Részgyűrű: Egy (tetszőleges) R gyűrűben egy olyan $S \neq \emptyset$ részhalmaz, amely gyűrű az R-beli műveletekre. Mivel a műveleti azonosságok automatikusan teljesülnek és S-ben a nullelem és egy elem ellentettje csak az R-beli nullelem, illetve ellentett lehet, ezért S akkor és csak akkor részgyűrű, ha zárt az R-beli összeadásra, ellentettképzésre és szorzásra. Az összeadásra és ellentettképzésre vonatkozó zártság helyettesíthető azzal, hogy S zárt a kivonásra.

Ideálok számelméleti vonatkozásai: Egy kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűben $(a) \subseteq (b) \iff b \mid a$, $(a) = (b) \iff a$ egységszerese b-nek, $(a, b) = (d) \iff d$ az a és b lnkoja és előáll $d = ar + bs$ alakban alkalmas r, s gyűrűbeli elemekkel.

Főideálgyűrű: Olyan kommutatív, egységelemes, nullosztómentes R gyűrű, amelyben minden ideál főideál. Minden euklideszi gyűrű főideálgyűrű és minden főideálgyűrűben érvényes a számelmélet alaptétele.

49. Legyen $S \neq \{0\}$ részgyűrű R-ben. Igaz vagy hamis?
(a) Ha R egységelemes, akkor S is az.
(b) Ha S egységelemes, akkor R is az.
(c) Ha R és S is egységelemes, akkor szükségképpen azonos az egységelemük.
(d) Ha R nullosztómentes, R és S is egységelemes, akkor szükségképpen azonos az egységelemük.
(e) Ha S nullosztómentes, R és S is egységelemes, akkor szükségképpen azonos az egységelemük.
(f) Ha R nullosztómentes, akkor S is az.
(g) Ha S nullosztómentes, akkor R is az.
(h) Ha R kommutatív, akkor S is az.
(i) Ha S kommutatív, akkor R is az.
(j) Ha R test, akkor S is az.
(k) Ha S test, akkor R is az.

50. Hány részgyűrű nem ideál az alábbi gyűrűkben: (a) $\mathbf{Q}$; (b) $\mathbf{Z}$; (c) $\mathbf{Z}[x]$; (d) $\mathbf{Z}_{2020}$?

51. Melyek főideálok $\mathbf{Z}[x]$-ben: (a) $(x+1, 2x+1)$; (b) $(x+1, 3x+1)$; (c) $(2x+1, 3x+1)$?

52. Mutassuk meg, hogy euklideszi gyűrűben nem kell feltenni, hogy egységelemes, mert ez következik az euklideszi tulajdonságból.

53. (a) Mutassuk meg, hogy az $\alpha = a + b\sqrt{3}$ valós számok, ahol a, b egészek, egy R kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűt alkotnak (az $\mathbf{R}$-beli összeadásra és szorzásra).
(b) Definiáljuk R-ben a normát: $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Lássuk be, hogy $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.
(c) Hány egység van R-ben?
(d) Igazoljuk, hogy R euklideszi gyűrű.
(e) Adjuk meg az összes felbonthatatlant R-ben.

54. Lássuk be, hogy az $\alpha = a + b\sqrt{10}$ valós számok gyűrűjében nem igaz a számelmélet alaptétele, pl. a -9 kétféleképpen bomlik felbonthatatlanok szorzatára.

55. Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenleteket:
(a) $x^2 - 3y^2 + 361z^2 = 1900019$; (b) $x^6 - 16 = y^7$; (c) $x^4 - 17 = y^6$.