjük α-val, akkor egy másik minimális súlyozott lefogás keletkezik, amelyik már nemnegatív. •

Az is belátható, hogy az optimális súlyozott lefogás pontosan akkor választható nemnegatívnak, ha a maximális súlyú párosítás teljes párosításon vétetik fel (amely feltétel persze teljes páros gráf esetén fennáll.)

A bizonyítás alapján Egerváry algoritmusa a következő. Az algoritmus bemenete egy teljes párosítással rendelkező páros gráf, míg a kimenete egy maximális súlyú párosítás és egy minimális súlyú súlyozott lefogás. Szubrutinként szükségünk van a súlyozatlan esetre vonatkozó fentebb ismertetett alternáló utas algoritmusra, amely egy tetszőleges $G' = (S, T; E')$ páros gráfban megkonstruál egy maximális M' párosítást és a(z egyértelmű) legszűkebb $K' \subseteq S$ max-hiányú halmazt (melyekre tehát $|M'| = |\Gamma'(K')| + |S - K'|$.) Hivatkozás kedvéért ezt Kőnig szubrutinnak nevezzük.

Az algoritmus egy általános lépésében rendelkezésre áll egy π súlyozott lefogás (amely egészértékű, ha c az, és amely kezdetben lehet például az azonosan α lefogás, ahol α a $c(e)$ költségek maximuma. Alkalmazzuk a Kőnig szubrutint a π-re nézve pontos élek G_π részgráfjára. Amennyiben G_π-ben van M teljes párosítás, úgy az algoritmus az aktuális π súlyozott lefogás és M teljes párosítás kiadásával véget ér. Ha viszont G_π-nek nincs teljes párosítása, úgy a szubrutin által szolgáltatott (G_π-re nézve) legszűkebb K_π max-hiányú halmaz segítségével 3.4 szerint módosítjuk π-t, és az eljárást iteráljuk.

Mi mondható az algoritmus lépésszámáról? Tekintsük egy fázisnak az algoritmus azon szakaszát, amíg a pontos élek (egyre változó) részgráfjában a maximális hiány változatlan. Nyilván legfeljebb $|S|$ fázis létezik. Egy fázis során a szubrutint legfeljebb $|S|$-szer hívjuk meg, hiszen beláttuk, hogy a π cseréjekor a legszűkebb max-hiányú halmaz szigorúan bővül. Vagyis a súlyozatlan esetre vonatkozó alternáló utas algoritmusnak legfeljebb $|S|^2$-szeri meghívásával az algoritmus futása befejeződik. Miután Kőnig algoritmusának lépésszámára $O(|S||E|)$ korlát volt mondható, a leírt súlyozott eljárás teljes futásideje $O(|S|^3|E|)$.

Bár ez a lépészám nem különösebben látványos (és valójában hatékonyabb eljárások is léteznek), mindenesetre azt megkaptuk, hogy az algoritmus polinomiális futásidejű, sőt erősen polinomiális is abban az értelemben, hogy a futásidő egyáltalán nem függ a szereplő c költségfüggvénytől, amennyiben feltesszük, hogy a számokkal végzett összeadást, kivonást és összehasonlítást egyetlen lépésben tudjuk elvégezni.

A jelen megközelítés előnye, hogy tisztán mutatja a súlyozatlan és a súlyozott párosítási algoritmusok viszonyát. A súlyozatlan Kőnig-féle algoritmus teljesen szeparáltan, szubrutinként kerül felhasználásra. Amint azt H. W. Kuhn megmutatta, a két eljárás összevonható, aminek talán hátránya, hogy az algoritmus összetettebbé válik, de előnye, hogy jobb lépésszám becslés adódik. Most ismertetjük a Kuhn által javasolt Magyar Módszert.

Kuhn algoritmusa súlyozott teljes párosítás meghatározására

Az általános lépésben tekintjük a pontos élek által (az $S \cup T$ ponthalmazon) alkotott G_π részgráfot. Legyen M egy már rendelkezésre álló párosítás G_π-ben. Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi G_π-beli élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S-ben illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg). Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkaptunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. Ekkor az eljárás egy fázisa véget ér, és az új M' párosítással folytatva iteráljuk az eljárást.

Nézzük most azt az esetet, amikor R_T diszjunkt Z-től. Legyen $K_\pi := Z \cap S$ és módosítsuk π-t a 3.4-ben leírtak szerint. Ekkor az R_S-ből elérhető pontok halmaza szigorúan bővül. Így egy fázis (ami alatt tehát a pontos élek gráfjában a maximális párosítás elemszáma nem nő) $|S|$ útkereső eljárás alkalmazása után véget ér. Mivel egy útkeresés $O(|E|)$ lépésben végrehajtható és legfeljebb $|S|$ fázis van, az algoritmus teljes futásideje $O(|E||S|^2)$.

A fejezet lezárásaképp megmutatjuk, hogy a maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosítás meghatározásának problémája egyszerű fogással visszavezethető a maximális súlyú teljes párosítására.

TÉTEL 3.8 *Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális ν'_c súlya egyenlő a nemnegatív (!) súlyozott lefogások minimális τ'_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π' is választható egészértékűnek.*

Biz. A $\nu'_c \leq \tau'_c$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, így csak a fordított iránnyal foglalkozunk. Új pontok esetleges hozzávételével elérhetjük, hogy a páros gráf két osztálya egyforma méretű legyen. Egészítsük ki a gráfot 0 súlyú élek bevételével egy G teljes páros gráffá. A súlyfügvény ezen kiterjesztését továbbra is jelölhetjük c-vel. A 3.7 tétel (második része) szerint G-nek létezik egy M teljes párosítása és c-nek egy π nemnegatív súlyozott lefogása, melyekre $c(M) = \sum \pi(v)$. Mivel az új élek súlya 0, így az új élek kihagyásával M-ből keletkező G'-beli M' párosítás súlya változatlanul $c(M)$. Miután új pontból (ha van) csak 0 súlyú él megy ki, így π értéke az új pontokon 0, vagyis, ha π-t megszorítjuk az eredeti pontokra, akkor a kelektező π'-re $\sum \pi'(v) = \sum \pi(v)$, és így $\sum \pi'(v) = c(M')$. •

Végül megjegyezzük, hogy tetszőleges rögzített k pozitív egészre Ford és Fulkerson minimális költségű folyam algoritmusának segítségével ki lehet számolni a maximális (vagy minimális) súlyú k élű párosítást, ha ilyen párosítás egyáltalán létezik.

file: umagyar,

3.2 Minimális költségű fenyők

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, amelynek egy adott s pontjából minden más pontja elérhető irányított úton, ami azzal ekvivalens, hogy D tartalmaz feszítő s-fenyőt. Adott az éleken egy nemnegatív $c : A \to \mathbf{R}_+$ költség- (vagy másnéven súly-) függvény. Keressünk minimális összköltségű feszítő s-fenyőt.

Egy $z : 2^{V-s} \to \mathbf{R}_+$ halmazfüggvényt **c-megengedettnek** nevezünk, ha

$$c(e) \geq \sum(z(X) : e \text{ belép } X\text{-be}) \quad \text{minden } e \in E \text{ élre.} \tag{3.5}$$

TÉTEL 3.9 *[Fulkerson, 1974] Az s-fenyők minimális költsége egyenlő $max\{\sum[z(X) : X \subseteq V - s] : z$ c-megengedett$\}$. Továbbá, ha c egészértékű, akkor az optimális z választható egészértékűnek.*

Biz. Legyen F feszítő s-fenyő és z egy c-megengedett vektor. Ekkor

$$c(F) = \sum(c(a) : e \in F) \geq \sum(\sum(z(X) : e \text{ belép } X - \text{ be}) : e \in F) \geq \sum(z(X) : X \subseteq V - s) \tag{3.6}$$

amiből max $\leq$ min következik. (3.6)-ben akkor van végig egyenlőség, ha a következő optimalitási feltételek teljesülnek.

$$c(e) = \sum(z(X) : e \text{ belép } X\text{-be}) \text{ minden } e \in F \text{ élre,} \tag{3.7}$$

$$z(X) > 0 \text{ esetén } \varrho_F(X) = 1. \tag{3.8}$$

Az alábbi algoritmus egy olyan F feszítő s-fenyőt és megengedett z-t konstruál, amelyre (3.7) és (3.8) teljesül. Két fázisból áll. Az elsőben z-t konstruáljuk meg, míg a másodikban F-t. Mindkét rész egyfajta értelemben mohó lesz. Az első fázis minden lépésében módoítjuk a költségfüggvényt, és az aktuális költségfüggvényt c'-vel fogjuk jelölni. Egy e élt a c' aktuális költségfüggvényre nézve **0-élnek** nevezzük, ha $c'(e) = 0$.

1. fázis *Amíg van $V - s$-nek olyan nemüres részhalmaza, amelybe nem lép be 0-él, ismételjük a következő lépést. Válasszunk egy olyan minimális nemüres $X \subseteq V - s$ részhalmazt, amelybe nem lép 0-él. Legyen $z(X) := \min(c'(e) : e$ belép X-be) és csökkentsük $c'(e)$-t a $z(X)$ értékkel az összes X-be lépő e élen.*

A módosított c' továbbra is nemnegatív, és mindazokon az X-be belépő éleken 0-vá vált, amelyeken az előbbi minimum eléretik. Az 1. fázis tehát akkor fejeződik be, amikor már minden $X \subseteq V - s$ részhalmazba lép be 0-él, vagyis amikor már létezik 0-élekből álló feszítő s-fenyő.

2. fázis *Az s pontból kiindulva, 0-élek egymás utáni hozzávételével felépítünk egy F s-fenyőt. Ha az építési eljárás egy lépésében több, mint egy olyan 0-él van, amely a már megkonstruált részfenyő ponthalmazából kilép, akkor azt az élt adjuk a részfenyőhöz, amely az 1 fázis során a leghamarabb vált 0-éllé.*

Az előállítás szabályai miatt világos, hogy a megkonstruált z vektor c-megengedett, továbbá, hogy (3.7) fennáll.

