Operációkutatási verseny, 3. forduló

1. Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf az $s \neq t$ pontokkal. Bizonyítsuk be, hogy D élei pontosan akkor színezhetők k színnel úgy, hogy minden színosztály tartalmazzon l darab pontdiszjunkt s–t utat, ha a $c(e) = 1$ $\forall e \in A$ $c(v) = k$ $\forall v \in V$ él- és pontkapacitásos hálózatban a minimális vágás értéke legalább k.

2. Adott egy gráf élein egy tetszőleges súlyfüggvény. Adjunk polinomiális algoritmust olyan s–t út keresésére, melynek élein vett legnagyobb súly a lehető legkisebb.

3. Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, két különböző s, t pontja, és egy $g \in \mathbb{R}^A_+$ élkapacitás vektor. Egy x folyam esetén jelölje $m(x)$ az éleken vett folyamértékek minimumát. Bizonyítsunk be egy min-max formulát, melynek egyik oldalán $\max m(x)$ áll, ahol a maximumot a maximális x folyamokon vesszük.

4. Legyen $G = (S, T; E)$ egy páros gráf melyben létezik teljes párosítás. Az élek egy $P \subseteq E$ részhalmazát pirosra színeztük. Bizonyítsuk be, hogy a teljes párosításokban a piros élek minimális száma pontosan

$$\max_{\pi} \sum_{P_i \in \pi} (|S| - \nu(G - P_i)) \ ,$$

ahol a maximumot a P halmaz $\pi = \{P_1, \cdots, P_k\}$ partícióira vesszük, $G - P_i$ a P_i élek törlésével kapott gráfot jelöli, és $\nu(G - P_i)$ ebben a gráfban a maximális párosítás elemszámát jelöli.

Beadási határidő: 2006. november 17., az előadáson