Duplatalálat

Kellék: Két csomag 32 lapból álló magyar kártya.

Előadás:

A bűvész odaadja a két nézőnek az egyik 32 lapból álló kártyacsomagot, a nézők ezt a kártyacsomagot tetszés szerint megkeverhetik. Ezután a nézők választanak egy-egy lapot, a választott lapokat a nézők maguknál tartják. A bűvész ezután a kártyacsomag megmaradt 30 lapját három csomagra osztja. Mindegyik csomagban 10 lap van, ezt nem feltétlenül kell tudni a nézőknek. (A bűvész nem egyesével számolja a lapokat, hanem kettesével vagy hármasával, így a nézőknek nehezebb követni, hogy melyik csomagban hány lap van. Persze az sem baj, ha a nézők tudják, hogy mindegyik csomagban 10 lap van, de a bűvésznek erre nem kell felhívni a nézők figyelmét.) A három, 10 lapból álló csomag egymás mellett van, bal oldalon egy csomag, jobb oldalon egy csomag, középen egy csomag. A csomagokban a lapok hátlappal felfelé vannak.

A nézőknek a következő feladatokat kell ebben a sorrendben elvégezni:

* az egyik néző, akinél az egyik választott lap van, a bal oldali csomagból levesz valamennyi lapot, ő dönti el, hogy mennyit, a levett lapokat a bal oldali csomag mellé, balra rakja.
* ez a néző a nála levő választott lapot a bal oldali csomag megmaradt részére ráteszi, úgy hogy ez a lap hátlappal felfelé nézzen.
* a másik néző a középső csomagról levesz valamennyi lapot, mindegy, hogy mennyit, a néző dönti el, és a levett lapokat a bal oldali csomag megmaradt részén levő, az egyik néző által választott lapra teszi.
* a másik néző a nála levő választott lapot a középső csomag megmaradt részére tesz, úgy hogy ez a lap hátlappal felfelé nézzen.
* valamelyik néző a jobb oldali csomagról levesz valamennyi lapot, mindegy, hogy mennyit, megint a néző dönti el, és a levett lapokat a középső csomag megmaradt részén levő, a másik néző által választott lapra teszi.

Ekkor most négy pakli van egymás mellett: balról jobbra haladva az első pakli (ez a bal oldali 10 lapból álló csomag tetejéről levett néhány kártya), a második pakli (ebben van az első néző által választott lap), a harmadik pakli (ebben van a második néző által választott lap), a negyedik pakli (ez a jobb oldali, 10 lapból álló csomag megmaradt része). Ekkor valamelyik néző összeszedi a négy paklit, mégpedig úgy hogy a negyedik paklit ráteszi a harmadik paklira, utána a negyedik és a harmadik pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi a második paklira, utána a negyedik, a harmadik, és a második pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi az első paklira.

Ezután a nézők ennek a 32 lapból álló csomag lapjainak sorrendjét nem változtatják meg. A nézők a másik 32 lapból álló kártyacsomag lapjait olyan sorrendbe teszik, amilyen sorrendben az előbb, az általuk összerakott csomag lapjai vannak. Ez a művelet egy kicsit időigényes is lehet.

Ezután a nézők az általuk először összerakott kártyacsomagból két darab 16 lapból álló kártyacsomagot készítenek az „egyet balra, egyet jobbra” módszer alkalmazásával, majd a bal oldali 16 lapból álló csomagot összefogva ráteszik a jobb oldali 16 lapból álló kártyacsomagra. Így megint összeáll a 32 lapból álló teljes magyar kártyacsomag.

Ezután a nézők a két, 32 lapból álló kártyacsomagot egymás mellé teszik, a két csomag lapjait felülről lefelé haladva egyesével fordítják fel egyszerre. Általában a felfordított két lap különböző lesz, de ha a két felfordított lap ugyanaz, akkor a nézők egy ilyen lapot választottak.

Magyarázat:

Amikor a nézők a választott lapjukat visszateszik a megmaradt 30 lap közé, akkor a keletkezett 32 lapból álló kártyacsomagban az egyik választott lap felülről a 22. és alulról a 11. lesz, a másik választott lap felülről a 11. és alulról a 22. lesz.