Lemma 3.10 *z és F kielégítik (3.8)-t.*

Biz. Legyen X olyan halmaz, amelyre $z(X) > 0$ és tegyük fel indirekt, hogy $\varrho_F(X) > 1$. Ekkor a 2. fázisnak van egy olyan pillanata, amikor az aktuális F' részfenyő olyan, hogy $\varrho_{F'}(X) = 1$ és az F'-höz éppen hozzáadásra kerülő e él belép X-be.

Tekintsük most az 1. fázisnak azt a pillanatát, amikor $z(X)$ pozitív lett. Ekkor az X-be még nem lépett 0-él, ugyanakkor az X-nek már minden valódi nemüres részhalmazába lépett. Speciálisan, az $X - V(F')$ halmazba is lépett egy f 0-él, és mivel ez X-be nem léphetett, így f töve $X \cap V(F')$-ben van. Az f tehát már $z(X)$ pozitívvá válásának pillanatában 0-él volt, amikor még e nem volt az. Miután az f éllel is lehetne növelni az F' részfenyőt, ellentmondásra jutottunk a 2. fázis választási szabályával, amely szerint a legkorábban 0-éllé vált éllel kell növelni az aktuális részfenyőt. •

A lemmából következik, hogy az algoritmus által megtalált F feszítő s-fenyő és z megengedett duális megoldás kielégítik az optimalitási feltételeket, amiből az algoritmus helyessége, valamint Fulkerson tétel is következik. • •

Az előbbihez kapcsolódik a következő probléma. Legyen $D = (V, E)$ ismét egy irányított gráf éleinek halmazán egy w súlyfüggvénnyel. Keressünk maximális súlyú fenyvest!

Egy (p, y) párt **fedésnek** nevezünk, ha $p : V \to R_+$ és $y : 2^V \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív függvények melyekre $w(u, v) \leq p(v) + \sum(y(B) : u, v \in B \subseteq V)$ teljesül minden $uv \in E$ élre. A fedés **értéke** $\sum(p(v) : v \in V) + \sum(y(B)(|B| - 1) : B \subseteq V)$.

TÉTEL 3.11 *[Edmonds, 1967], [Chu and Liu, 1965] Egy fenyves súlyának maximuma a fedések minimális értékével egyenlő. Ha w egészértékű, akkor az optimális fedés is választható annak.*

Biz. Könnyen látszik, hogy $max \leq min$. A fordított irány belátásához egészítsük ki D-t egy új s ponttal és vezessünk s-ből minden $v \in V$ pontba egy új sv élt. A megnövelt D' digráfon definiáljunk egy c költségfüggvényt a következőképpen. Az új élek költsége legyen $M := max(w(e) : e \in E)$, míg minden eredeti $e \in E$ élre legyen $c(e) = M - w(e)$.

Az 3.9 tétel szerint létezik $z : 2^V \to \mathbf{R}_+$ c-megengedett vektor és egy D'-nek egy F feszítő s-fenyője amelyek kielégítik (3.7)-t és (3.8)-t. Legyen $p(v) := M - \sum(z(B) : v \in B)$, és $|B| > 1$ esetén legyen $y(B) := z(B)$ $(B \subseteq V)$. Könnyen látható, hogy az így kapott (p, y) fedést alkot, továbbá, hogy az értéke egyenlő a D digráf $F \cap A$ fenyvesének súlyával. •

Feladat 3.1 *Legyen $T \subseteq V - s$ adott halmaz olyan, hogy a digráf minden pozitív költségű élének a feje T-ben van (a költségfüggvény nemnegatív). Olyan minimális költségű s gyökerű fenyő keresése, amely T minden pontját tartalmazza (de nem feltétlenül feszítő) speciális esete a T-metsző halmazrendszerek korábban tárgyalt lefogási problémájának. Mutassuk meg, hogy a feladat visszavezethető a minimális költségű fesztő fenyő problémájára.*

Feladat 3.2 *Igazoljuk hogy egy $D = (V, E)$ digráfban éleknek egy adott $F \subseteq E$ részhalmaza akkor és csak akkor egészíthető ki s gyökerű feszítő fenyővé, ha nem lehet úgy megadni a $V - s$ halmaznak $|V| - |F|$ darab nemüres részhalmazát, hogy ezek egyikébe sem lép F-beli él és $E - F$ minden eleme legfeljebb egybe lép.*

(Útmutatás. Alkalmazzuk az 3.9 tételt alkalmas költségfüggvényre.)

Feladat 3.3 *Tegyük fel, hogy adott $V - s$ részhalmazainak egy $\{A_1, \ldots, A_t\}$ rendszere. Hogyan lehetne algoritmikusan eldönteni, hogy a digráf tartalmaz-e olyan feszítő fenyőt, amely mindegyik A_i halmazba pontosan egyszer lép bele?*

(Útmutatás. Keressünk minimális költségű fenyőt okosan választott költségfüggvényre.)

Feladat 3.4 *Tegyük most fel, hogy létezik olyan s-gyökerű feszítő fenyő, amely az $\{A_1, \ldots, A_t\}$ halmazok mindegyikébe egyetlen éllel lép bele. Készítsünk algoritmust, amely az ilyen fenyők közül egy megadott költségfüggvényre vonatkozó minimális költségűt talál.*

3.3 Maximális párosítások általános gráfokban

Valamely G irányítatlan gráfra jelölje $\nu = \nu(G)$ a független élek maximális számát vagyis a legnagyobb párosítás elemszámát. Láttuk, hogy az alternáló utak módszerével miként lehet páros gráfban maximális elemszámú párosítást megkonstruálni. Az eljárás egyúttal bizonyította a Kőnig tételt is, amely szerint a szóbanforgó maximum egyenlő a pontokat lefogó élek minimális τ számával. Nem páros gráfokban a $\nu = \tau$ min-max reláció már nem feltétlenül igaz, amint ezt a háromszög példája mutatja. Itt $\nu = 1, \tau = 2$. Az általános gráfokra vonatkozó jellemzés W.T. Tutte-tól származik.

TÉTEL 3.12 (Tutte) *A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha a pontok tetszőleges X részhalmazára az X elhagyásával keletkező páratlan (pontszámú) komponensek száma legfeljebb $|X|$.*

Az X elhagyásával keletkező páratlan komponensek számát jelölje $q(X)$. Tetszőleges M teljes párosítás egy páratlan pontszámú halmazból páratlan sok éllel lép ki, így speciálisan legalább eggyel. Ebből látszik, hogy ha létezik teljes párosítás, akkor $q(X)$ legfeljebb $|X|$, azaz a Tutte-féle feltétel szükséges.

Az elegendőséget kicsit általánosabb alakban igazoljuk. Amennyiben teljes párosítás nem létezik, megkérdezhetjük, hogy milyen nagy létezik, azaz mekkora ν. Jelöljük a $q(X) - |X|$ különbséget $\gamma(X)$-szel. (A Tutte féle feltétel azt jelenti, hogy $\gamma(X) \leq 0$.) Tegyük most fel, hogy valamely X ponthalmazra $\gamma(X) > 0$. Ekkor tetszőleges M párosítás legalább $\gamma(X)$ pontot nem fed le, vagy másszóval M legfeljebb $|V| - \gamma(X)$ pontot fedhet le, azaz

$$|M| \leq (|V| - \gamma(X))/2. \tag{3.9}$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha

(a) *Az X elhagyásával keletkező bármely C komponensre az M-nek a C-be eső része legfeljebb egy pont híján fedi C-t.* (b) *X nem feszít M-beli élt.*

(c) *M fedi X minden pontját.*

Egy ilyen X halmazt **gátnak** nevezünk. A Tutte tétel általánosítása mármost a következő.

TÉTEL 3.13 (Berge-Tutte formula) *G-ben a független élek maximális ν száma egyenlő* $\max(|V| - \gamma(X))/2$*-vel, ahol a maximum V összes X részhalmazára megy.*

A fenti meggondolás alapján a max $\leq$ min egyenlőtlenség következik. A fordított egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

Létezik olyan M párosítás és pontoknak olyan X részhalmaza, melyekre (a), (b) és (c) fennáll.

Az alábbi J. Edmondstól származó algoritmus ilyen M-et és X-et konstruál meg. Az eljárás fázisokból áll. Egy fázisban valamely korábban megtalált M párosításból indulunk ki és keresünk egy olyan P M-alternáló utat, amely két szabad (azaz, M által nem fedett) pontot köt össze. Nevezzük az ilyen utat **növelő útnak.**

Amennyiben találunk egy P növelő utat, úgy az $M' := M \otimes P$ szimmetrikus differencia olyan párosítás lesz, amelynek eggyel több éle van, mint M-nek, és ekkor a következő fázisra térünk. Amikor az algoritmus már nem talál M-alternáló utat, akkor megad majd egy X részhalmazt, amely az aktuális M párosítással együtt kielégíti a három optimalitási feltételt.

Legyen tehát M valamilyen párosítás, S a szabad pontok halmaza és $v \in V - S$-re jelöljük $\mu(v)$-vel a v párosításbeli szomszédját. Az S pontjaira pedig definiáljuk $\mu(v) = v$. Az eljárás egy F **M-alternáló** erdőt épít fel, amely a következő tulajdonságú erdő.

(i) F-nek $|S|$ darab komponense van, mindegyike egyetlen szabad pontot tartalmaz, amely a komponens gyökere.

(ii) F bármely pontjából a gyökérhez vezető út M-alternáló.

(iii) Ha valamely fedett v pont F-ben van, akkor a $v\mu(v)$ él is F-hez tartozik.

Az F erdőben nem lévő pontok halmazát **tisztásnak** hívjuk és $C := C(F)$-fel jelöljük. Nyilván az M-nek C-ben levő élei C-t párosítják. **Külső** pontnak hívjuk az F azon pontjait, melyek a gyökértől páros távolságban vannak. F többi pontja **belső** pont. (Az elnevezés arra utal, hogy a végül kapott külső pontok, amint majd az Edmonds-Gallai tétel nyomán kiderül, olyanok, hogy mindegyikhez van egy őt nem lefedő maximális párosítás, míg a belső pontok mindegyikét valamennyi maximális párosítás fedi.)

