$\dim V = n$; $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \to V$ lin. transzformációk, mátrixuk $[\mathcal{A}]$, $[\mathcal{B}]$; $\mathbf{u} \in V$.

Rang. Egy A mátrix $r(A)$ rangja az oszlopvektorai között a függetlenek maximális száma. Ez megegyezik a sorai között a függetlenek maximális számával. A Gauss-kiküszöbölés során a rang nem változik (akár oszlopokkal, akár sorokkal, akár vegyesen végezzük a kiküszöbölést), és ennek alapján a rang megkapható mint a (redukált) lépcsős alakban a vezéregyesek száma. Általában egy vektorrendszer rangja a vektorok között a függetlenek maximális száma, és ez éppen a vektorok által generált altér dimenziója. Ennek alapján egy lineáris leképezés mátrixának a rangja a báziselemek képei által generált altér, vagyis a képtér dimenziója.

Négyzetes mátrixok tulajdonságai: Egy $n \times n$-es, test feletti A mátrixra az alábbi ekvivalenciák teljesülnek:

$$\det A \neq 0 \iff r(A) = n \iff \exists\, A^{-1} \iff A \text{ nem nullosztó} \iff$$
$$\iff A \text{ sorai függetlenek} \iff A \text{ oszlopai függetlenek.}$$

Ha $A = [\mathcal{A}]$, akkor mindezzel tovább ekvivalens:

$$\exists\, \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A} \text{ nem nullosztó} \iff \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\} \iff \operatorname{Im} \mathcal{A} = V.$$

Ugyanezek a komplementer feltételekkel megfogalmazva:

$$\det A = 0 \iff r(A) < n \iff \nexists\, A^{-1} \iff A \text{ nullosztó vagy } 0 \iff$$
$$\iff A \text{ sorai összefüggők} \iff A \text{ oszlopai összefüggők} \iff$$
$$\iff \nexists\, \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A} \text{ nullosztó vagy } 0 \iff \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{\mathbf{0}\} \iff \operatorname{Im} \mathcal{A} \neq V.$$

Sajátérték, sajátvektor. Az $\mathcal{A}$-nak $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *sajátvektor*a, ha van olyan $\lambda \in T$, amelyre $\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$; és $\lambda \in T$ *sajátérték*e, ha van olyan $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, amelyre $\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Az azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a nullvektor alteret alkotnak V-ben, ez az adott sajátértékhez tartozó *sajátaltér*. Mindez elmondható transzformációk helyett mátrixokra is. Egy transzformáció mátrixa pontosan akkor diagonális, ha mindegyik bázisvektor sajátvektor.

Karakterisztikus polinom: $k_{\mathcal{A}}(x) = \det[\mathcal{A} - x\mathcal{I}]$, tehát a transzformáció (bármely bázis szerinti) mátrixának főátlójából levonunk x-et és képezzük az így kapott mátrix determinánsát. Ez az n-edfokú polinom nem függ attól, hogy a transzformáció mátrixát melyik bázis szerint írtuk fel. A sajátértékek pontosan a karakterisztikus polinom gyökei. Egy adott λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig az $([\mathcal{A}] - \lambda I)[\mathbf{u}] = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásai.

97. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

98. Legyenek $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ és $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tetszőleges valós számok. Mennyi annak a két $k \times n$-es mátrixnak a rangja, amelyben az i-edik sor j-edik eleme (a) $\gamma_i\delta_j$; (b) $\gamma_i + \delta_j$?

99. Számítsuk ki egy olyan mátrix rangját, amelynek minden sora (a) számtani sorozat; (b) különböző (és nemnulla) hányadosú mértani sorozat.

100. Lássuk be: (a) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$; (b) $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$.

101. Határozzuk meg a síkon (a) az identitás; (b) az origóra tükrözés; egy origón átmenő egyenesre (c) tükrözés; (d) valamilyen irányú (nem feltétlenül merőleges) vetítés; (e) az origó körüli 90 fokos elforgatás sajátértékeit, sajátvektorait és karakterisztikus polinomját. Melyeknek létezik diagonális mátrixa?

102. Hogyan olvasható le a karakterisztikus polinomról, hogy a transzformáció/mátrix invertálható-e?

103. Igaz vagy hamis?
(a) Ha $\mathbf{u}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, akkor $\mathbf{u}$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek.
(b) Ha $\mathbf{u}$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{u}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.
(c) Ha $\mathbf{u}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek, akkor $\mathbf{u}$ sajátvektora $\mathcal{A}+\mathcal{B}$-nek is.
(d) Ha λ sajátértéke $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek, akkor λ sajátértéke $\mathcal{A}+\mathcal{B}$-nek is.

104. Mikor lesz két sajátvektor összege is sajátvektor?

105. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait. Melyek diagonalizálhatók?

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(d)}\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mennyiben változik a helyzet, ha ezeket komplex elemű mátrixoknak tekintjük?

106. Létezik-e a (a) síkon; (b) téren olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora?

107. (a) Egy ($n \times n$-es) mátrix karakterisztikus polinomjában hogyan kapjuk meg az $n-1$-edfokú tag együtthatóját, illetve a konstans tagot?
(b) Tegyük fel, hogy a mátrixnak n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy ezek összege a mátrix nyoma (a főátlóbeli elemeinek az összege), a szorzatuk pedig a mátrix determinánsa.

108. Egy $\mathcal{P} \in \operatorname{Hom} V$ lineáris transzformáció *projekció* (vagy *vetítés*), ha $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.
(a) Mik egy projekció sajátértékei és mik a hozzájuk tartozó sajátalterek?
(b) Mutassuk meg, hogy minden projekciónak van diagonális mátrixa.
(c) Lássuk be, hogy ha $\mathcal{P}$ projekció, $\mu \ne 0, -1$, akkor $\mathcal{P} + \mu\mathcal{I}$-nek létezik inverze.

109. $\mathcal{A}$ mátrixának minden eleme 1. Bizonyítsuk be, hogy van olyan bázis, amely szerint $\mathcal{A}$ mátrixában a bal felső sarokban n áll, az összes többi elem pedig 0.