Részletesen kiírva:

A három darab 10 lapból csomag egymás mellett van:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |

Az egyik néző a bal oldali csomagból *x* darab lapot a bal oldali csomag mellé tesz:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |

Az egyik néző a nála levő választott lapot ráteszi a bal oldali csomag tetejére:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | első választott lap |  |  |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10 darab lap |  | 10 darab lap |

A másik néző a középső csomagból *y* darab lapot a bal oldali csomag tetején levő, az egyik néző által letett választott lapra tesz:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | *y* darab lap |  |  |  |  |
|  |  | első választott lap |  |  |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10-*y* darab lap |  | 10 darab lap |

A másik néző a nála levő választott lapot ráteszi a középső csomag tetejére:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | *y* darab lap |  |  |  |  |
|  |  | egyik választott lap |  | másik választott lap |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10-*y* darab lap |  | 10 darab lap |

Valamelyik néző a jobb oldali csomagból *z* darab lapot a középső csomag tetején levő, a másik néző által letett választott lapra tesz:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | bal oldali 10 lapból álló csomag |  | középső 10 lapból álló csomag |  | jobb oldali 10 lapból álló csomag |
|  |  | *y* darab lap |  | *z* darab lap |  |  |
|  |  | egyik választott lap |  | másik választott lap |  |  |
| *x* darab lap |  | 10-*x* darab lap |  | 10-*y* darab lap |  | 10-*z* darab lap |

Most állt össze a négy pakli.

Valamelyik néző összeszedi a négy paklit, mégpedig úgy hogy a negyedik paklit ráteszi a harmadik paklira, utána a negyedik és a harmadik pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi a második paklira, utána a negyedik, a harmadik, és a második pakli egyesítésével keletkezett csomagot ráteszi az első paklira

|  |
| --- |
| 10-*z* darab lap |
| *z* darab lap |
| másik választott lap |
| 10-*y* darab lap |
| *y* darab lap |
| egyik választott lap |
| 10-*x* darab lap |
| *x* darab lap |

Azaz végül is a következő, 32 lapból álló kártyacsomag keletkezik:

|  |
| --- |
| 10 darab lap |
|
| másik választott lap |
| 10 darab lap |
|
| egyik választott lap |
| 10 darab lap |
|

Tehát az egyik választott lap felülről a 22. és alulról a 11. lesz, a másik választott lap felülről a 11. és alulról a 22. lesz.

A továbbiakban tekintsük a következő, a 32 lapból álló magyar kártyacsomagon történő keveréseket:

A mutatvány magyarázatának további részéhez valamennyi matematika szükséges:

Tekintsük a következő keveréseket!

*1-csomagos keverés*: A lapokat egyesével le kell számolni. Ekkor a lapok sorrendje megfordul. Legyen $α$ az a permutáció, amely az 1-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. Az $α$ permutációt a következőképpen lehet felírni:

$α$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\32&31\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\30&29\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\28&27\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\26&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\24&23\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\22&21\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\20&19\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\18&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\16&15\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\14&13\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\12&11\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\10&9\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\8&7\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\6&5\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\4&3\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\2&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 32. helyre kerül, a 2. lap a 31. helyre kerül, a 3. lap a 30. helyre kerül, a 4. lap a 29. helyre kerül stb.

*2-csomagos keverés*: A lapokat két, 16 lapból álló csomagba szét kell osztani az „egyet balra, egyet jobbra” módszerrel. Ezután a bal oldali 16 lapból álló csomagot összefogva rá kell tenni a jobb oldali 16 lapból álló csomagra. Legyen $β$ az a permutáció, amely a 2-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A $β$ permutációt a következőképpen lehet felírni:

$β$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\16&32\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\15&31\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\14&30\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\13&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\12&28\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\11&27\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\10&26\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\9&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\8&24\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\7&23\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\6&22\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\5&21\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\4&20\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\3&19\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\2&18\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\1&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 16. helyre kerül, a 2. lap a 32. helyre kerül, a 3. lap a 15. helyre kerül, a 4. lap a 31. helyre kerül stb.