Kiinduláskor F a szabad pontokból áll és élt nem tartalmaz. Az általános lépés leírásához legyen F M-alternáló erdő. Három esetet különböztetünk meg.

1. eset. Az F-nek létezik olyan u és v külső pontja, melyek az F különböző komponenséhez tartoznak és amelyek között vezet él a gráfban. Ekkor az u és v komponensében a gyökerekhez vezető két alternáló utat az uv él mentén összekapcsolva egy P növelő utat kapunk, és ekkor az adott fázis végetér.

2. eset. F-nek létezik olyan u külső pontja, amely szomszédos egy v tisztáson lévő v ponttal. Ekkor az uv élt és a $v\mu(v)$ párosító élt F-hez véve nagyobb M-alternáló erdőt kapunk.

3. eset. F-nek egy komponensében létezik u és v külső pont, melyek szomszédosak. Ekkor az F-ben az u-t és v-t összekötő egyértelmű út az uv éllel együtt egy páratlan kört alkot. Húzzuk össze ezt a kört egy ponttá. Ekkor F-ből egy másik alternáló erdő keletkezik, melynek az összehúzott pont külső pontja.

Nevezzünk valamely K páratlan kört **M-alternálónak,** ha valamely r pontjából a körön akármelyik irányba elindulva minden második él M-beli. Az r pontot a kör **bázisának** hívjuk. Az M-alternáló kör legfontosabb tulajdonsága, hogy

($*$) K bármely pontjából vezet a bázisba párosítás éllel kezdődő alternáló út.

A fenti 3. esetben egy M-alternáló páratlan kört húztunk össze. A ($*$) tulajdonságból látjuk, hogy ha az összehúzott gráfban létezik növelő út, akkor ebből előállíthatjuk az eredeti gráf egy növelő útját. Ebből az is következik, hogy ha az 1. eset olyankor fordul elő, amikor már bizonyos összehúzásokat végrehajtottunk, akkor az eredeti gráfnak is elő tudunk állítani egy növelő útját. Azt is megfigyelhetjük, hogy (esetleg többszöri) összehúzással keletkezett pont ősképe olyan halmaz, amelyet a beleeső M-beli élek egy pont híján kipárosítanak.

TEHÁT: Ameddig a 2. vagy 3. eset fordul elő, járjunk el az ott leírtak szerint. Amennyiben az 1. eset következik be, azaz az összehúzott gráfban van növelő út, akkor keressünk az eredeti gráfban növelő utat és egy nagyobb párosítást, majd térjünk a következő fázisra.

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, amikor a fenti három eset egyike sem áll fenn. Jelölje X a belső pontok halmazát, C a tisztást és D a külső pontok ősképeinek halmazát. Emlékezzünk rá, hogy belső pont sohasem összehúzott pont. Külső pontból csak belső pontba vezet él, ezért G-ben az X elhagyásakor a külső pontok ősképei páratlan komponensek lesznek. Így M és X kielégítik az optimalitási feltételeket. Evvel az algoritmus leírását és egyúttal a Berge-Tutte formula igazolását befejeztük. •

Feladat 3.5 *Vezessük le Tutte tételéből: (a) Petersen tételét (amely szerint 2-élösszefüggő 3-reguláris gráfban létezik teljes párosítás), (b) a Berge-Tutte formulát, (c) Hall tételét.*

3.3.1 Kritikus gráfok

A párosítások elméletében a következő fogalom alapvető fontosságú. Egy gráfot **faktor-kritikusnak** vagy röviden **kritikusnak** nevezünk, ha bármely pontját elhagyva létezik teljes párosítása.

(A matroidelmélet előadásban bebizonyítottuk Gallai Lemmáját, amely szerint, ha G olyan összefüggő gráf, amelynek bármely pontját elhagyva $\nu(G)$ csökken, akkor G faktor-kritikus. A bizonyítás azon múlt, hogy a feltevés szerint G párosítás matroidjának M^* duálisában nincsen hurok és bármely két szomszédos pont kételemű matroidbeli kört alkot. Ebből a G összefüggőségét felhasználva következik, hogy a V alaphalmaz M^*-beli rangja egy ,ami viszont azt jelenti, hogy G faktor-kritikus.)

Egy $Q \subseteq V$ páratlan pontszámú részhalmaz által feszített gráfot valamely M párosításra nézve **M-kritikusnak** mondunk, ha az M Q-ba eső élei egyetlen r pont, az ún **bázispont** kivételével lefedik Q-t és Q minden pontjából vezet r-be páros élszámú alternáló út (azaz olyan, amelynek első éle párosítás él.)

TÉTEL 3.14 *Legyen adott a G gráf egy M párosítása, amely az r pontot nem fedi le, a többit lefedi. A következők ekvivalensek:*

(a) G M-kritikus,
(b) G felépíthető a bázispontjából kiindulva M-alternáló utak illetve körök egymás utáni hozzávételével,
(c) G felépíthető bármely pontjából kiindulva páratlan élszámú utak és körök hozzávételével,
(d) G faktor-kritikus.

Biz. $(a \to b)$ Tegyük fel, hogy r-ből kiindulva már felépítettünk G-nek egy részgráfját a megadott módon. Jelölje a részgráf ponthalmazát T. (A kezdetben T az egyetlen r pontból áll.) Akkor vagyunk készen, ha $T = V$, ekkor ugyanis a még G-ből esetleg hiányzó éleket egyélű M-alternáló utakként bevéve, megkapjuk G-t. Ha még $T \neq V$, akkor létezik olyan uv él, amelyre $u \in T, v \notin T$. (Miután a definícióból adódóan M-kritikus gráf összefüggő, ilyen él létezik.) A gráf M-kritikus, így v-ből létezik r-be vezető páros M-alternáló út. Legyen ennek p az első T-be eső pontja és jelölje P' az útnak v-ből p-be vezető szegmensét. Most az uv él a P'-vel együtt egy M-alternáló utat vagy kört alkot, amellyel T tovább építhető.

$(b \to c)$ Triviális, mert egy M-alternáló út páratlan élszámú.

$(c \to d)$ Fülek száma szerinti indukció. Két esetet kell különválasztani, annak megfelelően, hogy a kihagyandó pont az utolsó fülön van vagy sem.

$(d \to a)$ Legyen v a gráf tetszőleges pontja. Mivel G faktor-kritikus, $G - v$-nek létezik egy M_v teljes párosítása. Két párosítás szimmetrikus differenciája mindig diszjunkt alternáló körökből és utakból áll. Mivel mind M mind M_v a G-nek egyetlen pontját nem fedi le, így szimmetrikus differenciájuk egyetlen alternáló utat tartalmaz, és az a v és r pontokat köti össze. Így tehát létezik v-ből r-be páros élszámú M-alternáló út. •

Az alábbiakban megadunk egy kicsit bonyolultabb konstrukciót, amely M-kritikus gráfot eredményez. A tétel szemléletesen azt mondja, hogy ha egy páratlan kör pontjaiba M-kritikus gráfokat "fújunk be", akkor M-kritikus gráfot kapunk.

TÉTEL 3.15 *Tegyük fel, hogy a G gráfban az M párosítás egy r pont kivételével mindent lefed, továbbá, hogy a ponthalmaz fel van osztva páratlan sok diszjunkt M-kritikus részgráfra, melyek mindegyikét egyetlen pontra húzva M-kritikus (azaz M-alternáló) C páratlan kört kapunk. Ekkor G maga is M-kritikus.*

Biz. Vegyünk a gráfnak egy tetszőleges $v_1 = v$ pontját és mutassuk meg, hogy létezik v-ből r-be páros élszámú M-alternáló út. Amennyiben v és r ugyanabban a P_r partíció részben van, akkor P_r M-kritikussága miatt a kívánt út létezik.

Tegyük most fel, hogy a P_v és P_r partíció részek különbözők. Jelölje $P_1 := P_v, P_2, \ldots, P_t := P_r$ azokat a partíció részeket, amelyeket a C körben a P_v-ből a P_r-be menve kapunk, ha a P_1-ből kilépő r_1r_2 párosítás él felé indulunk el. (Tehát t páratlan!)

Először P_1-ben a v-ből indulva elmegyünk egy páros élszámú M-alternáló úton a P_1 gyökeréig, az ebbe jövő M-élen átmegyünk P_2-be. Legyen a P_2-ből kilépő nem-párosítás él u_2v_2 ahol $u_2 \in P_2, v_2 \in P_3$. Használjuk fordítva az u_2-ből r_2-be vezető páros élszámú M-alternáló utat, így már eljutottunk u_2-be. Most tovább lépünk az u_2v_2 élen a P_3-részbe, ahonnan a v_2 ponttal kezdve iteráljuk az eljárást. •

Amint láttuk, Edmonds algoritmusa megkonstruál egy gátat és egy párosítást, melyekre fennállnak az optimalitási kritériumok. A kapott gát és párosítás elvileg függhet az algoritmus futásától és a párosítás vonatkozásában ténylegesen ez is a helyzet; egy háromszög esetén például akármelyik maximális (:egy-élű) párosítást megadhatja. Annál meglepőbb, hogy az algoritmus által megtalált gát kizárólag a gráftól függ és független azoktól a választásoktól, amelyeket az algoritmus futása során tettünk. (Tehát például, ha az aktuális alternáló erdőt többféleképpen lehetett növelni, akkor a végül kapott gát nem függ attól, hogy melyik növelést választottuk.) Az algoritmus által talált gát éppen a Gallai-Edmonds tételben definiált kanonikus gáttal egyezik meg.

