97. Gauss-kiküzöbölés.

98. Gauss-kiküszöböléssel kapjuk, hogy mindkét rang meglehetősen kicsi. (A rangok nem teljesen egyértelműek.)

99. (a)-nak kicsi a rangja, (b)-nek nagy.

100. **(a)** A rang az oszlopvektorok által generált altér dimenziója. Az összegmátrix oszlopai által generált altér része a két tag oszlopai által együttesen generált altérnek. — **(b)** Mátrixok helyett nézzük a megfelelő lineáris leképezéseket, ekkor a rang a képtér dimenziója.

101. Geometriailag közvetlenül meghatározhatók a sajátértékek és sajátvektorok, ebből adódik, hogy mikor létezik diagonális mátrix és a legtöbb esetben a karakterisztikus polinom is; vagy fordítva, a transzformációk mátrixából kiszámítható a karakterisztikus polinom, és ebből megkaphatjuk a sajátértékeket és sajátvektorokat, valamint, hogy mikor diagonalizálható a mátrix.

102. Az invertálhatóság leolvasható a magtérből, az utóbbi pedig egy sajátértékhez kapcsolódik.

103. Igaz: (a), (c).

104. A feltétel a két sajátérték kapcsolatával adható meg. Vizsgáljunk két esetet aszerint, hogy a két adott sajátvektor független vagy összefüggő.

105. Csak (e)-nél van változás a komplex felett.

106. Ahol negatív választ sejtünk, ott gondoljunk arra, hogy sajátvektor és sajátérték együtt fordulnak elő.

107. **(a)** Használjuk a determináns definícióját. — **(b)** A karakterisztikus polinom nem függ attól, milyen bázisban írjuk fel a mátrixot; keressünk ennek alapján olyan bázist, amely szerinti mátrix szép, és használjuk fel az (a) részt.

108. **(a)** Használjuk a sajátérték és sajátvektor definícióját. — **(b)** Lássuk be, hogy a sajátalterek (bármely) bázisainak egyesítése bázis lesz V-ben. — **(c)** Dolgozhatunk akár a magtérrel, akár a képtérrel, akár a mátrixszal, sőt egy kis ügyeskedéssel képletszerűen is megkaphatjuk az inverzet.

109. Keressünk sajátvektorokból álló bázist.