*4-csomagos keverés*: A lapokat négy, 8 lapból álló csomagba szét kell osztani az „egyet ide, egyet oda, egyet emide, egyet amoda” módszerrel. Az „ide” került 8 darab lap alkotja az első csomagot. Az „oda” került 8 darab lap alkotja a második csomagot. Az „emide” került 8 darab lap alkotja a harmadik csomagot. Az „amoda” került 8 darab lap alkotja a negyedik csomagot. Ezután az első csomagot rá kell tenni a második csomagra, az első és a második csomag egyesítésével keletkezett csomagot rá kell tenni a harmadik csomagra, az első és a második és a harmadik csomag egyesítésével keletkezett csomagot rá kell tenni a negyedik csomagra. Legyen $γ$ az a permutáció, amely a 4-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A $γ$ permutációt a következőképpen lehet felírni:

$γ$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\8&16\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\24&32\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\7&15\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\23&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\6&14\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\22&30\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\5&13\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\21&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\4&12\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\20&28\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\3&11\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\19&27\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\2&10\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\18&26\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\1&9\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\17&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 8. helyre kerül, a 2. lap a 16. helyre kerül, a 3. lap a 24. helyre kerül, a 4. lap a 32. helyre kerül stb.

*8-csomagos keverés*: Először egyesével le kell tenni egymás mellé 8 lapot balról jobbra a 32 lapból álló kártyacsomag tetejéről. A letett 8 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Ezután a legutoljára letett 8 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Végül a legutoljára letett 8 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Ekkor a kártyacsomag lapjai elfogytak, de lett 8 darab kis csomag, mindegyik kis csomag 4 lapból áll. Ezután össze kell szedni a kis csomagokat balról jobbra haladva: az első kis csomagot rá kell tenni a második kis csomagra, ezután az első két kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a harmadik kis csomagra, ezután az első három kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a negyedik kis csomagra, ezután az első négy kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni az ötödik kis csomagra stb. Legyen $δ$ az a permutáció, amely a 8-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A $δ$ permutációt a következőképpen lehet felírni:

$δ$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\4&8\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\12&16\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\20&24\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\28&32\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\3&7\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\11&15\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\19&23\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\27&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\2&6\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\10&14\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\18&22\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\26&30\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\1&5\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\9&13\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\17&21\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\25&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 4. helyre kerül, a 2. lap a 8. helyre kerül, a 3. lap a 12. helyre kerül, a 4. lap a 16. helyre kerül stb.

*16-csomagos keverés*: A 32 lapból álló kártyacsomag felső 16 lapját egyesével balról jobbra haladva le kell tenni egymás mellé. A letett 16 lap mindegyikére egy lapot kell tenni balról jobbra haladva a kártyacsomag maradék részének tetejéről. Ekkor a kártyacsomag lapjai elfogytak, de lett 16 darab kis csomag, mindegyik kis csomag 2 lapból áll. Ezután össze kell szedni a kis csomagokat balról jobbra haladva: az első kis csomagot rá kell tenni a második kis csomagra, ezután az első két kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a harmadik kis csomagra, ezután az első három kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni a negyedik kis csomagra, ezután az első négy kis csomag egyesítésével keletkezett kis csomagot rá kell tenni az ötödik kis csomagra stb. Legyen $ε$ az a permutáció, amely a 16-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. Az $ε$ permutációt a következőképpen lehet felírni:

$ε$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\6&8\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\10&12\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\14&16\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\18&20\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\22&24\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\26&28\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\30&32\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\1&3\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\5&7\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\9&11\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\13&15\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\17&19\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\21&23\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\25&27\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\29&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

Ez azt jelenti, hogy ezt a keverést elvégezve például felülről számítva az 1. lap a 2. helyre kerül, a 2. lap a 4. helyre kerül, a 3. lap a 6. helyre kerül, a 4. lap a 8. helyre kerül stb.

