Duplatalálat

Kellék: Két csomag 32 lapból álló magyar kártya.

Előadás:

A bűvész odaadja a két nézőnek az egyik 32 lapból álló kártyacsomagot, a nézők ezt a kártyacsomagot tetszés szerint megkeverhetik. Ezután a nézők választanak egy-egy lapot, a választott lapokat a nézők maguknál tartják. A bűvész ezután a kártyacsomag megmaradt 30 lapját három csomagra osztja. Mindegyik csomagban 10 lap van, ezt nem feltétlenül kell tudni a nézőknek. (A bűvész nem egyesével számolja a lapokat, hanem kettesével vagy hármasával, így a nézőknek nehezebb követni, hogy melyik csomagban hány lap van. Persze az sem baj, ha a nézők tudják, hogy mindegyik csomagban 10 lap van, de a bűvésznek erre nem kell felhívni a nézők figyelmét.) A három, 10 lapból álló csomag egymás mellett van, bal oldalon egy csomag, jobb oldalon egy csomag, középen egy csomag. A csomagokban a lapok hátlappal felfelé vannak.

A nézőknek a következő feladatokat kell ebben a sorrendben elvégezni:

* az egyik néző, akinél az egyik választott lap van, a bal oldali csomagból levesz valamennyi lapot, ő dönti el, hogy mennyit, a levett lapokat a bal oldali csomag mellé, balra rakja.
* ez a néző a nála levő választott lapot a bal oldali csomag megmaradt részére ráteszi, úgy hogy ez a lap hátlappal felfelé nézzen.
* a másik néző a középső csomagról levesz valamennyi lapot, mindegy, hogy mennyit, a néző dönti el, és a levett lapokat a bal oldali csomag megmaradt részén levő, az egyik néző által választott lapra teszi.
* a másik néző a nála levő választott lapot a középső csomag megmaradt részére tesz, úgy hogy ez a lap hátlappal felfelé nézzen.
* valamelyik néző a jobb oldali csomagról levesz valamennyi lapot, mindegy, hogy mennyit, megint a néző dönti el, és a levett lapokat a középső csomag megmaradt részén levő, a másik néző által választott lapra teszi.

Ekkor most négy pakli van egymás mellett: balról jobbra haladva az első pakli (ez a bal oldali 10 lapból álló csomag tetejéről levett néhány kártya), a második pakli (ebben van az első néző által választott lap), a harmadik pakli (ebben van a második néző által választott lap), a negyedik pakli (ez a jobb oldali, 10 lapból álló csomag megmaradt része). Ekkor valamelyik néző összeszedi a négy paklit, mégpedig úgy hogy a negyedik paklit ráteszi a harmadik paklira, utána a negyedik és a harmadik pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi a második paklira, utána a negyedik, a harmadik, és a második pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi az első paklira.

Ezután a nézők ennek a 32 lapból álló csomag lapjainak sorrendjét nem változtatják meg. A nézők a másik 32 lapból álló kártyacsomag lapjait olyan sorrendbe teszik, amilyen sorrendben az előbb, az általuk összerakott csomag lapjai vannak. Ez a művelet egy kicsit időigényes is lehet.

Ezután a nézők az általuk először összerakott kártyacsomagból két darab 16 lapból álló kártyacsomagot készítenek az „egyet balra, egyet jobbra” módszer alkalmazásával, majd a bal oldali 16 lapból álló csomagot összefogva ráteszik a jobb oldali 16 lapból álló kártyacsomagra. Így megint összeáll a 32 lapból álló teljes magyar kártyacsomag.

Ezután a nézők a két, 32 lapból álló kártyacsomagot egymás mellé teszik, a két csomag lapjait felülről lefelé haladva egyesével fordítják fel egyszerre. Általában a felfordított két lap különböző lesz, de ha a két felfordított lap ugyanaz, akkor a nézők egy ilyen lapot választottak.

Magyarázat:

Amikor a nézők a választott lapjukat visszateszik a megmaradt 30 lap közé, akkor a keletkezett 32 lapból álló kártyacsomagban az egyik választott lap felülről a 22. és alulról a 11. lesz, a másik választott lap felülről a 11. és alulról a 22. lesz.

Részletesen kiírva:

A három darab 10 lapból csomag egymás mellett van:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |

Az egyik néző a bal oldali csomagból *x* darab lapot a bal oldali csomag mellé tesz:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |

Az egyik néző a nála levő választott lapot ráteszi a bal oldali csomag tetejére:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | első választott lap |  |  |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |

A másik néző a középső csomagból *y* darab lapot a bal oldali csomag tetején levő, az egyik néző által letett választott lapra tesz:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | *y* darab lap |  |  |  |  |
|  |  | első választott lap |  |  |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10-*y* darab lap |  | 10 darab lap |

A másik néző a nála levő választott lapot ráteszi a középső csomag tetejére:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | *y* darab lap |  |  |  |  |
|  |  | egyik választott lap |  | másik választott lap |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10-*y* darab lap |  | 10 darab lap |

Valamelyik néző a jobb oldali csomagból *z* darab lapot a középső csomag tetején levő, a másik néző által letett választott lapra tesz:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | *y* darab lap |  | *z* darab lap |  |  |
|  |  | egyik választott lap |  | másik választott lap |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10-*y* darab lap |  | 10-*z* darab lap |

Most állt össze a négy pakli.

