Testbővítések mint faktorgyűrű: $\mathbf{Q}(\alpha) \cong \mathbf{Q}[x]/(m_\alpha)$. Ebből kiindulva új testek konstrukciója: T adott test és f irreducibilis polinom T felett, ekkor $T[x]/(f)$ test, amely tkp. a T-nek az f egy (korábban nem is létező) gyökével történő bővítése.

Karakterisztika: Ha egy T testben egy nem nulla elemet önmagával akárhányszor összeadva sohasem kapunk nullát, akkor T karakterisztikája $\mathrm{char}(T) = 0$. Ha van olyan $0 \neq c \in T$ és $k > 0$ egész, amelyet önmagával k-szor összeadva 0-t kapunk, akkor ez T minden elemére igaz. A legkisebb ilyen k egy p prímszám és ekkor $\mathrm{char}(T) = p$. Jelölés: Ha R gyűrű, $c \in R$ és $m \in \mathbf{Z}$, akkor $m > 0$ esetén mc az az m-tagú összeg, amelynek minden tagja c, $m = 0$-ra $0c = 0$, és $m < 0$-ra mc az az $|m|$-tagú összeg, amelynek minden tagja $-c$.

Prímtest: egy test összes résztesteinek a metszete. Ez 0-karakterisztika esetén $\mathbf{Q}$-val, p-karakterisztika esetén pedig $\mathbf{Z}_p$-vel izomorf.

65. Az alábbi faktorgyűrűk közül melyek alkotnak testet? ($\mathbf{G}$ a Gauss-egészek gyűrűje.)

(a) $\mathbf{R}[x]/(x)$; (b) $\mathbf{R}[x]/(x^2-2)$; (c) $\mathbf{R}[x]/(x^2+2)$; (d) $\mathbf{Z}_{30}/(5)$; (e) $\mathbf{Z}_{30}/(6)$;
(f) $\mathbf{Z}/(14,35)$; (g) $\mathbf{G}/(i)$; (h) $\mathbf{G}/(1+i)$; (i) $\mathbf{G}/(2)$; (j) $\mathbf{G}/(3)$.

66. Adjunk új bizonyítást az $\mathbf{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbf{C}$ izomorfiára a homomorfizmustétel segítségével.

67. Egy T test egy $c \neq 0$ elemére tekintsük az összes olyan m egész számot, amelyre $mc = 0$. Igazoljuk, hogy ezek $\mathbf{Z}$-nek egy ideálját alkotják. Milyen ideálok léphetnek fel?

68. Igaz vagy hamis?

(a) Ha R gyűrű, $0 \neq c \in R$, és valamely $k > 0$ egészre $kc = 0$, akkor ez R minden elemére igaz.

(b) Ha R nullosztómentes gyűrű, $0 \neq c \in R$, és valamely $k > 0$ egészre $kc = 0$, akkor ez R minden elemére igaz.

69. Definiáljuk két gyűrű, R_1 és R_2 direkt összegét, $R_1 \oplus R_2$-t: Ennek elemei az (r_1, r_2) elempárok, ahol $r_i \in R_i$, a szorzást és összeadást pedig komponensenként végezzük. Igazoljuk az alábbiakat:

(a) $R_1 \oplus R_2$ valóban gyűrű.

(b) Mikor lesz $R_1 \oplus R_2$ (b1) kommutatív; (b2) egységelemes; (b3) nullosztómentes?

(c) $R_1 \oplus R_2$ „természetes módon” tartalmaz egy-egy R_1-gyel, illetve R_2-vel izomorf R_i^* részgyűrűt, amelyek ideálok, és $R_1 \oplus R_2/R_1^* \cong R_2$.

(d) Hogyan segíthet a direkt összeg a 49. és 59. feladat hamis állításaihoz ellenpéldát találni?

(e) Az alábbi gyűrűk közül melyek izomorfak két, egynél nagyobb elemszámú gyűrű direkt összegével: (e1) $\mathbf{C}$; (e2) $\mathbf{Z}_9$, (e3) $\mathbf{Z}_6$; (e4) a 2×2-es valós diagonális mátrixok?