*32-csomagos keverés*: A 32 lapból álló kártyacsomag lapjait egymás mellé le kell tenni egyesével balról jobbra haladva. Ezután a lapokat balról jobbra haladva fel kell szedni: az első lapot rá kell tenni a második lapra, ezután az első két lapot rá kell tenni a harmadik lapra, ezután az első három lapot rá kell tenni a negyedik lapra, ezután az első négy lapot rá kell tenni az ötödik lapra stb. Ezt a keverést elvégezve, a lapok sorrendje nem változik. Legyen $ω$ az a permutáció, amely a 32-csomagos keverés szerint változtatja meg a lapok sorrendjét. A $ω$ permutációt a következőképpen lehet felírni:

$ω$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\1&2\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\3&4\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\5&6\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\7&8\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\9&10\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\11&12\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\13&14\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\15&16\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\17&18\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\19&20\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\21&22\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\23&24\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\25&26\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\27&28\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\29&30\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\31&32\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$

A mutatvány szempontjából lényeges észrevétel, hogy a 2-csomagos, 8-csomagos, 32-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyükön maradnak, az 1-csomagos, 4-csomagos, 16-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyet cserélnek.

Visszatérve a mutatvány további magyarázatához. Tehát a 32 lapból álló kártyacsomag 11. és 22. lapja a választott lapok. Olyan keverést kell alkalmazni, amely ezt a két lapot biztosan helyükön hagyja, és a többi lap helyét biztosan megváltoztatja. E célból tökéletesen megfelel a 2-csomagos keverés vagy a 8 csomagos keverés, de megfelel például a 4 csomagos keverés kétszeri alkalmazása vagy a 16-csomagos keverés kétszeri alkalmazása. Így ha valamelyik néző a másik 32 lapból álló kártyacsomag lapjait ennek a kártyacsomag lapjainak sorrendjével egyező sorrendbe teszi, majd ezt a kártyacsomagot 2-csomagos keveréssel összekeveri, akkor egyeztetve a két kártyacsomag lapjainak sorrendjét, a választott lapok és csak a választott lapok mindkét kártyacsomagban ugyanazon a helyen lesznek.

***Megjegyzések: (a matematikában járatos olvasóknak)***

Érdemes felírni mindegyik permutációnak a ciklusszerkezetét:

$α$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\32&31\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\30&29\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\28&27\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\26&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\24&23\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\22&21\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\20&19\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\18&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\16&15\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\14&13\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\12&11\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\10&9\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\8&7\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\6&5\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\4&3\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\2&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&32\\32&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2&31\\31&2\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&30\\30&3\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}4&29\\29&4\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&28\\28&5\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}6&27\\27&6\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}7&26\\26&7\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}8&25\\25&8\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}9&24\\24&9\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}10&23\\23&10\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11&22\\22&11\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}12&21\\21&12\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}13&20\\20&13\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}14&19\\19&14\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}15&18\\18&15\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}16&17\\17&16\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&32\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2&31\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&30\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}4&29\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&28\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}6&27\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}7&26\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}8&25\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}9&24\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}10&23\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11&22\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}12&21\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}13&20\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}14&19\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}15&18\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}16&17\end{matrix}\right)$

$β$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\16&32\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\15&31\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\14&30\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\13&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\12&28\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\11&27\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\10&26\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\9&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\8&24\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\7&23\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\6&22\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\5&21\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\4&20\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\3&19\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\2&18\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\1&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&\begin{matrix}16&\begin{matrix}25&\begin{matrix}4&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\16&\begin{matrix}25&\begin{matrix}4&\begin{matrix}31&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2&\begin{matrix}32&\begin{matrix}17&\begin{matrix}8&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\32&\begin{matrix}17&\begin{matrix}8&\begin{matrix}29&2\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&\begin{matrix}15&\begin{matrix}9&\begin{matrix}12&27\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\15&\begin{matrix}9&\begin{matrix}12&\begin{matrix}27&3\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}6&\begin{matrix}30&\begin{matrix}18&\begin{matrix}24&21\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\30&\begin{matrix}18&\begin{matrix}24&\begin{matrix}21&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&\begin{matrix}14&\begin{matrix}26&\begin{matrix}20&23\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\14&\begin{matrix}26&\begin{matrix}20&\begin{matrix}23&5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}7&\begin{matrix}13&\begin{matrix}10&\begin{matrix}28&19\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\13&\begin{matrix}10&\begin{matrix}28&\begin{matrix}19&7\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11\\11\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}22\\22\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&\begin{matrix}16&\begin{matrix}25&\begin{matrix}4&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2&\begin{matrix}32&\begin{matrix}17&\begin{matrix}8&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&\begin{matrix}15&\begin{matrix}9&\begin{matrix}12&27\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}6&\begin{matrix}30&\begin{matrix}18&\begin{matrix}24&21\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&\begin{matrix}14&\begin{matrix}26&\begin{matrix}20&23\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}7&\begin{matrix}13&\begin{matrix}10&\begin{matrix}28&19\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(11\right)\left(22\right)$

