*Lineáris leképezés*: művelettartó $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ leképezés, ahol $V_1$ és $V_2$ vektorterek ugyanazon $T$ test felett. Művelettartás: $\mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathcal{A}\mathbf{u} + \mathcal{A}\mathbf{v}$ és $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{u})$ minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1$, $\lambda \in T$-re. Következmény: $\mathcal{A}\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$ és $\mathcal{A}(-\mathbf{u}) = -\mathcal{A}\mathbf{u}$. Ha $V_1 = V_2$, akkor $\mathcal{A}$ neve lineáris *transzformáció*.

*Kép- és magtér*: Képtér=Im$\mathcal{A}$ a képelemek összessége, ez altér $V_2$-ben. Magtér=Ker$\mathcal{A}$ a $\mathbf{0}_2$-be képződő elemek, ez altér $V_1$-ben. Dimenziótétel: $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim V_1$.

*Vektortér-izomorfizmus*: bijektív lineáris leképezés. Egy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés akkor és csak akkor izomorfizmus, ha Im$\mathcal{A} = V_2$ és Ker$\mathcal{A} = \mathbf{0}_1$. Két vektortér izomorf, ha van közöttük izomorfizmus, ez pontosan akkor igaz, ha a dimenzióik megegyeznek. Így minden $n$-dimenziós vektortér izomorf $T^n$-nel.

*Előírhatósági tétel*: Legyen $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ bázis $V_1$-ben és $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ tetszőleges elemek $V_2$-ben. Ekkor pontosan egy olyan $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés létezik, amelyre $\mathcal{A}\mathbf{a}_i = \mathbf{c}_i$, $1 \le i \le n$. Tehát a báziselemek képei szabadon megválaszthatók, és ezek egyértelműen meghatározzák minden elem képét.

*Lineáris leképezés mátrixa*: Legyen $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ bázis $V_1$-ben és $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ bázis $V_2$-ben. Ekkor az $\mathcal{A}$ leképezés mátrixa ebben a bázispárban az a $k$ sorból és $n$ oszlopból álló $[\mathcal{A}]_{A,B}$ mátrix, ahol $\alpha_{ij}$ az $\mathcal{A}\mathbf{a}_j$ vektor $i$-edik koordinátája. Tehát a mátrix oszlopai a $V_1$-beli bázisvektorok *képei* a $V_2$-beli bázisvektorok szerinti felírásban. Egy leképezés mátrixa függ attól, melyik bázispárt rögzítettük. Ha $V_1 = V_2$, akkor ugyanazt a bázist használjuk mindkétszer.

*Műveletek lineáris leképezésekkel*: Leképezések összeadása és skalárszorosa a szokásos függvényműveletek: Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V_1 \to V_2$, akkor $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathbf{u} = \mathcal{A}\mathbf{u} + \mathcal{B}\mathbf{u}$ és $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{u})$. Az így definiált leképezések lineárisak és az összes $V_1 \to V_2$ leképezés egy $\operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ vektorteret alkot $T$ felett. Leképezések szorzása a kompozíció: Ha $\mathcal{B} : V_1 \to V_2$ és $\mathcal{A} : V_2 \to V_3$, akkor $\mathcal{AB} : V_1 \to V_3$ definíciója $(\mathcal{AB})\mathbf{u} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{u})$. Ez is lineáris leképezés, és ha $V_1 = V_2 = V$, akkor $\operatorname{Hom}(V, V)$, röviden $\operatorname{Hom} V$ gyűrű is az összeadásra és a szorzásra.

*Algebra*: $H$ algebra, ha $H$-n értelmezve van egy összeadás, egy szorzás és egy $T$ test elemeivel való szorzás, és $H$ gyűrű az első két műveletre, vektortér az első és harmadik műveletre, továbbá teljesül a $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ azonosság minden $a, b \in H$, $\lambda \in T$-re. Pl. $\mathbf{C}$ algebra $\mathbf{R}$ felett, $T[x]$, $T^{n\times n}$ és $\operatorname{Hom} V$ algebrák $T$ felett.

*Műveletek és mátrixok*: Rögzített bázispárnál a $V_1 \to V_2$ leképezések és a $k \times n$-es mátrixok között a megfeleltetés bijektív és tartja az összeadást és a skalárszorost, tehát $\operatorname{Hom}(V_1, V_2) \cong T^{k\times n}$, ahol $k = \dim V_2, n = \dim V_1$. A szorzásra is fennáll a művelettartás, így $\operatorname{Hom} V$ és $T^{n\times n}$ izomorf algebrák.

(F=lin. független, G=generátorrendszer, $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lin. leképezés, $\mathbf{c}_i \in V_1$.)

**83.** Döntsük el, lineárisak-e az alábbi leképezések (az értelemszerűen adódó vektorterek között). A lineárisaknak adjuk meg a kép- és magterét, és számítsuk ki ezek dimenzióját is, valamint írjuk fel a mátrixukat alkalmasan választott bázisban.

(a) A legfeljebb harmadfokú valós eh-s polinomokhoz hozzárendeljük (a1) a deriváltjukat; (a2) az együtthatók összegét; (a3) az együtthatók szorzatát.

(b) A $2 \times 2$-es valós mátrixokhoz hozzárendeljük (b1) a négyzetüket; (b2) a transzponáltjukkal vett összegüket; (b3) a determinánsukat.

(c) A komplex számokhoz mint a valós test feletti vektortér elemeihez hozzárendeljük (c1) az abszolút értéküket; (c2) a konjugáltjukat. Hogyan változik a helyzet, ha a komplex számokat a komplex test feletti vektortérként tekintjük?

