Operációkutatási verseny, 4. forduló

1. Adottak a $w \in \mathbb{R}^n$ és az $y_1, \ldots, y_m \in \{-1, 0, 1\}^n$ vektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < y_{i+1}w \leq \frac{1}{2}y_i w$ minden i-re, akkor $m \leq n \log n$.

2. Legyen b egy vektor, A pedig egy olyan mátrix, amelynek minden eleme nemnegatív. Tegyük fel, hogy rendelkezünk egy olyan algoritmussal, amely tetszőleges $c \geq 0$ célfüggvényre megoldja az $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $\max cx$ feladatot. Szerkesszünk ebből egy olyan algoritmust, amely ugyanezt a feladatot tetszőleges c célfüggvény mellett megoldja.

3. Legyen $\mathcal{P}$ azon $\{x : Mx \leq 1, x \geq 0\}$ alakú poliéderek halmaza, amelyekre M elemei nemnegatívak és minden oszlopban van pozitív elem. $P \in \mathcal{P}$ esetén legyen $A(P) = \{y : y \geq 0, yx \leq 1\ \forall x \in P\}$. Igazoljuk, hogy ha $P \in \mathcal{P}$, akkor 1, $A(P) \in \mathcal{P}$, és 2, $P = A(A(P))$.

4. Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf egy $g : A \to \mathbb{R}_+$ élkapacitással, terminális párok egy $\{s_i, t_i\} \subseteq V$ $(i \in I)$ halmaza, valamint egy $d_i \in \mathbb{R}_+$ igény minden $s_i t_i$ terminálpárhoz. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik olyan (tört) többtermékes folyam D-ben, amely kielégíti a kapacitásokat és minden $s_i t_i$ terminálpárra d_i mennyiségű folyamot szállít, ha minden $l : A \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvényre teljesül, hogy

$$\sum_{i \in I} d_i \cdot dist_l(s_i, t_i) \leq lg.$$

5. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy algoritmus, amely kiszámolja egy lineáris program egy optimális bázismegoldását, ha ilyen létezik. Ennek segítségével adjunk hatékony módszert annak eldöntésére, hogy adott lineáris programnak egyértelmű-e az optimális megoldása. Továbbá, ha egyértelmű a megoldás, akkor találjunk egy olyan bázismegoldást, amely célfüggvényértéke a második legjobb.

6. Igazoljuk, hogy egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő irányított gráfban azon új, meglévővel párhuzamosan behúzott irányított élek minimális száma, amelyek hozzáadásával Euler-gráfot kapunk

$$\max \sum \{\delta(V_i) - \varrho(V_i) : 1 \leq i \leq q\},$$

ahol a maximum olyan $V \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_q$ láncon fut, amelynek tagjaira $\delta(V_i) - \varrho(V_i) \geq 0$, és amelyek közül semely kettőbe nem lép be D ugyanazon éle.

Beadási határidő: 2006. december 15., az előadáson