$γ$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\8&16\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\24&32\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\7&15\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\23&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\6&14\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\22&30\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\5&13\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\21&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\4&12\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\20&28\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\3&11\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\19&27\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\2&10\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\18&26\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\1&9\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\17&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}1&\begin{matrix}8&\begin{matrix}31&\begin{matrix}17&\begin{matrix}4&\begin{matrix}32&\begin{matrix}25&\begin{matrix}2&\begin{matrix}16&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}8&\begin{matrix}31&\begin{matrix}17&\begin{matrix}4&\begin{matrix}32&\begin{matrix}25&\begin{matrix}2&\begin{matrix}16&\begin{matrix}29&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\begin{matrix}3&\begin{matrix}24&\begin{matrix}27&\begin{matrix}18&\begin{matrix}12&\begin{matrix}30&\begin{matrix}9&\begin{matrix}6&\begin{matrix}15&21\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}24&\begin{matrix}27&\begin{matrix}18&\begin{matrix}12&\begin{matrix}30&\begin{matrix}9&\begin{matrix}6&\begin{matrix}15&\begin{matrix}21&3\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\begin{matrix}5&\begin{matrix}7&\begin{matrix}23&\begin{matrix}19&\begin{matrix}20&\begin{matrix}28&\begin{matrix}26&\begin{matrix}10&\begin{matrix}14&13\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}7&\begin{matrix}23&\begin{matrix}19&\begin{matrix}20&\begin{matrix}28&\begin{matrix}26&\begin{matrix}10&\begin{matrix}14&\begin{matrix}13&5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11&22\\22&11\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&\begin{matrix}8&\begin{matrix}31&\begin{matrix}17&\begin{matrix}4&\begin{matrix}32&\begin{matrix}25&\begin{matrix}2&\begin{matrix}16&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&\begin{matrix}24&\begin{matrix}27&\begin{matrix}18&\begin{matrix}12&\begin{matrix}30&\begin{matrix}9&\begin{matrix}6&\begin{matrix}15&21\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&\begin{matrix}7&\begin{matrix}23&\begin{matrix}19&\begin{matrix}20&\begin{matrix}28&\begin{matrix}26&\begin{matrix}10&\begin{matrix}14&13\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11&12\end{matrix}\right)$

$δ$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\4&8\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\12&16\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\20&24\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\28&32\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\3&7\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\11&15\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\19&23\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\27&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\2&6\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\10&14\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\18&22\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\26&30\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\1&5\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\9&13\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\17&21\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\25&29\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&\begin{matrix}4&\begin{matrix}16&\begin{matrix}31&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\4&\begin{matrix}16&\begin{matrix}31&\begin{matrix}25&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2&\begin{matrix}8&\begin{matrix}32&\begin{matrix}29&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\8&\begin{matrix}32&\begin{matrix}29&\begin{matrix}17&2\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&\begin{matrix}12&\begin{matrix}15&\begin{matrix}27&9\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\12&\begin{matrix}15&\begin{matrix}27&\begin{matrix}9&3\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}6&\begin{matrix}24&\begin{matrix}30&\begin{matrix}21&18\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\24&\begin{matrix}30&\begin{matrix}21&\begin{matrix}18&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&\begin{matrix}20&\begin{matrix}14&\begin{matrix}23&26\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\20&\begin{matrix}14&\begin{matrix}23&\begin{matrix}26&5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}7&\begin{matrix}28&\begin{matrix}13&\begin{matrix}19&10\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\28&\begin{matrix}13&\begin{matrix}19&\begin{matrix}10&7\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11\\11\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}22\\22\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&\begin{matrix}4&\begin{matrix}16&\begin{matrix}31&25\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2&\begin{matrix}8&\begin{matrix}32&\begin{matrix}29&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&\begin{matrix}12&\begin{matrix}15&\begin{matrix}27&9\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}6&\begin{matrix}24&\begin{matrix}30&\begin{matrix}21&18\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&\begin{matrix}20&\begin{matrix}14&\begin{matrix}23&26\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}7&\begin{matrix}28&\begin{matrix}13&\begin{matrix}19&10\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(11\right)\left(22\right)$

