Csoport: halmaz asszociatív, egységelemes művelettel, és minden elemnek van inverze.

H részcsoport a G csoportban, ha $H \subseteq G$ és H csoport a G-beli művelet megszorítására. Jelölés: $H \leq G$. Ha $\emptyset \neq H \subseteq G$, akkor $H \leq G \iff (a, b \in H \Rightarrow ab \in H, a^{-1} \in H) \iff (a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H)$.

D_n a szabályos n-szög egybevágóságai, S_n egy n elemű halmaz bijekciói a kompozícióra.

1. Mondjunk példát 100 elemű kommutatív és 100 elemű nemkommutatív csoportra.

2. Csoportot alkotnak-e
(a) a valós számok, ha $a \circ b =$ (a1) $(a+b)/2$; (a2) b; (a3) $a+b+3$; (a4) ab;
(b) a komplex számok alábbi részhalmazai a szorzásra: (b1) $|z| \geq 1$; (b2) egységgyökök; (b3) 100-ik egységgyökök; (b4) 100-ik primitív egységgyökök;
(c) a kompozícióra a sík (c1) eltolásai; (c2) forgatásai; (c3) forgatásai és eltolásai;
(d) a maradékok szokásos szorzására (d1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mod 7; (d2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mod 8; (d3) $\{2, 4\}$ mod 6; (d4) $\{1, 2, 4\}$ mod 7.
(e) azok a 2×2-es valós mátrixok a szorzásra, amelyek (e1) diagonálisak és a diagonális elemei pozitívak; (e2) minden eleme pozitív; (e3) csak a bal felső elem nem nulla?
A fentiek közül melyek a nemkommutatív csoportok?

3. Hány elemű (a síkon) a négyzet, a rombusz, a téglalap, a paralelogramma, a deltoid, a szimmetrikus trapéz, a kör, illetve (a térben) a szabályos tetraéder szimmetriacsoportja (azaz az egybevágóságaik csoportja a kompozíció műveletére)?

4. Igazoljuk, hogy $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

5. (a) Bizonyítsuk be: G kommutatív $\iff$ minden a, $b \in G$-re $(ab)^2 = a^2b^2$.
(b) Van-e olyan nemkommutatív G, amelyben minden a, $b \in G$-re $(ab)^4 = a^4b^4$?

6. Lássuk be, hogy egy részcsoport egységeleme mindig azonos a csoport egységelemével.

7. Keressük meg (a) $\mathbf{Z}$; (b) $\mathbf{Z}_{12}$; (c) D_6 összes részcsoportját.

8. Igaz vagy hamis? G csoport, $\emptyset \neq H \subseteq G$
(a) Ha H zárt a G-beli műveletre, akkor $H \leq G$.
(b) Ha $|H| < \infty$ és H zárt a G-beli műveletre, akkor $H \leq G$.
(c) Ha $|H| < \infty$ és H zárt a G-beli inverzképzésre, akkor $H \leq G$.

9. $\mathbf{Z}_n$ miért nem tekinthető a $\mathbf{Z}$ részcsoportjának (a művelet az összeadás)?

10. Két csoport izomorf, ha létezik közöttük művelettartó bijekció, azaz tulajdonképpen ugyanarról a csoportról van szó, csak másképp jelöljük az elemeket és a műveletet. Pl. $\mathbf{Z}_4$ (az összeadásra) izomorf a $\pm 1, \pm i$ komplex számok szorzási csoportjával.
Igazoljuk, hogy ($n \geq 3$-ra) S_n-nek van (a) D_n-nel; (b) S_{n-1}-gyel izomorf részcsoportja.

A gyakorlatra vonatkozó minden információ, feladatlap, házi feladat, konzultációs időpont stb. megtalálható a `http://freud.web.elte.hu/bboard/asztan3-20osz/gyak.html` honlapon, hetenkénti frissítéssel. Kérem, hogy a kurzusról figyelmesen olvassák el Halasi tanár úr részletes tájékoztatóját. A gyakorlaton szerezhető 30 pontból 20 a Canvasra hetente feltöltendő házi feladatokból érhető el, a többi 10 pedig órai szerepléssel (feladatelmondással, jó észrevétellel, folyamatos aktív közreműködéssel).