TÉTEL 3.16 (Gallai és Edmonds) *Jelölje $D(G)$ azon pontok halmazát, amelyeket G-nek valamely maximális párosítása nem fed le. Álljon $A(G)$ a $V - D(G)$ azon pontjaiból, melyeknek van $D(G)$-beli szomszédja, és legyen $C(G)$ a maradék pontok halmaza. Ekkor $A(G)$ gátja G-nek, éspedig éppen az, amelyet az algoritmus megtalál, $D(G)$ a $V - A(G)$ páratlan komponenseinek egyesítése, $C(G)$ pedig a $V - A(G)$ páros komponenseinek egyesítése. $D(G)$ komponensei faktor-kritikus gráfok. Végül, ha eltöröljük a páros komponenseket és az A-ban lévő éleket, és a páratlan komponensek mindegyikét összehúzzuk egy-egy pontra, akkor olyan páros gráfot kapunk, amelyben az A minden X nemüres részhalmazának legalább $|X| + 1$ szomszédja van.*

Biz. Tetszőleges A' gáthoz jelölje D' a $G - A'$ páratlan komponenseinek únióját, C' pedig a párosakét. Tetszőleges maximális M' párosítás esetén az M' lefedi a X'-t és C'-t. Ezért $D(G)$ biztosan része D'-nek.

Legyen most A' az algoritmus által talált gát. Csak azt kell kimutatnunk, hogy a külső pontok ősképének (ami D') minden v elemét fedetlenül hagyja valamely maximális elemszámú párosítás. Az 3.15 tétel szerint tudjuk, hogy egy külső pont őképe M-kritikus, ezért létezik v-ből az alternáló fa gyökerébe egy P páros élszámú M-alternáló út. Ekkor P és M szimmetrikus differenciája egy maximális párosítás, amely elkerüli v-t.

A tétel utolsó részéhez azt figyeljük meg, hogy az algoritmus által talált alternáló erdőben a belső pontok akármely X részhalmazának legalább $|X + 1|$ külső pont szomszédja van. Ez pedig azért van így, mert a belső pontok másodfokúak, és ha mindegyik z belső pontra a belőle kiinduló uz, vz élt az uv éllel helyettesítjük, akkor egy erdőt kapunk, amelyre az állítás azt jelenti, hogy egy erdő tetszőleges X élhalmaza legalább $|X|$ ponttal érintkezik. Ez pedig közismert és egyszerű. •

Feladat 3.6 *Tekintsünk egy olyan gátat, amelyre az elhagyásával keletkező páratlan komponensek úniója minimális. Igazoljuk, hogy ez éppen a Gallai-Edmonds tételében lévő gát.*

3.4 Minimális súlyú teljes párosítás keresése

Legyen adva a $G = (V, E)$ gráf élein c nemnegatív költség-függvény, és tegyük fel G-nek létezik teljes párosítása. Az alábbiakban páratlan vágáson olyan vágást értünk, melynek két partja páratlan sok pontot tartalmaz.

A duális probléma: rendeljünk páratlan vágásokhoz változókat, melyek nemtriviális vágáson nemnegatívak és minden e élre az élt tartalmazó páratlan vágások változóinak összege legfeljebb $c(e)$, az él költsége. Az így hozzárendelt változókat **megengedettnek** hívjuk. (Egy páratlan vágás **triviális,** ha egyik oldala egypontú.)

Azaz,

$$\sum (y_B : e \in B) \leq c(e) \text{ minden } e \text{ élre,} \tag{$*$}$$

ahol az összegzés a B páratlan vágásokra megy.

Az élhalmazon egy súlyozást **páros körösszegűnek** nevezünk, ha egészértékű és minden kör súlya páros szám. Ha y egészértékű, akkor a $(*)$ baloldalán szereplő érték az élhalmazon páros körösszegű súlyozást definiál.

Legyen $c_y(e) := c(e) - \sum(y_B : e \in B)$. y megengedettsége azt jelenti, hogy c_y nemnegatív. Egy e élt, amelyre $c_y(e) = 0$ **telítettnek** vagy **pontosnak** fogunk hívni.

TÉTEL 3.17 *Teljes párosítás minimális költsége egyenlő* $\max\{\sum[y_B : y \text{ megengedett duális megoldás}]\}$. *Amennyiben c páros körösszegű, úgy az optimális y választható egészértékűnek.*

Biz. Egyszerű becslés mutatja, hogy tetszőleges teljes párosítás költsége legalább akkora, mint a duális változók összege. Az egyenlőség kimutatásához megkonstruálunk egy M teljes párosítást és egy y megengedett duális megoldást, melyekre egyenlőség áll. Ez pedig pontosan akkor áll fenn, ha teljesül a következő két optimalitási kritérium.

1. M minden éle telített.
2. Minden B páratlan vágásra, amelyre $y_B > 0$, fennáll, hogy $|B \cap M| = 1$.

Az azonosan 0 duális megoldásból indulunk ki, ami nyilván megengedett. Az általános lépésben adott a következő alakú megoldás. Legyen $\mathcal{F}$ a csúcsok részhalmazainak olyan lamináris rendszer, melynek minden tagja páratlan elemszámú, és bármely tagjára az abban lévő maximális tagokat összehúzva a telített élek faktor-kritikus gráfot alkotnak. Egy B nemtriviális páratlan vágásra y_B akkor és csak akkor pozitív, ha B-t az $\mathcal{F}$ nem egyelemű tagja definiálja.

Jelölje G_0' az $\mathcal{F}$ maximális tagjai összehúzásával keletkező és csak telített éleket tartalmazó gráfot. Legyen adva G_0'-nek egy M' párosítása.

1. eset Amennyiben M' a G_0'-nek teljes párosítása, akkor az $\mathcal{F}$ tagjain kintről befelé haladva egyenként végigmegyünk, és M'-t kiegészítjük a G telített élekből álló teljes párosításává, amely $\mathcal{F}$ minden tagjába pontosan egy éllel lép be.

2. eset Ha M' nem teljes, akkor G_0'-ban valamely szabad pontból építünk egy F alternáló fát. (Ez egy apró különbség a "nem-súlyozott" algoritmushoz képest, ahol alternáló erdőt építettünk.) A következő esetek lehetnek.

1. M' növelése. F külső pontjából vezet G_0'-beli él szabad pontba. Ez meghatároz egy növelő utat. E mentén cserélve egy M'-nél eggyel nagyobb párosítást kapunk és erre nézve iteráljuk az eljárást.

A maximális elemszámú párosítást kereső algoritmushoz képest van egy fontos különbség. Ott, amikor alternáló utat találtunk, végrehajtjuk a növelést és az új, megnövelt párosítással mindent elölről kezdünk. Tehát eldobjuk a régi M-re felépített alternáló erdőt, az összehúzásokat, stb. Most, ha egy növelést végrehajtunk, akkor az eddigi alternáló fát ugyan eldobjuk, de a korábbi összehúzásokat megtartjuk. Ez azt jelenti, hogy az M' vizsgálatakor már vannak G_0'-ban olyan pontok, melyek az M' előtt lettek összehúzva. Így most előfordulhat, hogy az F alternáló fának belső pontja is (korábban) összehúzott pont.

2. Fa növelés. F egy külső u pontjából egy tisztáson lévő v pontba vezet G_0'-nek éle. Ekkor az uv élt és a $v\mu(v)$ élt a fához vesszük.

3. F két külső pontja között vezet él G_0'-ben. A keletkező páratlan kört összehúzzuk. Az új pont F külső pontja lesz.

4. Amennyiben az 1-2-3 lépések egyike sem hajtható végre, akkor megváltoztatjuk az y-t a következőképpen. A külső pontok ősképének duál-változóját növeljük, a belső pontok ősképének duál-változóját csökkentjük ugyanazzal az alább meghatározandó Δ értékkel. Minden külső pont ősképét $\mathcal{F}$-hez vesszük.

Legyen z belső pont korábban összehúzott pont, legyen zv a z-vel szomszédos M-beli él, és zu a z-vel szomszédos másik fabeli él. Amennyiben z ősképének a duál-változója nullává válik, akkor a z pont Z-vel jelölt ősképét kihagyjuk $\mathcal{F}$-ből. Ezenkívül z-t visszafújjuk abban az értelemben, hogy helyettesítjük azzal a C gráffal, amely a Z-ben lévő 0 módosított költségű élek gráfjából keletkezik az $\mathcal{F}$ maximális Z-ben fekvő tagjainak összehúzásával. $\mathcal{F}$ definíciója miatt a C gráf faktor-kritikus. Legyen v' a C-nek olyan pontja, melyre vv' telített él (vagyis az az él, mely a zv élt definiálta) és legyen M_C a $C - v'$ egy teljes párosítása. Vegyük M-hez az M_C elemeit. Ezenkívül a C-ben vegyünk egy M_C-ben alternáló P utat a v' pont és az u pont között (ilyen van, mert C faktor-kritikus). Most a G_0'-ben lévő alternáló fa a P úttal együtt a z felfújásával keletkezett gráfban alternáló fát alkot.

Mekkora legyen Δ? Az alábbi m_1, m_2, m_3 mennyiségek minimuma. Legyen m_1 a külső pontokból a fán kívüli pontokba (azaz tisztás plusz többi szabad pont) menő G-beli (!) élek módosított költségeinek minimuma. Mivel a 2. lépés nem volt alkalmazható, m_1 pozitív. Legyen m_2 a fában szereplő összehúzott belső pontok duálváltozóinak minimuma. Végül legyen m_3 az F fa külső pontjait összekötő G-beli élek módosított költségének minimumának a fele. Mivel a 3. lépés nem volt alkalmazható, az m_3 pozitív.

Alapvető megfigyelés, hogy bármely uv élnek, amelyik a fában két külső pontot köt össze, a módosított költsége páros. Ez azért van így, mert uv a fában egy olyan G_0'-beli C kört definiál, melynek minden más éle telített, azaz 0 módosított költségű. Mármost bármely összehúzott pont őseképe a telített éleken összefüggő, így a C körből előállítható az eredeti G gráf egy köre, melynek minden éle, az uv él (ősképének) kivételével, telített. De a páros körösszeg tulajdonság miatt ebből következik, hogy $c_y(uv)$ páros.

Ezen megfontolásból alapján m_3 is egész szám. Könnyen látszik, hogy az új duális megoldás is megengedett. Az algoritmust az új párosításra, az új alternáló fára és az új duál-változókra iteráljuk.

Milyen lépés-szám becslés adható a fenti algoritmusra? A szabad pontok száma sohasem növekszik és párosítás növeléskor csökken. Nevezzük az algoritmus két párosítás növelés közötti részét fázisnak. Nyilván legfeljebb $n/2$ fázis lehetséges.

