A feladatsor prímszámokhoz kapcsolódó vegyes feladatokat tartalmaz, ezek egy része középiskolában is tárgyalható. Lehetnek köztük olyanok, amelyek már korábbi félévekben is szerepeltek, de talán akkor sem árt az ismétlés. Sok közülük semmilyen előismeretet sem igényel, máshol meg segíthetnek prímszámokra vagy kongruenciákra vonatkozó nevezetes tételek. (Prímszám a szokásos szóhasználat szerint pozitív felbonthatatlan egészt jelent.)

81. Adjuk meg az öszes olyan p prímszámot, amelyre
(a) $p+4$ és $p+14$; (b) p^2-14 és p^2+4; (c) p^3-6 és p^3+6; (d) $(p-2)!-1$
is prímszámok.

82. Adjuk meg az összes olyan $n>0$ egészt, amelyre prímszám
(a) n^3-n+3; (b) n^3-27; (c) $n^7+6n-133$; (d) n^4+4; (e) $\binom{n}{n-2}$.

83. Több, mint 200 éve megoldatlan a Goldbach-sejtés, mely szerint minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként. Ezzel kapcsolatosak az alábbi jóval könnyebb variációk.

(a) Mely számok írhatók fel két pozitív összetett szám összegeként? És két pozitív páratlan összetett szám összegeként?

(b) Mely számok írhatók fel egy prímszám és egy pozitív összetett szám összegeként? És úgy, hogy mindkét összeadandó páratlan?

(c) A $\pi(x)$-re adott alsó becslést felhasználva lássuk be, hogy van olyan szám, ami legalább 100000-féleképpen írható fel két prímszám összegeként.

84. Van-e olyan nem konstans egész együtthatós (egyváltozós) polinom, amelynek a helyettesítési értéke prímszám (a) minden egész helyen; (b) az $1, 2, 3, \ldots, 2020$ helyek mindegyikén?

85. Mi a titka a következő bűvészmutatványnak? Megkérünk valakit, hogy válasszon legalább 3 és legfeljebb 10 kétjegyű prímszámot, adja össze a négyzetüket (számológépet is használhat), és mondja meg a végeredményt. Pár másodperc múlva megmondjuk, hány prímszámot választott.

86. Mely p prímszámok esetén lesz $(2^{p-1}-1)/p$ négyzetszám?

87. A 2^k+1 alakú prímeket Fermat-prímeknek nevezzük. Ezek a szabályos sokszögek szerkeszthetőségénél játszanak szerepet. Jelenleg 5 Fermat-prímet ismerünk (3, 5, 17, 257, 65537), és megoldatlan, hogy van-e több.

(a) Igazoljuk, hogy ha 2^k+1 prím, akkor $k=2^n$ (ahol $n \geq 0$ egész).

(b) Legyen $F_n = 2^{2^n}+1$. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 1$-re $F_n = F_0F_1\ldots F_{n-1}+2$.

(c) Mutassuk meg, hogy az F_n Fermat-számok páronként relatív prímek.

(d) Lássuk be, hogy $n \geq 1$-re F_n pontosan akkor prím, ha $3^{(F_n-1)/2} \equiv -1 \pmod{F_n}$. (Ez gyors algoritmus, hiszen kb. $\log_2 F_n$ négyzetre emelést és mod F_n redukciót igényel, ami nagyjából annyi lépés, ahány bináris számjegye van F_n-nek, tehát ahány bittel be tudjuk vinni a számítógépbe. Mi lehet akkor az oka, hogy pl. F_{33}-ról sem tudjuk, hogy prím vagy összetett?)

88. Jellemezzük azokat az n pozitív egészeket, amelyekre n és $n+1$ is prímszám vagy prímhatvány.

89. Lehet-e $n > 1$-re $n!$ teljes hatvány (azaz egy egész szám 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa)?

90. Lehet-e egymást követő pozitív egészek reciprokösszege egész szám (kivéve az egytagú $1/1$ összeget, a tagok száma akármilyen nagy is lehet)?

91. Írjuk le a prímszámokat sorban a tizedesvessző után: $0{,}2357111317\ldots$ Lássuk be, hogy így irracionális számot kapunk.

92. A prímszámtétel segítségével igazoljuk, hogy minden elég nagy n-re n és $1{,}001n$ közé esik prímszám.

93. Mutassuk meg, hogy végtelen sok prímszám (a) utolsó három; (b) első három számjegye 641. Igazoljuk ugyanezt prímszámok helyett négyzetszámokra is.