

1. Tegyük fel, hogy egy úrhajó a fellövése után t másodperccel $15t^2$ métert tesz meg.
 - (a) Mennyi az átlagsebessége az első 10 másodpercben?
 - (b) Írjuk fel azt a határértéket, amelyik a 10 másodperc utáni pillanatnyi sebességét adja meg!
 - (c) Számítsuk ki a határértéket, azaz adjuk meg a 10 másodperc utáni pillanatnyi sebességet!
2. Bizonyítsuk be csak a definíciókat felhasználva az alábbi állításokat!
 - (a) Ha $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$, akkor $\lim_{x \rightarrow 3} 5 \cdot f(x) = 35$.
 - (b) Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot L$.
 - (c) Ha $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ és $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 7$, akkor $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x) + g(x)) = 10$.
 - (d) Ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 77$, akkor $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-f(x)) = -77$.
 - (e) Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = M$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = L + M$.
3. Tegyük fel, hogy egy tervezett cégnek minden hónapban lesz 1 millió Ft kiadása, a bevétele pedig az alapítás utáni x -edik hónapban $\frac{2+3x^3-x}{3000+4x^2+2x^3}$ millió Ft lesz. Azt a kérdést kell eldöntenünk, hogy vajon hosszútávon nyereséges lesz-e a cég.
 - (a) Mely határértékszámítási feladatot kell ehhez megoldanunk?
 - (b) Számítsuk ki a szükséges határértéket, és döntsük el a fenti kérdést!
4. Egy koncerten a színpad közepétől 5 méterrel észak-nyugat felé és 5 méterrel dél-kelet felé is van egy-egy hangszóró. Azt a kérdést kell eldöntenünk, hogy ha a színpadtól észeki irányban nagyon messziről hallgatjuk a koncertet, akkor milyen időkülönbséggel jut el a fülünkbe a zene a két hangszóróból.
 - (a) Mely határértékszámítási feladatot kell ehhez megoldanunk?
 - (b) Számítsuk ki a szükséges határértéket, és válaszoljunk meg a fenti kérdést!
(A hangsebességet vegyük 340 m/s-nak!)
5. Keressük meg azokat a függvényeket, amelyeknek ugyanaz a határértékük 3-ban!

(a) 5	(b) 6	(c) $\begin{cases} 5, & \text{ha } x \neq 3 \\ 6, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$
(d) $\begin{cases} 5, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 6, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$	(e) $\frac{1}{(x-3)^2}$	(f) $\frac{1}{\cos(x-3)}$
(g) $\frac{1}{\sin(x-3)}$	(h) $\frac{1}{x-3}$	(i) $\frac{x-3}{\ln x}$
6. Van-e határértéke 0-ban a következő függvényeknek? Van-e féloldali határértékük 0-ban?

(a) $[x]$	(b) $\{x\}$
-----------	-------------

7. Adjunk meg olyan függvényt, ha van ilyen, amelyeknek nincs határértéke 3-ban, továbbá
 (a) van 3-ban jobb és bal oldali határértéke; (b) nincs 3-ban jobb oldali határértéke!
8. Adjunk meg olyan függvényt, ha van ilyen, amelyeknek nincs jobb oldali határértéke 3-ban, továbbá
 (a) van 3-ban határértéke; (b) van 3-ban bal oldali határértéke!
9. Van-e határértéke 0-ban a következő függvényeknek?
 (a) $\begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
10. Mutassunk példát olyan függvényre, amelyeknek pontosan 2 pontban van határértéke!
11. Van-e határértéke végtelenben a következő függvényeknek?
 (a) $[x]$ (b) $\{x\}$ (c) $\sin x$ (d) $\operatorname{tg} x$
12. Bizonyítsuk be, hogy ha f nem konstans, periodikus függvény, akkor f -nek nincs határértéke végtelenben!
13. Mi a logikai kapcsolata a következő állításoknak, azaz melyikből következik a másik?
 (a) **P:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ **Q:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f^2(x) = 25$
 (b) **P:** $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = -5$ **Q:** $\lim_{x \rightarrow 7^-} |f(x)| = 5$
 (c) **P:** $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \infty$ **Q:** $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{f(x)} = 0$
14. Mi a logikai kapcsolata a következő állításoknak, azaz melyikből következik a másik?
 (a) **P:** $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$ **Q:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \infty$
 (b) **P:** $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$ **Q:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ vagy $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$
 (c) **P:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \infty$ **Q:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ vagy $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$
15. Oldjuk meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket!
 (a) $\frac{1}{5x+6} > -1$ (b) $|x+1| + |x-2| \leq 12$ (c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5} = 0$
 (d) $\left| \frac{x+1}{2x+1} \right| > \frac{1}{2}$ (e) $|2x-1| < |x-1|$ (f) $\sqrt{x+3} + |x-2| = 0$
16. Egy ablak egy l szélességű téglalap, és a téglalapon nyugvó félkör. Készítsünk rajzot, írjuk be az ábrába a jelöléseket! Adjuk meg az ablak kerületét és területét a téglalap h magasságának a függvényében!
17. Egy négyzet alakú terület egyik oldalán benyúlik a területre egy olyan félkör alakú tó, amelyeknek az átmérője megegyezik a négyzet oldalával. A megmaradó területet fűvel ültették be. Készítsünk rajzot, nevezzük el az ábra részeit, és adjuk meg a füves rész területét és kerületét a félkör sugarának függvényében! Adjuk meg a füves rész területét a kerületének a függvényében!