(d) A síkon (d1) eltolás; (d2) az origó körüli $\alpha$ szögű elforgatás; (d3) az $x + y = 0$ egyenesre történő merőleges vetítés; (d4) az $x + y = 1$ egyenesre történő merőleges vetítés.

**84.** Az alábbi $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ leképezések közül melyek lineárisak? A lineárisaknak adjuk meg a kép- és magterét, és számítsuk ki ezek dimenzióját is.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ képe} \quad \text{(a)} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_3\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**85.** Igaz vagy hamis?
(a) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = V_1 \Longrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbf{0}$. (b) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbf{0} \Longrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V_2$.
(c) $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V_2 \Longrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbf{0}$. (d) $V_1 = V_2 = V$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbf{0} \Longrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V$.
(e) $V_1 = V_2 = V$, $\dim V < \infty$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbf{0} \Longrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V$.

**86.** Igaz vagy hamis?
(a) $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ F $\Longrightarrow \mathcal{A}\mathbf{c}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{c}_k$ is F.
(b) $\mathcal{A}\mathbf{c}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{c}_k$ F $\Longrightarrow \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ is F.
(c) $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ G $V_1$-ben $\Longrightarrow \mathcal{A}\mathbf{c}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{c}_k$ G $V_2$-ben.
(d) $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ G $V_1$-ben $\Longrightarrow \mathcal{A}\mathbf{c}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{c}_k$ G $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban.
(e) $\mathcal{A}\mathbf{c}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{c}_k$ G $\operatorname{Im}\mathcal{A}$-ban $\Longrightarrow \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ G $V_1$-ben.

**87.** Legyen $V_1$, ill. $V_2$ egy-egy bázisa $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, ill. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$. Hogyan változik $\mathcal{A}$ mátrixa, ha
(a1) $\mathbf{a}_1$-et és $\mathbf{a}_2$-t felcseréljük; (a2) $\mathbf{b}_1$-et és $\mathbf{b}_2$-t felcseréljük;
(b1) $\mathbf{a}_3$ helyett $\lambda\mathbf{a}_3$-at veszünk; (b2) $\mathbf{b}_3$ helyett $\lambda\mathbf{b}_3$-at veszünk;
(c1) $\mathbf{a}_3$ helyett $\mathbf{a}_3 + \mu\mathbf{a}_2$-t veszünk; (c2) $\mathbf{b}_3$ helyett $\mathbf{b}_3 + \mu\mathbf{b}_2$-t veszünk?

**88.** Tegyük fel, hogy a $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ F vektorokra $\mathcal{A}\mathbf{c}_1 = \ldots = \mathcal{A}\mathbf{c}_k$. Bizonyítsuk be, hogy $\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} \geq k - 1$.

**89.** Legyen $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ rendre az $x$-, ill. $y$-tengelyre való merőleges vetítés, az $y = -x$ egyenesre való tükrözés, valamint az origó körüli $\alpha$ szögű elforgatás. Mi lesz
(a) $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$; (b) $\mathcal{X}\mathcal{Y}$; (c) $\mathcal{F}^{2020}$; (d) $\mathcal{T}^{2020}$; (e) $\mathcal{F}\mathcal{T}$; (f) $\mathcal{T}\mathcal{F}$?

**90.** Lássuk be: $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{O} \iff \operatorname{Ker}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{B}$.

**91.** Legyen $\dim V < \infty$ és $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom} V$. Ekkor $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \iff \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 = \operatorname{Im}\mathcal{A}$.

**92.** Igazoljuk, hogy tetszőleges lineáris transzformációhoz van a vektortérnek olyan bázisa, melyben fölírva a transzformáció mátrixát, az az alábbi két típus egyikébe tartozik:

$$\begin{pmatrix} \lambda & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & * & \ldots & * \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & * & \ldots & * \\ 1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & * & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

**93.** Mutassuk meg, hogy ha $V_1 \neq V_2$, akkor bármely $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés esetén van $V_1$-nek és $V_2$-nek egy-egy olyan $A$, ill. $B$ bázisa, melyekben fölírva az $[\mathcal{A}]_{A,B}$ mátrixot, annak bal fölső sarkában egy $r \times r$-es egységmátrixot kapunk, a mátrix többi eleme pedig 0. — Mi lesz az $r$ jelentése? (A két tér különböző, így a bázisok is különböznek egymástól!)

**94.** Milyen $n$-ekre van olyan $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineáris transzformáció, melyre $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{A}$?

**95.** Az alábbi, $\mathbf{R}$ feletti vektorterek között keressük meg az izomorfakat (a műveletek a szokásosak, az (a)–(d) résznél $\mathbf{R}[x]$ altereiről van szó).
(a) $f$ foka $\leq 100$, $x^{46} + 1 \mid f$, $2x^{46} + 1 \mid f$.
(b) $f$ foka $\leq 100$, $x^{46} + x \mid f$, $2x^{46} + x \mid f$.
(c) $f$ foka $\leq 100$, $f$-nek $x^{92} + \pi$-vel való osztási maradéka legfeljebb elsőfokú.
(d) $f$ foka $\leq 19$, $f$ (valós függvényként) páros.
(e) Azok a valós sorozatok, ahol bármely tíz szomszédos elem összege ugyanannyi.
(f) Azok a valós sorozatok, ahol bármely tíz szomszédos elem összege 0.

**96.** Egy vektortérben összesen 2020 olyan altér található, amelyek közül semelyik kettő sem izomorf. Hány dimenziós a vektortér?