$ε$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\6&8\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\10&12\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\14&16\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\18&20\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\22&24\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\26&28\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\30&32\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\1&3\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\5&7\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\9&11\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\13&15\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\17&19\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\21&23\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\25&27\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\29&31\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}1&\begin{matrix}2&\begin{matrix}4&\begin{matrix}8&\begin{matrix}16&\begin{matrix}32&\begin{matrix}31&\begin{matrix}29&\begin{matrix}25&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}2&\begin{matrix}4&\begin{matrix}8&\begin{matrix}16&\begin{matrix}32&\begin{matrix}31&\begin{matrix}29&\begin{matrix}25&\begin{matrix}17&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\begin{matrix}3&\begin{matrix}6&\begin{matrix}12&\begin{matrix}24&\begin{matrix}15&\begin{matrix}30&\begin{matrix}27&\begin{matrix}21&\begin{matrix}9&18\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}6&\begin{matrix}12&\begin{matrix}24&\begin{matrix}15&\begin{matrix}30&\begin{matrix}27&\begin{matrix}21&\begin{matrix}9&\begin{matrix}18&3\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\begin{matrix}5&\begin{matrix}10&\begin{matrix}20&\begin{matrix}7&\begin{matrix}14&\begin{matrix}28&\begin{matrix}23&\begin{matrix}13&\begin{matrix}26&19\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}10&\begin{matrix}20&\begin{matrix}7&\begin{matrix}14&\begin{matrix}28&\begin{matrix}23&\begin{matrix}13&\begin{matrix}26&\begin{matrix}19&5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11&22\\22&11\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1&\begin{matrix}2&\begin{matrix}4&\begin{matrix}8&\begin{matrix}16&\begin{matrix}32&\begin{matrix}31&\begin{matrix}29&\begin{matrix}25&17\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3&\begin{matrix}6&\begin{matrix}12&\begin{matrix}24&\begin{matrix}15&\begin{matrix}30&\begin{matrix}27&\begin{matrix}21&\begin{matrix}9&18\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5&\begin{matrix}10&\begin{matrix}20&\begin{matrix}7&\begin{matrix}14&\begin{matrix}28&\begin{matrix}23&\begin{matrix}13&\begin{matrix}26&19\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11&12\end{matrix}\right)$

$ω$=$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\1&2\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\3&4\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}5&6\\5&6\end{matrix}&\begin{matrix}7&8\\7&8\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}9&10\\9&10\end{matrix}&\begin{matrix}11&12\\11&12\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}13&14\\13&14\end{matrix}&\begin{matrix}15&16\\15&16\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}17&18\\17&18\end{matrix}&\begin{matrix}19&20\\19&20\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}21&22\\21&22\end{matrix}&\begin{matrix}23&24\\23&24\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}25&26\\25&26\end{matrix}&\begin{matrix}27&28\\27&28\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}29&30\\29&30\end{matrix}&\begin{matrix}31&32\\31&32\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$=

=$\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}5\\5\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}6\\6\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}7\\7\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}8\\8\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}9\\9\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}10\\10\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}11\\11\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}12\\12\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}13\\13\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}14\\14\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}15\\15\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}16\\16\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}17\\17\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}18\\18\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}19\\19\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}20\\20\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}21\\21\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}22\\22\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}23\\23\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}24\\24\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}25\\25\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}26\\26\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}27\\27\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}28\\28\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}29\\29\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}30\\30\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}31\\31\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}32\\32\end{matrix}\right)$=