Valamelyik néző összeszedi a négy paklit, mégpedig úgy hogy a negyedik paklit ráteszi a harmadik paklira, utána a negyedik és a harmadik pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi a második paklira, utána a negyedik, a harmadik, és a második pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi az első paklira

|  |
| --- |
| 10-*z* darab lap |
| *z* darab lap |
| másik választott lap |
| 10-*y* darab lap |
| *y* darab lap |
| egyik választott lap |
| 10-*x* darab lap |
| *x* darab lap |

Azaz végül is a következő, 32 lapból álló kártyacsomag keletkezik:

|  |
| --- |
| 10 darab lap |
|
| másik választott lap |
| 10 darab lap |
|
| egyik választott lap |
| 10 darab lap |
|

Tehát az egyik választott lap felülről a 22. és alulról a 11. lesz, a másik választott lap felülről a 11. és alulról a 22. lesz.

A továbbiakban tekintsük a következő, a 32 lapból álló magyar kártyacsomagon történő keveréseket:

A mutatvány magyarázatának további részéhez valamennyi matematika szükséges:

Tekintsük a következő keveréseket!

*1-csomagos keverés*: A lapokat egyesével le kell számolni. Ekkor a lapok sorrendje megfordul. Legyen az a permutáció, amely az 1-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. Az permutációt a következőképpen lehet felírni:

=

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 32. helyre kerül, a 2. lap a 31. helyre kerül, a 3. lap a 30. helyre kerül, a 4. lap a 29. helyre kerül stb.

*2-csomagos keverés*: A lapokat két, 16 lapból álló csomagba szét kell osztani az „egyet balra, egyet jobbra” módszerrel. Ezután a bal oldali 16 lapból álló csomagot összefogva rá kell tenni a jobb oldali 16 lapból álló csomagra. Legyen az a permutáció, amely a 2-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A permutációt a következőképpen lehet felírni:

=

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 16. helyre kerül, a 2. lap a 32. helyre kerül, a 3. lap a 15. helyre kerül, a 4. lap a 31. helyre kerül stb.

*4-csomagos keverés*: A lapokat négy, 8 lapból álló csomagba szét kell osztani az „egyet ide, egyet oda, egyet emide, egyet amoda” módszerrel. Az „ide” került 8 darab lap alkotja az első csomagot. Az „oda” került 8 darab lap alkotja a második csomagot. Az „emide” került 8 darab lap alkotja a harmadik csomagot. Az „amoda” került 8 darab lap alkotja a negyedik csomagot. Ezután az első csomagot rá kell tenni a második csomagra, az első és a második csomag egyesítésével keletkezett csomagot rá kell tenni a harmadik csomagra, az első és a második és a harmadik csomag egyesítésével keletkezett csomagot rá kell tenni a negyedik csomagra. Legyen az a permutáció, amely a 4-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A permutációt a következőképpen lehet felírni:

=

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 8. helyre kerül, a 2. lap a 16. helyre kerül, a 3. lap a 24. helyre kerül, a 4. lap a 32. helyre kerül stb.

*8-csomagos keverés*: Először egyesével le kell tenni egymás mellé 8 lapot balról jobbra a 32 lapból álló kártyacsomag tetejéről. A letett 8 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Ezután a legutoljára letett 8 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Végül a legutoljára letett 8 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Ekkor a kártyacsomag lapjai elfogytak, de lett 8 darab kis csomag, mindegyik kis csomag 4 lapból áll. Ezután össze kell szedni a kis csomagokat balról jobbra haladva: az első kis csomagot rá kell tenni a második kis csomagra, ezután az első két kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a harmadik kis csomagra, ezután az első három kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a negyedik kis csomagra, ezután az első négy kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni az ötödik kis csomagra stb. Legyen az a permutáció, amely a 8-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A permutációt a következőképpen lehet felírni:

=

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 4. helyre kerül, a 2. lap a 8. helyre kerül, a 3. lap a 12. helyre kerül, a 4. lap a 16. helyre kerül stb.

*16-csomagos keverés*: A 32 lapból álló kártyacsomag felső 16 lapját egyesével balról jobbra haladva le kell tenni egymás mellé. A letett 16 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Ekkor a kártyacsomag lapjai elfogytak, de lett 16 darab kis csomag, mindegyik kis csomag 2 lapból áll. Ezután össze kell szedni a kis csomagokat balról jobbra haladva: az első kis csomagot rá kell tenni a második kis csomagra, ezután az első két kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a harmadik kis csomagra, ezután az első három kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a negyedik kis csomagra, ezután az első négy kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni az ötödik kis csomagra stb. Legyen az a permutáció, amely a 16-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. Az permutációt a következőképpen lehet felírni:

=

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 2. helyre kerül, a 2. lap a 4. helyre kerül, a 3. lap a 6. helyre kerül, a 4. lap a 8. helyre kerül stb.

