Mat. tanár **3. gyakorlat, 2020/09/17–22** ASZ5, 2020 ősz

*Gauss-egészek*

Összefoglaló: Gauss-egészek azok az $\alpha = a + bi$ komplex számok, ahol $a, b \in \mathbf{Z}$. Ezek egy kommutatív, egységelemes, nullosztómentes $G$ gyűrűt alkotnak, amelyek számelméletét annak a(z egész számokra vonatkozó!) kérdésnek a megválaszolására építjük ki, hogy mely pozitív egészek írhatók fel két négyzetszám összegeként. Az oszthatóságot, egységet, felbonthatatlant, prímet ugyanúgy definiáljuk, ahogy az egészeknél és a polinomoknál, a legnagyobb közös osztót pedig mint olyan közös osztót, ami az összes közös osztónak többszöröse.

Az $\alpha = a + bi$ Gauss-egész normája $N(\alpha) = a^2 + b^2 = \alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|^2$. Fontos kapocs $G$ és $\mathbf{Z}$ számelmélete között a $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ azonosság, amiből $\alpha \mid \gamma \Rightarrow N(\alpha) \mid N(\gamma)$ (a megfordítás nem igaz!).

Egységek: $\epsilon$ egység $\iff$ $N(\epsilon) = 1$ $\iff$ $\epsilon = \pm 1, \pm i$.

Az egészekhez és a test feletti polinomokhoz hasonlóan a Gauss-egészeknél is van maradékos osztás, és ebből a számelmélet alaptételének az egyértelműségi része a már többször látott módon következik: az euklideszi algoritmus biztosítja az lnko létezését, ebből kapjuk, hogy a prímek és a felbonthatatlanok a Gauss-egészek körében is egybeesnek, és innen jön az egyértelműség (a felbonthatóság pedig a norma segítségével könnyen adódik). Maradékos osztás: Minden $\beta \neq 0$ és $\alpha$ Gauss-egészhez létezik olyan $\gamma$ és $\delta$ Gauss-egész, amelyekre $\alpha = \gamma\beta + \delta$ és $N(\delta) < N(\beta)$.

**20.** Mely Gauss-egészek oszthatók $1 + i$-vel?

**21.** Lássuk be: (a) $\alpha \mid \gamma \iff \overline{\alpha} \mid \overline{\gamma}$; (b) $(\alpha, \beta) = \delta \iff (\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \overline{\delta}$.

**22.** Igazoljuk mind a felbonthatatlan, mind a prím definíciója alapján, hogy $\alpha$ Gauss-prím $\iff$ $\overline{\alpha}$ Gauss-prím.

**23.** Melyik Gauss-egész van a $\frac{7}{5} + \frac{8}{5}i$ komplex számhoz a legközelebb?

**24.** (a) Az $5 + 4i$ Gauss-egészt $3 + 2i$-vel maradékosan elosztva hányféle lehet a hányados és a maradék.
(b) Általában hányféle lehet a hányados és a maradék? Minden esetre mutassunk is példát.

**25.** Számítsuk ki a legnagyobb közös osztókat: (a) $(5 + 3i, -2 + 9i)$; (b) $(-1 + 5i, -1 + 7i)$.

**26.** Mennyi az $1234567 + 891011i$ Gauss-egész összes osztójának az összege?

**27.** Mely Gauss-egészek oszthatók a konjugáltjukkal?

**28.** Igaz vagy hamis? $(\alpha = a + bi)$

(a1) $\big(N(\alpha)\,,\, N(\beta)\big) = 1 \Rightarrow \big(\alpha\,,\,\beta\big) = 1$. (a2) $\big(\alpha\,,\,\beta\big) = 1 \Rightarrow \big(N(\alpha)\,,\, N(\beta)\big) = 1$.
(b1) $\big(\alpha\,,\,\overline{\alpha}\big) = 1 \Rightarrow \big(a\,,\,b\big) = 1$. (b2) $\big(a\,,\,b\big) = 1 \Rightarrow \big(\alpha\,,\,\overline{\alpha}\big) = 1$.
(c1) Ha $n \equiv 3 \pmod 4$, akkor az $n$ nem normája egyetlen Gauss-egésznek sem.
(c2) Ha $n$ nem normája egyetlen Gauss-egésznek sem, akkor $n \equiv 3 \pmod 4$.
(d1) Ha $N(\alpha)$ prímszám, akkor $\alpha$ Gauss-prím.
(d2) Ha $\alpha$ Gauss-prím, akkor $N(\alpha)$ prímszám.
(e1) Ha $\alpha$ egy Gauss-egész köbe, akkor $N(\alpha)$ egy egész szám köbe.
(e2) $N(\alpha)$ egy egész szám köbe, akkor $\alpha$ egy Gauss-egész köbe.
(f) Ha egy egész szám osztója egy másik egész számnak a Gauss-egészek körében, akkor az oszthatóság teljesül az egész számok körében is.