=$\left(1\right)\left(2\right)\left(3\right)\left(4\right)\left(5\right)\left(6\right)\left(7\right)\left(8\right)\left(9\right)\left(10\right)\left(11\right)\left(12\right)\left(13\right)\left(14\right)\left(15\right)\left(16\right)\left(17\right)\left(18\right)\left(19\right)\left(20\right)\left(21\right)\left(22\right)\left(23\right)\left(24\right)\left(25\right)\left(26\right)\left(27\right)\left(28\right)\left(29\right)\left(30\right)\left(31\right)\left(32\right)$

Itt ciklusok egysoros írásmódja is alkalmazva lett. Az egysoros írásmód során a zárójelben írt elemek sorrendje lényeges, hiszen minden elem a következő elem helyére megy, kivéve az utolsó elemet, mert az az első elem helyére megy. Amennyiben csak egy elem van a zárójelben, az az elem a helyén marad. Amennyiben két elem van a zárójelben, az a két elem helyet cserél, az ilyen ciklus neve transzpozíció.

Ezen felírások alapján észrevehető, hogy például:

* a 2-csomagos, 8-csomagos, 32-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyükön maradnak, az 1-csomagos, 4-csomagos, 16-csomagos keverésnél a 11. és a 22. lap a helyet cserélnek.
* A $γ$ és az $ε$ permutációk egymás hatványai: $ε=γ^{7}$, $γ=ε^{3}$. Ugyanígy a $β$ és a $δ$ permutációk is egymás hatványai: $δ=β^{3}$, $β=δ^{2}$. Továbbá a $γ$ és az $ε$ permutációk segítségével a többi permutáció is felírható: $α=γ^{5}=ε^{5}$, $ω=γ^{10}=ε^{10}$, $β=γ^{8}=ε^{4}$, $δ=γ^{4}=ε^{2}$. Ez például azt jelenti, hogy a 32 lapból álló kártyacsomagon hétszer elvégezve a 4-csomagos keverést ugyanaz, mint egyszer alkalmazva a 16-csomagos keverést. Vagy például azt jelenti, hogy a 32 lapból álló kártyacsomagon háromszor elvégezve a 16-csomagos keverést ugyanaz, mint egyszer alkalmazva a 4-csomagos keverést.
* Mivel az $α$, $β$, $γ$, $δ$, $ε$, $ω$ permutációk előállíthatóak a $γ$ és az $ε$ permutációk hatványaként (többszöri egymás utáni alkalmazásaként), így a $α$, $β$, $γ$, $δ$, $ε$, $ω$ permutációk egymás közötti szorzása (egymás utáni alkalmazása) most kommutatív.
* A permutáció ciklusszerkezetéből könnyen megállapítható a permutáció rendje. A permutáció rendje az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre mint hatványkitevőre emelve (ahányszor egymás után alkalmazva a permutációt), eredményül az alapsorrend adódik. Egy permutáció rendje egyenlő a permutáció ciklusszerkezetét előállító ciklusok hosszának legkisebb közös többszörösével. Például a $β$ ciklusszerkezetét 6 darab 5 hosszú és 2 darab 1 hosszú ciklus alkotja, így ennek a permutációnak a rendje LKKT(5; 5; 5; 5; 5; 5; 1;1)=5. Ez azt jelenti, hogy a 32 lapból álló kártyacsomagot legalább 5-ször kell 2-csomagos keveréssel keverni, úgy hogy a lapok újra eredeti sorrendben legyenek.
* A permutáció fixpontja az az elem, amely a permutáció során nem változtatja meg a helyét. Például az $α$ permutációnak nincs fixpontja, azaz az 1-csomagos keverésnél minden lap megváltoztatja a helyét. Például az $ω$ permutációnak minden elem fixpontja, ez azt jelenti, hogy a 32-lapos keverésnél minden lap a helyén marad. Például az a $β$ és a $δ$ permutációk fixpontjai a 11. és a 22. elem, ez azt jelenti, hogy a 2-csomagos keverés vagy a 8 csomagos keverés elvégzése során a 11. és a 22. lap a helyükön maradnak.