Egy fázison belül minden összehúzás külső pontot eredményez. Mivel mindig csak belső pontot fújunk fel, csak olyan pont felfújására kerülhet sor, amelyet korábbi fázisban húztunk össze. Ezért egy fázis $O(m)$ lépést igényel.

Feladat 3.7 *Igazoljuk, hogy az algoritmus során a páratlan kör összehúzása a páros körösszeg tulajdonságot nem rontja el.*

file: lmatch

3.5 Minimális költségű áramok

Legyen $D = (V, A)$ egy n csúcsú és m élű irányított gráf, az élein $f : A \to \mathbf{R}$ alsó és $g : A \to \mathbf{R}$ felső korlátokkal, melyekre $f \leq g$. A korlátokon kívül adott még egy $c : A \to \mathbf{R}$ költség-függvény is. Egy x áram **költségén** a cx skaláris szorzatot értjük. Az x **megengedett**, ha $f \leq x \leq g$. Határozzuk meg a legkisebb költségű megengedett áramot!

Adott x áramhoz definiáljuk a $D_x = (V, A_x)$ segédgráfot és a c_x módosított költség-függvényt a következőképpen. Egy uv él akkor tartozzék A_x-hez, ha vagy (i) $uv \in A, x(uv) < g(uv)$ és ekkor legyen $c_x(uv) := c(uv)$ (A_x előre éle), vagy ha (ii) $vu \in A, x(vu) > f(vu)$ és akkor legyen $c_x(uv) := -c(vu)$ (A_x hátra éle).

TÉTEL 3.18 *Az x megengedett áramra a következők ekvivalensek.* (a) *x minimális költségű,* (b) *D_x-ben nincs negatív kör,* (c) *létezik egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ potenciál, melyre*

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } x(uv) < g(uv) \ (uv \in A), \tag{i}$$

és

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } x(uv) > f(uv) \ (uv \in A). \tag{ii}$$

Biz. (a)=>(b). Ha D_x-ben létezik C negatív kör, akkor annak előre éleinek megfelelő D-beli éleken növeljük, hátra éleinek megfelelőkön pedig csökkentsük x-t ε-nal. Amennyiben ε kicsiny pozitív szám, a keletkező x' megengedett áram lesz, amelynek költsége (C negativitása miatt) kisebb, mint x költsége.

(b)=>(c). Használjuk azt a korábban megismert tételt, hogy ha egy irányított gráfban nincsen negatív kör, akkor létezik megengedett potenciál. A D_x gráfban egy π potenciálnak a c_x-re vonatkozó megengedettsége pontosan az (i) és (ii) feltételekkel ekvivalens! (Ez tehát valójában a (b) és (c) ekvivalenciáját bizonyítja.)

(c)=>(a). Tegyük fel π teljesíti az (i) és (ii) feltételeket. Legyen $\bar{c}(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$. Ekkor tetszőleges z megengedett áramra $cz = \bar{c}z = \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) > 0] + \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) < 0] \geq \sum[\bar{c}(uv)f(uv) : \bar{c}(uv) > 0] + \sum[\bar{c}(uv)g(uv) : \bar{c}(uv) < 0] = \sum[\bar{c}(uv)x(uv) : \bar{c}(uv) > 0] + \sum[\bar{c}(uv)x(uv) : \bar{c}(uv) < 0] = \bar{c}x = cx$. •

Az (i) és (ii) feltételeket hívják **optimalitási kritériumoknak**. A tétel a következő algoritmust sugallja.

Körjavító algoritmus minimális költségű áram kiszámítására

Induljunk ki egy tetszőleges x megengedett áramból. Ha D_x-ben nincs negatív kör, akkor készen vagyunk: a 3.18 tétel szerint az adott x áram minimális költségű. Ha van negatív kör, akkor ezen C kör mentén cseréljük ki x-et úgy, hogy D azon élein, melyek a C előre éleinek felelnek meg, Δ-val növeljük, míg a C hátra éleinek megfelelő D-beli éleken az x értékét Δ-val csökkentjük, ahol

$$\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$$

és Δ_1 a C előre éleinek megfelelő D-beli éleken a $g(uv) - x(uv)$ minimuma, Δ_2 pedig a C hátra éleinek megfelelő D-beli éleken az $x(uv) - f(uv)$ minimuma. Nevezzünk egy ilyen változtatást a C kör mentén való javításnak. Iteráljuk az eljárást a létrejött új áramra vonatkozólag.

Hasznos megfigyelni, hogy ha D_x egy C köre mentén javítva az y áramot kapjuk, akkor D_y úgy kapható meg D_x-ből, hogy a C kör minden élét fordítva betesszük, ha még nem volt benn, továbbá a C kör bizonyos éleit kitöröljük, éspedig azokat, amelyeken a Δ felvétetik.

Miután Ford és Fulkersonnak a maximális folyam megkeresésére vonatkozó közismert alternáló utas algoritmusa a körjavító eljárás speciális esetének tekinthető, amelyben az út mentén történő folyamnövelés éppen egy kör mentén történő javításnak felel meg, és a Ford-Fulkerson féle eljárás köztudottan nem polinomiális futásidejű (sőt valós kapacitások esetén még csak nem is feltétlenül véges), a körjavító áram algoritmus sem polinomiális.

Tudjuk azonban, hogy a Ford-Fulkerson algoritmusnak az Edmondstól és Karptól illetve Dinitstől származó változata, amelyben mindig az aktuális segédgráf legrövidebb javító útját használjuk, már erősen polinomiális. Ennek egyfajta általánosításaként A. Goldberg és R.E. Tarjan azt javasolta, hogy a körjavító algoritmusban mindig az aktuális c_x költségre vonatkozó minimális átlagú kör mentén javítsunk. Megjegyzendő, hogy például Karp módszerével tetszőleges költségfüggvény esetén a minimális átlagú kört erősen polinom időben ki lehet számítani, és ezt az eljárást a továbbiakban szubrutinként használjuk.

TÉTEL 3.19 (Goldberg és Tarjan) *Amennyiben mindig a minimális átlagú kör mentén történik a javítás, úgy bármely megengedett áramból indulva a körjavító algoritmus $O(nm^2 \log n)$ javítás után minimális költségű áramot szolgáltat.*

Biz. Bár a bizonyítás több ponton is analógiát mutat az Edmonds-Karp-Dinits algoritmus helyességének bizonyításával, újfajta megfigyelésekre is szükségünk lesz. Egy egyszerű észrevétellel kezdjük.

Lemma 3.20 *Legyenek z és y megengedett áramok, melyekre valamely uv élen $z(uv) < y(uv)$. Ekkor létezik D_z-ben olyan uv-n átmenő C irányított kör, amelynek megfordítása benne van D_y-ban.*

Biz. Ekkor $s := y - z$ áram, és így s a D azon éleire megszorítva is áram, melyeken $s(e) \neq 0$. Fordítsuk meg D azon éleinek irányítását, melyeken s negatív és ezen éleken negáljuk s-t. A keletkező s' függvény a keletkező D' digráf élein áramot alkot, amely mindenütt pozitív. Mivel egy pozitív áram előáll irányított körök (karakterisztikus vektorainak) pozitív lineáris kombinációjaként, van olyan C irányított kör a D'-ben, amely átmegy az uv élen.

Ha C egy $h = ab$ élére $s(h) > 0$, akkor $g(h) \geq y(h) > z(h) \geq f(h)$, és ezért ab benne van D_z-ben és ba benne van D_y-ban. Hasonlóképp, ha C egy $h = ab$ élére $s(h) < 0$, akkor $f(h) \leq y(h) < z(h) \leq g(h)$, és ezért ba benne van D_z-ben és ab benne van D_y-ban.

Emiatt C benne van D_z-ben és C megfordítása benne van D_y-ban, azaz C eleget tesz a lemma követelményének. •

Készítsük el D segítségével a következő $H = (V, A^*)$ digráfot. A D minden uv éléhez, amelyre $f(uv) < g(uv)$, tegyük A^*-ba az uv élt $d(uv) := c(uv)$ költséggel és a vu élt $d(vu) := -c(uv)$ költséggel. A D_x segédgráf tehát mindig a H részgráfja, és c_x a d megszorítása A_x-re. Jegyezzük meg, hogy H szimmetrikus abban az értelemben, hogy minden uv éllel együtt vu is benne van, továbbá a d költségfüggvény antiszimmetrikus, azaz H minden uv élére $d(uv) = -d(vu)$.

Legyen $\pi : V \to \mathbf{R}$ tetszőleges potenciál. Definiáljuk H-nak mindegyik uv élére a $d_\pi(uv) := d(uv) - \pi(v) + \pi(u)$ eltolt költséget. Nyilván d_π is antiszimmetrikus. Tetszőleges áramnak, speciálisan minden körnek, az eltolt költsége ugyanannyi, mint az eredeti. A fenti optimalitási kritérium azzal ekvivalens, hogy a D_x minden e élére $d_\pi(e) \geq 0$. Amennyiben tehát x nem optimális, úgy bármely π potenciálra lesz olyan e él D_x-ben, amelyre $d_\pi(e)$ negatív. Azt a szemléletes érzetet fogjuk kiaknázni, hogy minél közelebb vannak ezek a negatív számok a 0-hoz, annál közelebb vagyunk az optimalitási kritériumok teljesüléséhez. A továbbiakban, hacsak az ellenkezőjét nem mondjuk, mindig feltesszük, hogy a szóbanforgó áram nem optimális, azaz a hozzátartozó segédgráfban van negatív kör.

Definíció. Az x áram és π potenciálból álló (x, π) pár **hibája** az $\varepsilon(x, \pi) = -\min\{d_\pi(e) : e \in A_x\}$ szám. Egy x áram $\varepsilon(x)$ **hibája** $\varepsilon(x) := \min\{\varepsilon(x, \pi) : \pi \text{ potenciál}\}$. A minimalizáló potenciált π_x-szel jelöljük.

