

Többváltozós analízis 1 kiegészítő feladatsor (függvénygrafikon ívhossza, hiperbolikus függvények)

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény grafikonjának ívhossza legalább $b - a$!
2. Mekkora lehet egy monoton növekvő, folytonos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény grafikonjának ívhossza?
3. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvény grafikonjának ívhosszát az $[a, b]$ intervallum fölött, ahol $-1 < a < b < 1$! Magyarázzuk meg szemléletesen az eredményt!
4. Rektifikálható-e az $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvény $[0, 1]$ fölötti grafikonja?
5. Bizonyítsuk be, hogy a $\operatorname{sh} x$ függvény páratlan, a $\operatorname{ch} x$ páros!
6. Határozzuk meg a hiperbolikus addíciós képleteket, azaz fejezzük ki $\operatorname{sh}(x + y)$ -t illetve $\operatorname{ch}(x + y)$ -t $\operatorname{sh} x$ és $\operatorname{ch} x$ segítségével!
7. a) Definiáljuk a $\operatorname{ch} x$ függvény alkalmas megszorításának inverzeként az $\operatorname{arch} x$ függvényt! Miért és milyen halmazra kell ehhez megszorítani a $\operatorname{ch} x$ függvényt?
b) Fejezzük ki az $\operatorname{arch} x$ függvényt korábban tanult függvények segítségével!
c) Határozzuk meg az $\operatorname{arch} x$ függvény deriváltját!
8. Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!
a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 3x^2}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + x^2}}$
c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$
9. Számítsuk ki az $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ integrált az $x = \sin t$ helyettesítéssel is, és ellenőrizzük, hogy ugyanaz jön-e ki mint az előadáson vett $x = \cos t$ helyettesítéssel!