

A feladatok megoldása során **minden választ indokoljunk!**

- Egy szigeten olyan lakosok élnek, akik csak hétfőn, szerdán és pénteken mondanak igazat, a hét többi napján hazudnak. Mikor hangozhattak el a következő mondatok?
 - Holnap igazat fogok mondani.
 - Holnap és holnapután is hazudni fogok.
- Van-e olyan x valós szám, amelyre teljesül, hogy
 - $x < 3$ és $x < 5$?
 - $x < 3$ és $x > 5$?
 - $x < 3$ vagy $x < 5$?
 - $x < 3$ vagy $x > 5$?
- Igazak-e az alábbi állítások minden olyan esetben, amikor a kifejezéseknek van értelmük?
 - Ha $x < y$, akkor $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.
 - Ha $x < y$, akkor $x^2 < y^2$.
 - Ha $x^2 < y^2$, akkor $x < y$.
 - Ha $x < y$, akkor $-x > -y$.
- Igazak-e az alábbi egyenlőségek minden olyan esetben, amikor a kifejezéseknek van értelmük?
 - $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
 - $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
 - $\sqrt{a^2 b^2} = ab$
 - $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- Igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges valós x, y számok esetén?
 - $|x| + |y| = |x + y|$
 - $|x| |y| = |xy|$
 - $(|x|)^2 = x^2$
- Igazak-e a következő egyenlőségek tetszőleges valós x szám esetén?
 - $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
 - $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
 - $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$
- Döntsük el az alábbi következtetésekről, hogy igazak-e. A válaszokat indokoljuk!

A: Ha f páratlan, akkor $f(0) = 0$.

B: Ha $f(0) = 0$, akkor f páratlan.

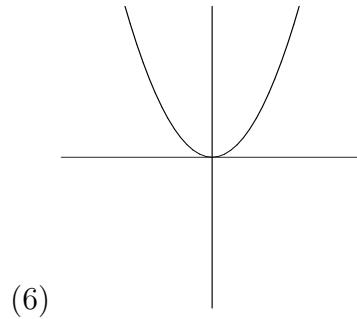
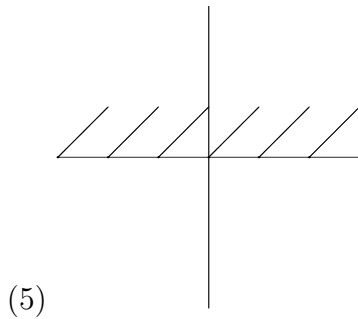
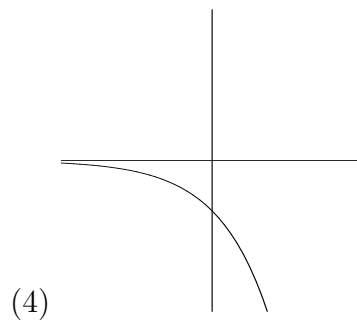
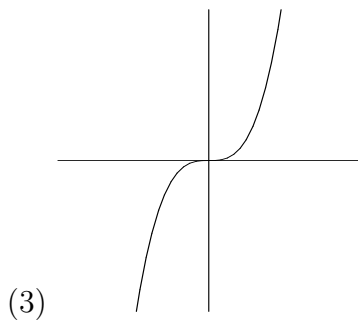
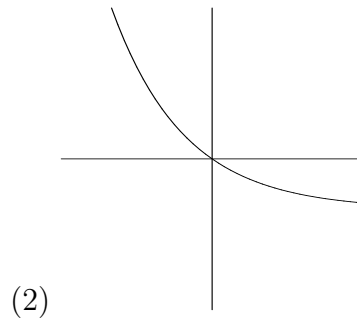
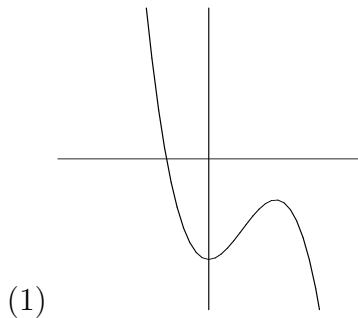
C: Ha f páros, akkor $f(-5) = f(5)$.

D: Ha $f(-5) = f(5)$, akkor f páros.

E: Ha $f(-5) \neq -f(5)$, akkor f nem páratlan.

Keressünk az előző következtetések közül olyan párokat, amelyek egymás megfordításai! Mondjunk olyan matematikai állításokat (nem feltétlenül ebből a témakörből), amelyek igazak, és a megfordításuk is igaz!
- Indokoljuk az alábbi kérdésekre adott válaszokat!
 - Lehet-e két szigorúan monoton növekvő függvény összege szigorúan monoton csökkenő?
 - Lehet-e két szigorúan monoton növekvő függvény szorzata szigorúan monoton csökkenő?

9. Színezzük be pirossal az x -tengelyen azokat az intervallumokat, ahol a függvény monoton nő. Van-e olyan függvény, amelyik az egész számegyenesen monoton nő?



10. Indokoljuk az alábbi kérdésekre adott válaszokat!

- (a) Igaz-e, hogy két szigorúan monoton csökkenő függvény összege szigorúan monoton csökkenő?
 (b) Igaz-e, hogy két szigorúan monoton csökkenő függvény szorzata szigorúan monoton csökkenő?

11. Igazak-e a következő állítások? A válaszokat indokoljuk!

- A:** x^2 páros. **B:** x^2 páratlan. **C:** x^2 nem páros.
D: Ha f és g páros, akkor $f + g$ páros.
E: Ha f sem páratlan, és g sem páratlan, akkor $f + g$ sem páratlan.

12. Igazak-e az alábbi állítások minden olyan esetben, amikor a kifejezéseknek van értelmük?

- (a) Ha $x = y$, akkor $x^2 = y^2$. (b) Ha $x^2 = y^2$, akkor $x = y$.
 (c) Ha $x = y^2$, akkor $y = \sqrt{x}$. (d) Ha $y = \sqrt{x}$, akkor $x = y^2$.
 (e) Ha $|x| + |y| = |x + y|$, akkor $xy \geq 0$. (f) Ha $xy \geq 0$, akkor $|x| + |y| = |x + y|$.

13. Ábrázoljuk az $\frac{1}{x}$ függvényt! Színezzük be pirossal az x -tengelyen azokat az intervallumokat, ahol a függvény monoton csökken! Igaz-e, hogy a függvény az egész számegyenesen monoton csökken?
14. Egy 13 jegyű kódszámban bármely 3 szomszédos számjegy összege 11. A kód második jegye 6, a tizenkettedik jegy pedig 4. Mi a 13-adik jegy?
15. A szokásos bővös négyzetben a számok összege minden sorban, oszlopban és átlóban ugyanaz. A mi négyzetünk másképp bővös. Válasszunk ki egy tetszőleges számot a négyzetben. Karikázzuk be, és a választott szám sorában és oszlopában lévő többi számot pedig húzzuk ki! Ezután a megmaradtak közül karikázzunk be egy újabb számot, és a választott szám sorában és oszlopában lévő többi számot pedig húzzuk ki! Folytassuk az eljárást, amíg lehet! A végén adjuk össze a bekarikázott számokat! Ismételjük meg az előző eljárást úgy, hogy másik számból indulunk ki! Mit tapasztalunk? Fejtsük meg a négyzet titkát!

21	24	14	25	13	17	36
29	32	22	33	21	25	44
8	11	1	12	0	4	23
10	13	3	14	2	6	25
18	21	11	22	10	14	33
16	19	9	20	8	12	31
15	18	8	19	7	11	30