Gauss-prímek, diofantikus egyenletek

Összefoglaló: Az összes Gauss-prímet a pozitív prímszámok felbontásából kapjuk: (i) a 2-ből adódnak $1+i$ egységszeresei; (ii) a $4k-1$ alakú prímszámok egységszeresei Gauss-prímek; (iii) a $4k+1$ alakú prímszámok két konjugált Gauss-prím szorzatára bomlanak, amelyek nem egymás egységszeresei.

Két-négyzetszám-tétel: Az $n>0$ egész pontosan akkor írható fel két négyzetszám összegeként, ha a kanonikus alakjában minden $4k-1$ alakú prímszám kitevője páros. Ekkor a felírások száma $4\prod(\alpha_j+1)$, ahol $\alpha_1,\ldots$ a $4k+1$ alakú prímek kitevői az n kanonikus alakjában. A csak sorrendben vagy előjelben eltérő megoldásokat is külön megoldásként számoljuk.

Pitagoraszi számhármasok: Az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet összes pozitív egész megoldása $x=2mnd, y=d(m^2-n^2), z=d(m^2+n^2)$, ahol $m>n>0$, $(m,n)=1$, m és n különböző paritású és $d>0$ tetszőleges. Az x és y szerepe felcserélhető.

29. Oldjuk meg újra a 7., 20. és 25. feladatot, valamint adjunk egy harmadik bizonyítást a 22. feladat állítására.

30. Hány osztója van az 1800-nak a Gauss-egészek körében?

31. Bontsuk fel Gauss-prímek szorzatára: (a) $90-1230i$; (b) $2700+1100i$.

32. Hány lényegesen különböző módon áll elő egy adott pozitív egész két négyzetszám összegeként, tehát amikor eltekintünk a tagok sorrendjétől és a négyzetre emelt számok előjelétől?

***33.** Átlagosan hányféleképpen írható fel egy pozitív egész két egész szám négyzetének az összegeként? Ezen a következőt értjük: Legyen r_n az $x^2+y^2=n$ diofantikus egyenlet megoldásszáma. Létezik-e és mennyi az $(r_1+r_2+\ldots+r_n)/n$ függvény határértéke, ha $n\to\infty$?

34. Lássuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, akkor az oldalhosszak szorzata osztható 60-nal.

35. Határozzuk meg az összes olyan egész oldalú derékszögű háromszöget, amelynél a kerület és a terület mérőszáma megegyezik.

36. Mely pozitív egészek írhatók fel és hányféleképpen két négyzetszám különbségeként?

37. Egy háziasszony egy tepsi süteményt úgy akar (egyforma téglalap alakú darabokra) felvágni, hogy ugyanannyi „égett”, azaz a tepsi falával legalább egy oldalon érintkező, mint „nem égett”, azaz a tepsi falával nem érintkező szelet keletkezzen. Hogyan végezze a szeletelést?

38. Oldjuk meg $\mathbf{Z}$-ben: $3x^2+y^2=2z^2$.

39. Bizonyítsuk be, hogy 6 egymást követő természetes szám nem osztható két (diszjunkt) csoportra úgy, hogy az egyik csoport elemeinek a szorzata megegyezzék a másik csoport elemeinek a szorzatával. Igazoljuk ugyanezt az állítást 6 helyett 106-ra is.