*32-csomagos keverés*: A 32 lapból álló kártyacsomag lapjait egymás mellé le kell tenni egyesével balról jobbra haladva. Ezután a lapokat balról jobbra haladva fel kell szedni: az első lapot rá kell tenni a második lapra, ezután az első két lapot rá kell tenni a harmadik lapra, ezután az első három lapot rá kell tenni a negyedik lapra, ezután az első négy lapot rá kell tenni az ötödik lapra stb. Ezt a keverést elvégezve, a lapok sorrendje nem változik. Legyen az a permutáció, amely a 32-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A permutációt a következőképpen lehet felírni:

=

A mutatvány szempontjából lényeges észrevétel, hogy a 2-csomagos, 8-csomagos, 32-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyükön maradnak, az 1-csomagos, 4-csomagos, 16-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyet cserélnek.

Visszatérve a mutatvány további magyarázatához. Tehát a 32 lapból álló kártyacsomag 11. és 22. lapja a választott lapok. Olyan keverést kell alkalmazni, amely ezt a két lapot biztosan helyükön hagyja, és a többi lap helyét biztosan megváltoztatja. E célból tökéletesen megfelel a 2-csomagos keverés vagy a 8 csomagos keverés, de megfelel például a 4 csomagos keverés kétszeri alkalmazása vagy a 16-csomagos keverés kétszeri alkalmazása. Így ha valamelyik néző a másik 32 lapból álló kártyacsomag lapjait ennek a kártyacsomag lapjainak sorrendjével egyező sorrendbe teszi, majd ezt a kártyacsomagot 2-csomagos keveréssel összekeveri, akkor egyeztetve a két kártyacsomag lapjainak sorrendjét, a választott lapok és csak a választott lapok mindkét kártyacsomagban ugyanazon a helyen lesznek.

***Megjegyzések: (a matematikában járatos olvasóknak)***

Érdemes felírni mindegyik permutációnak a ciklusszerkezetét:

==

==

=

==

==

=

==

==

=

==

==

=

==

==

=

==

==

=

Itt ciklusok egysoros írásmódja is alkalmazva lett. Az egysoros írásmód során a zárójelben írt elemek sorrendje lényeges, hiszen minden elem a következő elem helyére megy, kivéve az utolsó elemet, mert az az első elem helyére megy. Amennyiben csak egy elem van a zárójelben, az az elem a helyén marad. Amennyiben két elem van a zárójelben, az a két elem helyet cserél, az ilyen ciklus neve transzpozíció.

Ezen felírások alapján észrevehető, hogy például:

* a 2-csomagos, 8-csomagos, 32-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyükön maradnak, az 1-csomagos, 4-csomagos, 16-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyet cserélnek.
* A és az permutációk egymás hatványai: , . Ugyanígy a és a permutációk is egymás hatványai: , . Továbbá a és az permutációk segítségével a többi permutáció is felírható: , , , . Ez például azt jelenti, hogy a 32 lapból álló kártyacsomagon hétszer elvégezve a 4-csomagos keverést ugyanaz, mint egyszer alkalmazva a 16-csomagos keverést. Vagy például azt jelenti, hogy a 32 lapból álló kártyacsomagon háromszor elvégezve a 16-csomagos keverést ugyanaz, mint egyszer alkalmazva a 4-csomagos keverést.
* Mivel az , , , , , permutációk előállíthatóak a és az permutációk hatványaként (többszöri egymás utáni alkalmazásaként), így a , , , , , permutációk egymás közötti szorzása (egymás utáni alkalmazása) most kommutatív.
* A permutáció ciklusszerkezetéből könnyen megállapítható a permutáció rendje. A permutáció rendje az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre mint hatványkitevőre emelve (ahányszor egymás után alkalmazva a permutációt), eredményül az alapsorrend adódik. Egy permutáció rendje egyenlő a permutáció ciklusszerkezetét előállító ciklusok hosszának legkisebb közös többszörösével. Például a ciklusszerkezetét 6 darab 5 hosszú és 2 darab 1 hosszú ciklus alkotja, így ennek a permutációnak a rendje LKKT(5; 5; 5; 5; 5; 5; 1;1)=5. Ez azt jelenti, hogy a 32 lapból álló kártyacsomagot legalább 5-ször kell 2-csomagos keveréssel keverni, úgy hogy a lapok újra eredeti sorrendben legyenek.
* A permutáció fixpontja az az elem, amely a permutáció során nem változtatja meg a helyét. Például az permutációnak nincs fixpontja, azaz az 1-csomagos keverésnél minden lap megváltoztatja a helyét. Például az permutációnak minden elem fixpontja, ez azt jelenti, hogy a 32-lapos keverésnél minden lap a helyén marad. Például az a és a permutációk fixpontjai a 11. és a 22. elem, ez azt jelenti, hogy a 2-csomagos keverés vagy a 8 csomagos keverés elvégzése során a 11. és a 22. lap a helyükön maradnak.