Lemma 3.21 *Az x áram hibája egyenlő a c_x-re vonatkozó D_x-beli minimális körátlag -1-szeresével.*

Biz. A definíció miatt D_x minden e élére $d_{\pi_x}(e) \geq -\varepsilon(x)$, és így D_x-ben a minimális körátlag legalább $-\varepsilon(x)$. Megfordítva, ha D_x-ben a minimális körátlag $-\varepsilon'$, akkor a $d'(e) := d(e) + \varepsilon'$ $(e \in A_x)$ költségre nézve D_x-ben nincs negatív kör. Így létezik π potenciál, melyre $\pi(v) - \pi(u) \leq d'(uv)$, minden $uv \in A_x$ élre. Ez épp azt jelenti, hogy az (x, π) pár hibája legfeljebb ε', és így $\varepsilon(x) \leq \varepsilon'$. •

Hangsúlyozzuk tehát, hogy a D_x digráfban minden él d_{π_x}-költsége legalább $-\varepsilon(x)$, és a minimális átlagú kör minden élének a d_{π_x}-költsége $-\varepsilon(x)$.

Lemma 3.22 *Minimális d-átlagú kör mentén javítva az áram hibája nem nő.*

Biz. A 3.21 lemma szerint D_x-ben a minimális köråtlag $-\varepsilon(x)$. Ekkor $d_{\pi_x}(uv) \geq -\varepsilon(x)$ minden $uv \in A_x$ élre és a minimális átlagú C_x kör minden e élére $d_{\pi_x}(e) = -\varepsilon(x)$. C_x mentén javítva a keletkező D_y segédgráfban csak a C_x néhány élének megfordítottja lehet új él. Ezek d_{π_x}-költsége $+\varepsilon(x)$, vagyis D_y-ban minden él d_{π_x}-költsége legalább $-\varepsilon(x)$, és így y hibája legfeljebb $\varepsilon(x)$. •

Belátjuk, hogy a javítások során az áram hibája nemcsak, hogy nőni nem tud, de m javítás során már bizonyosan csökkenni fog. Legyen x egy megengedett áram. A H egy irányított körét nevezzük **teljesen negatívnak**, ha a kör minden élének d_{π_x}-költsége negatív. (Ez a fogalom tehát a megadott x áramra vonatkozik.)

Lemma 3.23 *Tetszőleges x megengedett áramból kiindulva nem több, mint m javítás után olyan x' áram keletkezik, amelyre*

$$\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)(1 - 1/n). \tag{3.10}$$

Biz. Legyen $\varepsilon := \varepsilon(x)$. Amint már említettük, D_x-ben egy C_x minimális átlagú javító kör valamennyi élének d_{π_x}-költsége $-\varepsilon$, tehát C_x teljesen negatív. Tekintsük x-től kezdődően az egymást követő javításokat egészen addig, amíg a használt javító körök teljesen negatívak. A keletkező áramot jelölje x'. Mivel teljesen negatív kör mentén történő javításkor a segédgráfból legalább egy negatív él kiesik és negatív él nem jön be, az ilyen javítások száma legfeljebb a D_x-beli negatív élek száma, vagyis legfeljebb m.

Készen vagyunk, ha x' már optimális, azaz hibája 0. Tegyük fel, nem ez a helyzet, és legyen $C_{x'}$ a $D_{x'}$-ben az algoritmus által használt minimális átlagú kör. Mivel ez már nem teljesen negatív, $C_{x'}$ valamely e élére $d_{\pi_x}(e) \geq 0$. A megelőző, teljesen negatív körök mentén történt javítások során a segédgráfhoz csak olyan f élek jöttek, melyekre $d_{\pi_x}(f) > 0$, ezért a $C_{x'}$ minden olyan h éle, melyre $d_{\pi_x}(h) < 0$, benne van a kiindulási D_x-ben. Így $d_{\pi_x}(C_{x'}) \geq 0 + (|C_{x'}| - 1)(-\varepsilon)$, tehát $d_{\pi_x}(C_{x'})/|C_{x'}| \geq (1 - 1/|C_{x'}|)(-\varepsilon) \geq (1 - 1/n)(-\varepsilon)$. Azt kaptuk, hogy legfeljebb m javítás után az előálló $D_{x'}$-ben a minimális köråtlag legalább $(1 - 1/n)(-\varepsilon)$, azaz x' hibája az x hibájának legfeljebb $(1 - 1/n)$-szerese. •

Legyen $K := mn\lceil\log(2n)\rceil$. Egy x megengedett áramból kiindulva jelölje z a K javítás után keletkező áramot. π_z jelölte azt a potenciált, amelyre $\varepsilon(z) = \varepsilon(z, \pi_z)$.

Lemma 3.24 $\varepsilon(z) \leq \varepsilon(x)/2n$.

Biz. A 3.23 lemma szerint a hiba m javítás után az $(1 - 1/n)$-szeresére csökken, így mn javítás után az $(1 - 1/n)^n$-szeresére. Mivel $(1 - 1/n)^n = 1/[1 + 1/(n-1)]^n \leq 1/2$, így a hiba mn javítás után legfeljebb a felére csökken. Amiből adódik, hogy minden $r > 0$ egészre mnr javítás után a hiba az $1/2^r$-szeresére csökken, speciálisan $r = \lceil\log(2n)\rceil$-re, K javítás után a $(2n)$-ed részére. •

Lemma 3.25 *A D_x-ben használt C_x javító körnek a minimális c_{π_z}-költségű vu éle olyan, hogy a neki megfelelő D-beli élen az áram értéke a z áramot követő javítások során már nem változik.*

Biz. Mivel C_x-nek a d_{π_x}-átlaga $-\varepsilon(x)$, így a d_{π_z}-átlaga is $-\varepsilon(x)$. Ebből és a 3.24 lemmából $d_{\pi_z}(vu) \leq -\varepsilon(x) \leq -2n\varepsilon(z) < -\varepsilon(z)$. Tegyük fel, hogy vu mondjuk hátra éle D_x-nek. (Analóg módon kezelhető az az eset, ha előre éle). Ekkor $uv \in A$ és $d_{\pi_z}(vu) < -\varepsilon(z)$ miatt vu nem lehet D_z-ben, és ezért $z(uv) = f(uv)$. Indirekt, tegyük fel, hogy az algoritmus később egy olyan y áramot talál, amelyre $y(uv) > z(uv)$. A 3.22 lemma miatt y hibája legfeljebb $\varepsilon(z)$.

Tekintsük a 3.20 lemma által biztosított, uv-n áthaladó C kört, melynek megfordítottját jelölje C'. A lemma szerint C benne van D_z-ben, C' pedig D_y-ban. Mivel $d_{\pi_z}(uv) = -d_{\pi_z}(vu) \geq 2n\varepsilon(z)$, kapjuk, hogy $-d(C') = d_{\pi_z}(C) \geq 2n\varepsilon(z) + (n-1)(-\varepsilon(z)) = (n+1)\varepsilon(z)$, azaz $d(C') \leq -(n+1)\varepsilon(z) < -|C'|\varepsilon(z)$, vagyis C' átlaga kisebb, mint $-\varepsilon(z)$, ellentmondásban azzal, hogy y hibája legfeljebb $\varepsilon(z)$. •

Megállapítottuk tehát, hogy egy x áramból kiindulva K javítást követően egy élen az áram értéke rögzül. Ezért legfeljebb mK javítás után már nem létezhet javítás, azaz minimális költségű áramot kaptunk. • •

Feladat 3.8 *Mutassuk meg, hogy a maximális folyam meghatározására szolgáló Edmonds-Karp-Dinits algoritmus a körjavító algoritmus speciális esetének tekinthető.*

3.6 A Lucchesi-Younger tétel algoritmikusan

Korábban már találkoztunk a Lucchesi-Younger tételnek a kikeresztezési technikán alapuló nem-algoritmikus bizonyításával. Jelen célunk egy algoritmikus bizonyítás leírása, amelynek segítségével polinom időben kiszámítható a szóbanforgó minimum illetve maximum. Az alábbiakban irányított vágások egy lefogását **irányított kötésnek** vagy röviden **kötésnek** fogjuk hívni.

TÉTEL 3.26 (Lucchesi és Younger) *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf. Az élidegen irányított vágások maximális ν száma egyenlő a minimális kötés τ elemszámával.*

Biz. Feltehetjük, hogy D irányítatlan értelemben összefüggő. Ekkor egy F élhalmaz pontosan akkor kötés, ha elemeinek összehúzása erősen összefüggő digráfot eredményez, tehát τ azon élek minimális száma, amelyeket összehúzva, vagy ekvivalensen fordítva is behúzva, eöf. digráfot kapunk. Nyilván $\nu \leq \tau$. Az egyenlőség igazolásához leírunk egy algoritmust, amely megkonstruál egy F kötést és $|F|$ darab élidegen irányított vágást.

Nevezzük pontok egy X részhalmazát **magnak**, ha nem lép bele él. Az X-ből kilépő élek $\Delta(X)$ halmazát (ha nemüres) neveztük irányított vágásnak. Egyszerűen látszik, hogy a magok metszetre-unióra zárt rendszert alkotnak. Valamely X magra jelölje $c(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek számát. Nyilván $c(V) = 0$ és $c(\emptyset) = 1$.

Lemma 3.27 *A magokon értelmezett c függvény szupermoduláris.*

Biz. Legyen $\hat{c}(X) := c(V - X)$. Elegendő azt belátni, hogy $d(X, Y) = 0$ esetén a szupermodularitási egyenlőtlenség fennáll $\hat{c}$-re. Tekintsük az X és Y halmazok által feszített élek $I(X)$ és $I(Y)$ halmazát. Miután $d(X, Y) = 0$,

$$I(X \cup Y) = I(X) \cup I(Y) \text{ és } I(X \cap Y) = I(X) \cap I(Y). \tag{3.11}$$

Jelölje r a irányítatlan értelemben vett gráf körmatroidjának rangfüggvényét. Mivel r szubmoduláris és $r(I(X)) = |X| - \hat{c}(X)$, a $\hat{c}$ és így a c szupermodularitása is következik. •

Legyen $c'(X)$ ugyanaz, mint $c(X)$, azzal az eltéréssel, hogy $c'(\emptyset) = 0$. Ekkor c' metsző szupermoduláris. Rögtön látszik, hogy egy $F \subseteq A$ kötésre és X magra $\delta_F(X) \geq c'(X)$, ahol $\delta_F(X)$ az X-ből kilépő F-beli élek számát jelöli. (Ez az egyenlőtlenség az üres X halmaz kivételével a c függvényre is igaz. Azért kell a c helyett a c'-vel dolgoznunk, hogy az egyenlőtlenség mindenhol érvényes legyen).

Egy X magot illetve a hozzá tartozó $\Delta(X)$ irányított vágást **pontosnak** hívunk (F-re nézve), ha $c'(X) = \delta_F(X)$. Amennyiben $\delta_F(X) = 1$, **1-pontos** magról ill. vágásról beszélünk. Látható, hogy minden pontos vágás, melynek X magja nem üres és nem V, felbomlik diszjunkt 1-pontos vágások uniójára (éspedig a $D - X$ komponensei által meghatározott vágásokra), továbbá X 1-pontos magok metszete. A definícióból adódóan V mindig pontos. A szokásos technikával igazolható, hogy:

Lemma 3.28 *Metsző pontos magok metszete és uniója pontos.* •

Ebből rögtön következik, hogy egy v pontot tartalmazó pontos halmazok $B(v)$ metszete pontos. A $B(v)$ halmaz tehát a v-t tartalmazó egyértelmű legszűkebb pontos halmaz.

Feladat 3.9 *Igazoljuk, hogy $B(u)$ egyenlő az u-t tartalmazó 1-pontos magok metszetével. Igazoljuk, hogy $B(u)$ pontosan azon csúcsok halmaza, amelyekből vezet u-ba két élidegen út abban a digráfban, amely D-ből keletkezik az F éleinek megfordításával és minden eredeti él párhuzamos duplázásával. Adjunk algoritmust $B(u)$ meghatározására.*

Gyakorlat 3.10 *Pontos halmazokból álló összefüggő hipergráf ponthalmaza is pontos.*

Az algoritmus teszőleges F kötésből indul ki (ami kezdetben lehet például egy feszítő fa). Az általános lépésben vagy egy kisebb kötést talál, vagypedig $|F|$ élidegen irányított vágást. Készítsünk el egy $D' = (V, A')$ segédgráfot, az élein egy d költség-függvénnyel, a következőképpen. $A - F$ minden eleme A'-höz tartozik és a költsége $+1$. Az F elemeit megfordítva tegyük A'-be és ezen fordított élek költsége legyen -1. Végül minden v pontból vezessünk $B(v)$ minden pontjába egy 0 költségű ún. **ugró** élt. Az előbbi feladat alapján uv akkor és csak akkor ugró él, ha nem lép ki 1-pontos magból. (A definícióból következik, hogy minden eredeti $A - F$-beli él megfordítottja ugró él lesz.)

A közismert algoritmussal döntsük el, hogy létezik-e D'-ben a d költség-függvényre nézve negatív kör. Keressünk egyet, ha van, illetve keressünk egy π megengedett (egészértékű) potenciált, ha nincs.

1. eset *D'-ben nincs negatív kör, azaz létezik π megengedett potenciál.*

Mivel a π konstanssal történő eltolása a megengedettséget nem befolyásolja, feltehető, hogy π minimális értéke 0. Legyen $V_i := \{v : \pi(v) \leq i\}$.

Semelyik V_i-ből nem lép ki ugró él, mert ha uv ilyen volna, akkor $\pi(v) > \pi(u)$, azaz $\pi(v) - \pi(u) > 0 = d(uv)$ állna, ellentétben a π megengedettségével.

Következik, hogy egy $uv \in A - F$ él nem lép be semelyik V_i-be, hiszen uv megfordítottja ugró él. Ráadásul uv legfeljebb csak egy V_i-ből léphet ki, hiszen uv benne van A'-ben $+1$ költséggel, tehát $\pi(v) - \pi(u) \leq 1$.

Bármely $uv \in F$ él legalább egy V_i halmazból kilép, hiszen vu benne van A'-ben -1 költséggel, és így $\pi(u) - \pi(v) \leq d(vu) = -1$, vagyis $\pi(v) - \pi(u) \geq 1$. Ebből az is adódik, hogy V_i-be nem lép be F-beli él, vagyis minden V_i mag.

Lemma 3.29 *A V_i maghoz tartozó $\Delta(V_i)$ irányított vágás felbontható 1-pontos diszjunkt irányított vágások uniójára.*

Biz. Mivel V_i-ből nem lép ki ugró él, minden $v \in V_i$ pontra $B(v) \subseteq V_i$, és ezért a $\{B(v) : v \in V_i\}$ hipergráf komponenseinek $A_1, \ldots, A_l$ ponthalmazai a V_i partícióját alkotják. A fenti gyakorlat alapján mindegyik A_j mag pontos, továbbá a $\Delta(A_j)$ vágások partícionálják a $\Delta(V_i)$ vágást. Miután minden pontos vágás diszjunkt 1-pontos vágások uniója, a lemma következik. •

Ha tehát az 1. eset áll fenn, akkor találtunk irányított vágásoknak egy olyan rendszerét, amelynek minden tagját F pontosan egyszer fogja le, minden $A - F$ beli él legfeljebb egyikükben van benne, minden F-beli él pedig legalább egyikükben. Ekkor mindegyik F-beli élhez a rendszerből egy olyat kiválasztva, amelyben ő benne van, $|F|$ darab páronként élidegen irányított vágást kapunk.

2. eset *A D' segédgráfban létezik negatív kör.*

Legyen C olyan negatív kör, amelynek a legkevesebb éle van. Itt a minimalitást csak annyiban fogjuk használni, hogy nincs C-nek két olyan nem egymást követő a, b pontja, amelyekre a-ból b-be vezet ugró él és a körön a b-től a-ig vezető P ív költsége negatív. Ilyen ugró él létezése esetén ugyanis $P + ab$ egy kisebb élszámú negatív kört adna. (Tehát tetszőleges negatív körből kiindulva az ilyen értelmű minimális negatív kört algoritmikusan is könnyen megkaphatjuk.)

Lemma 3.30 *A C ugró élei elrendezhetők egy olyan $e_1 = u_1v_1, e_2 = u_2v_2, \ldots, e_k = u_kv_k$ sorba, hogy semelyik u_i-ből nem vezet ugró él v_j-be, ahol $i < j$.*

Biz. C minden ugró élének feleltessünk meg egy pontot és valamely x pontból egy másik y-ba vezessünk élt, ha az x-hez tartozó ugró él tövéből vezet ugró él az y-hoz tartozó ugró él fejébe. Amennyiben az így kapott irányított segédgráf aciklikus, úgy pontjai sorba rendezhetők hogy minden él a sorrendben visszefelé mutat, és egy ilyen sorrend éppen a lemma által előírt sorrendet adja.

Az, hogy a segédgráf tartalmaz irányított kört, azt jelenti, hogy C bizonyos ugró élei ciklikusan sorbarendezhetők az $f_1 = s_1t_1, f_2 = s_2t_2, \ldots, f_m = s_mt_m$ sorrendbe úgy, hogy s_it_{j+1} ugró él (ahol $t_{m+1} = t_1$). Legyen C_i a C körnek az az íve, amely t_{i+1}-ből vezet s_i-be. A C-re tett minimalitási feltevés alapján C_i költsége nemnegatív.

Könnyen látható, hogy a C minden nem-ugró éle ugyanannyi C_i ívhez tartozik. Jelöljük ezt a számot t-vel ($t > 0$). Ebből következik, hogy a C költségének t-szerese a C_i ívek költségének összege, ami nemnegatív, ellentétben a C kör negatív voltával. •

Módosítsuk F-t a következőképpen. Hagyjuk ki belőle azokat az elemeket, amelyeknek megfordítottja (ami tehát D'-ben van) C-ben van, és vegyük hozzá $A - F$ azon uv elemeit, amelyeknek megfelelő D'-beli uv élek C-ben vannak. A keletkezett halmazt jelölje F'. Miután C negatív kör volt, $|F'| < |F|$. Belátjuk, hogy F' kötés.

Lemma 3.31 *Az előbb definiált F' élhalmaz kötést alkot.*

Biz. Egy X mag **többlete** legyen $\gamma(X) := \delta_F(X) - c'(X)$. Ez mindig nemnegatív, hiszen F kötés, továbbá éppen akkor 0, ha X pontos. Jelölje $\delta^u(X)$ (illetve $\varrho^u(X)$) a C kör azon ugró éleinek a számát, melyek X-ből kilépnek (ill. X-be belépnek). $\delta^u(X)$ szerinti indukcióval belátjuk, hogy

$$\gamma(X) \geq \delta^u(X).$$

Az egyenlőtlenség $\delta^u(X) = 0$ esetén semmitmondó, így legyen $\delta^u(X) > 0$ és legyen $e_i = u_i v_i$ a C-nek az az ugró éle, amely kilép X-ből és a 3.30 lemmában megadott sorrendben a legkisebb indexű. Legyen $B := B(u_i)$. Ha most $u_j v_j$ egy másik ugró éle C-nek, amely kilép X-ből, akkor $j > i$, és állítjuk, hogy $v_j \notin B$. Ha ugyanis v_j B-ben volna, akkor $u_i v_j$ is ugró él lenne, ellentétben a sorrendezés tulajdonságával. Így tehát $\delta^u(X \cup B) = \delta^u(X) - 1$. Most $\gamma(X) + 0 = \gamma(X) + \gamma(B) \geq \gamma(X \cap B) + \gamma(X \cup B) \geq 1 + \gamma(X \cup B) \geq 1 + \delta^u(X \cup B) = \delta^u(X)$, ahol az utolsó egyenlőtlenség az indukciós feltevésből adódik. Ebből kapjuk, hogy $\delta_{F'}(X) = \delta_F(X) + \varrho^u(X) - \delta^u(X) \geq \delta_F(X) - \delta^u(X) \geq c'(X)$. • •

A 2. eset fennállásakor tehát egy olyan kötést találtunk, amely kisebb a kiindulási kötésnél. Emiatt, ha az eljárást iteráljuk, a 2. eset legfeljebb $n - 1$ előfordulása után bizonyosan az 1. eset következik be. • • •

3.7 Győri tétele algoritmikusan

Az alábbiakban algoritmikus bizonyítást adunk Győri tételére, amelyre a Válogatott fejezetek c. előadáshoz írott jegyzetben már szerepelt egy nem konstruktív bizonyítás. A jelöléseket és a tételt megismételjük.

Legyen $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ egyszerű irányított út, ahol az e_i irányított él töve v_{i-1} és feje v_i. Jelöljük a P csúcsainak halmazát V-vel. Legyen $\mathcal{F} := \{F_1, \ldots, F_k\}$ a P részútjainak egy rendszere. A következőkben úton általában az út élhalmazát értjük. Egy I út kezdőpontját $b(I)$-vel, végpontját pedig $j(I)$-vel jelöljük.

Azt mondjuk, hogy P részútjainak egy $\mathcal{B}$ rendszere **generálja** $\mathcal{F}$-t vagy hogy $\mathcal{B}$ **generátora** $\mathcal{F}$-nek, ha $\mathcal{F}$ minden tagja előáll néhány $\mathcal{B}$-beli út egyesítéseként. Például $\mathcal{F}$ saját magának generátora, és az egyelemű utakból álló $\{e_1, \ldots, e_n\}$ rendszer is generálja $\mathcal{F}$-t. Jelölje $\gamma(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$ generátorainak minimális elemszámát.

Azt mondjuk, hogy egy F útból és annak egy e éléből álló (F, e) pár **reprezentált utat** alkot. Jelöljük $\mathcal{F}_r$-rel az olyan (F, e) reprezentált utak halmazát, amelyekre $F \in \mathcal{F}$.

Legyen $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ a P részútjainak egy családja és legyen $\mathcal{R} := \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ egy reprezentáló rendszer, azaz az f_i irányított élek különböző elemei P-nek és $f_i \in I_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ **erős reprezentáló rendszer**, ha $I_i \cap I_j$ nem tartalmazza f_i és f_j mindegyikét $(i, j,\ 1 \le i < j \le t)$. Ebben az esetben a reprezentált utak $\{(I_1, f_1), (I_2, f_2), \ldots, (I_t, f_t)\}$ családját **független**nek nevezzük. Az $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ **erősen reprezentálható**, ha létezik erős reprezentáns rendszere.

Jelölje $\sigma(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$-ben lévő lévő erősen reprezentálható utak maximális számát. Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{R}$ erősen reprezentálható útrendszer, akkor $\mathcal{R}$-t nem lehet $|\mathcal{R}|$-nél kevesebb úttal generálni. Ebből következik, hogy utak tetszőleges $\mathcal{F}$ rendszerére $\sigma(\mathcal{F}) \le \gamma(\mathcal{F})$. Győri tétele azt állítja, hogy itt valójában egyenlőség szerepel:

TÉTEL 3.32 (Győri Ervin) *A P út részútjainak bármely $\mathcal{F}$ családjára fennáll $\sigma(\mathcal{F}) = \gamma(\mathcal{F})$.*

Biz. Csak a nem-triviális $\sigma \ge \gamma$ egyenlőtlenséget igazoljuk.

Jelölje $\mathcal{F}_r$ a reprezentált utak halmazát. $\mathcal{F}_r$ egy (F, f) tagját **lényegesnek** mondjuk, ha nincs olyan F' $(\neq F)$ tagja $\mathcal{F}$-nek, amelyre $f \in F' \subset F$. $\mathcal{F}_r$ minden (F, f) lényeges tagjának megfeleltetünk egy (X_K, X_B) halmaz-párt, ahol X_B az F út f-t követő pontjaiból áll, míg $V - X_K$ az F út f-t megelőző pontjaiból. Jelölje $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ az így kapott halmaz-párok családját.

Az algoritmus három fázisból áll. Az elsőben a lényeges párok $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ családjából kiválasztunk egy keresztezés-mentes $\mathcal{K}$ részrendszert. A második fázisban Dilworth tételt alkalmazzuk $\mathcal{K}$-ra és az ismert algoritmus segítségével (amely a Dilworth tételnek Kőnig tételre való visszavezetésén és ezáltal az alternáló utas módszeren alapul) $\mathcal{K}$-nak meghatározunk egy maximális $\mathcal{I}$ független részét valamint egy minimális lánc-felbontását. A láncfelbontás irányított élek egy olyan F rendszerének felel meg, amelyek lefogják az $\mathcal{K}$-ban szereplő valamennyi halmaz-párt. Az algoritmus harmadik fázisában F-t átalakítjuk úgy, hogy elemszáma ne változzék és $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$-nek minden tagját lefogja.

1. Fázis Végigmegyünk a P út élein az $e_1, \ldots, e_n$ sorrendben és az $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ tagjait két csoportba soroljuk, $\mathcal{K}$-ba és $\mathcal{T}$-be. Kezdetben mindkét csoport üres. Az $\mathcal{T}$ tagjaira a későbbiek során, mint tiltott párokra hivatkozunk.

Az általános lépésben tekintjük az e_i élt és az összes $(I_1, e_i), (I_2, e_i), \ldots, (I_k, e_i)$ lényeges párt. Mivel ezen párok lényegesek, az I_j utak élhalmazai egymást nem tartalmazzák és a végpontjaik páronként különbözőek. Következésképp feltehető, hogy ezen utak úgy vannak indexelve, hogy $b(I_1) < \ldots < b(I_k)$ és $j(I_1) < \ldots < j(I_k)$. Mindegyik (I_j, e_i) nem tiltott párt bevesszük $\mathcal{K}$-ba, és egy ilyen bevételkor letiltjuk (azaz $\mathcal{T}$-be tesszük) az összes olyan (I_h, e_l) lényeges párt, amelyre $j < h \le k$, $l > i$ és $e_l \in I_j$.

A konstrukcióból könnyen látszik, hogy az 1. fázis végén kapott $\mathcal{K}$ rendszer keresztezés-mentes lesz.

2. Fázis Alkalmazzuk a Dilworth tételt $\mathcal{K}$-ra és számítsunk ki egy $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ független rész-rendszert és $\mathcal{K}$-nak egy minimális lánc-felbontását, amely egy olyan F élrendszernek felel meg, amely $\mathcal{K}$ minden tagját lefogja, és amelyre $|F| = |\mathcal{I}|$.

3. Fázis Amennyiben F lefogja $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ valamennyi tagját, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy van olyan (I, f) lényeges pár, amelyet F nem fog le. Válasszuk (I, f)-t úgy, hogy az I-nek az f élt megelőző csúcsainak $(I, f)^-$ halmaza minimális legyen. Mivel (I, f)-t F nem fogja le, így (I, f) tiltva lett (azaz $\mathcal{T}$-be került), vagyis van a $\mathcal{K}$-nak olyan (J,e) tagja, amelyre $\{e,f\} \subseteq I \cap J$, e megelőzi f-t és J megelőzi I-t. Válasszunk egy ilyen (J,e) párt úgy, hogy $(J,e)^+$ minimális legyen.

Az (I,f) és (J,e) párok lényegesek, így mind az (I,e), mind a (J,f) pár lényeges. Az $(I,f)^-$ minimalitásából következik, hogy F lefogja az $((I,e)^-, (I,e)^+)$ párt.

Lemma 3.33 $(J,f) \in \mathcal{K}$.

Biz. Amennyiben (J,f) tiltott volna, úgy az algoritmus előírása miatt volna egy (J',e') tagja $\mathcal{K}$-nak úgy, hogy J' megelőzi J-t és $\{e',f\} \subseteq J' \cap J$. Nem lehet, hogy e' megelőzi e-t, mert akkor (J,e) is tiltott lett volna, holott $(J,e) \in \mathcal{K}$. Ezek szerint e' vagy egyenlő e-vel, vagy követi e-t. De ekkor $(J',e')^+ \subset (J,e)^+$, ellentétben $(J,e)^+$ minimális választásával. •

Ezek alapján F lefogja mind (I,e)-t, mind (J,f)-t. Jelölje az (I,e)-t lefogó élt $f_1 = x_1y_1$ és a (J,f)-t lefogó élt $f_2 = x_2y_2$. Legyen $f_1' := x_1y_2$, $f_2' := x_2y_1$ és legyen $F' := F - \{f_1, f_2\} \cup \{f_1', f_2'\}$. Mivel f_1 és f_2 sem fogja le (I,f)-t, a szóbanforgó pontok az alábbi sorrendben követik egymást.

$$b(J) \le x_2 < b(I) \le x_1 \le b(e) < y_1 \le b(f) < y_2 \le j(J) < j(I). \tag{12.1}$$

Ebből rögtön adódik, hogy az f_1' él lefogja az eddig lefogatlan (I,f) párt.

Lemma 3.34 *Ha F lefogott egy (I',f') lényeges párt, akkor F' is lefogja.*

Biz. Ez nyilván így van, ha (I',f')-t az F-nek egy f_1-től és f_2-től különböző tagja fogta le. Az is rögtön látszik, hogy minden f_2 által legfogott párt f_1' és f_2' valamelyike lefogja. Tehát az egyetlen problematikus eset az, amikor (I',f')-t az F-ből egyedül az f_1 él fogja le.

Tegyük fel indirekt, hogy f_1' és f_2' egyike sem fogja le (I',f')-t. Abból hogy f_1' nem fogja le (I',f')-t, következik, hogy $j(I') < y_2$. Abból hogy f_2' nem fogja le (I',f')-t, következik, hogy $b(I') > x_2$. Ezért $e \in I' \subseteq J$, ami ellentmond annak, hogy (J,e) lényeges pár. •

A lemmából kapjuk, hogy F' szigorúan több lényeges párt fog le, mint amennyit F lefogott. Így a fenti átcserélési műveletet legfeljebb annyiszor alkalmazva, mint ahány tagja az input útcsaládnak van, $\mathcal{L}_\mathcal{F}$-nek egy olyan lefogását kapjuk, amelynek elemszáma megegyezik az $\mathcal{I}$ független rész-rendszer elemszámával. • •

2003. május 22. lgyori