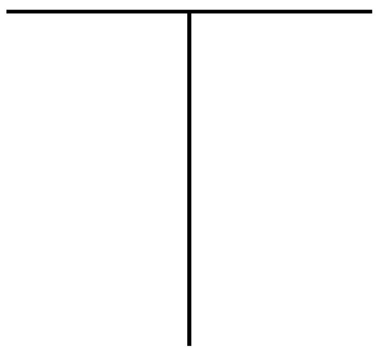
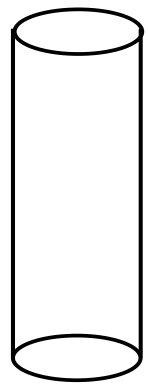
Ívhossz számítás a sörcsap mellett **Tanárklub, 2014. február 26.**

1. Melyik nagyobb: egy sörösdoboz magassága vagy a doboz egy kör alakú síkmetszetének a kerülete?

Melyik nagyobb: a „T” betű szára vagy a kalapja?





Mivel a szem függőleges irányban lassabban mozog, mint vízszintes irányban, ezért hosszabb ideig tart egy függőleges vonal végigpásztázása, mint egy ugyanolyan hosszú vízszintes vonalé. Ezért a függőleges vonalat hosszabbnak érzékeljük.

Ha egy hengert nézünk, akkor magasságát a valóságosnál hosszabbnak látjuk az átmérőjéhez képest. Ráadásul a fedőkör kerülete az átmérő π-szerese, és a közvetlen érzékelésben ez sem jelenik meg.

2. Egy sörösdobozra és egy ugyanolyan magas sörösüvegre is feltekerünk egy-egy fonalat úgy, hogy a fonal a doboz vagy az üveg aljától indul, és a doboz vagy az üveg tetejéig megy, továbbá a fonal tetszőleges pontjában a fonalhoz húzott érintő a érintési ponton áthaladó vízszintes síkkal $30°$-os szöget zár be. Melyik lesz hosszabb: a dobozra vagy az üvegre feltekert fonal?

(a) Az ívhossz kiszámítása „fizikus” módszerrel szakaszonként folytonosan differenciálható görbék esetén:

Tegyük fel, hogy egy tömegpont helyvektora a t időpontban $\mathbf{r}(t) = x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k}$. Ekkor a tömegpont sebessége $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\cdot\mathbf{i} + \dot{y}(t)\cdot\mathbf{j} + \dot{z}(t)\cdot\mathbf{k}$.

A mozgás a $t = 0$-ban kezdődik, és $t = T$-ig tart. Osszuk fel a $[0, T]$ időintervallumot n részre: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$.

Közelítsük a mozgó pont sebességének a nagyságát a t_i és t_{i+1} időpontok között $|\dot{\mathbf{r}}(t_i)|$-vel. Ekkor ebben az intervallumban a pont által megtett út közelítően $s_i = |\dot{\mathbf{r}}(t_i)|\cdot(t_{i+1} - t_i)$. Az egész utat a $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i$ összeggel közelíthetjük. Ez pedig nem más, mint az $\int\limits_0^T |\dot{\mathbf{r}}(t)|\ dt$ integrál közelítő összege.

Tehát a mozgó pont által megtett út: $\int\limits_0^T |\dot{\mathbf{r}}(t)|\ dt$.

Míg az ívhossz definíciójában a görbébe beírt poligonok hosszának a szuprémuma szerepel, addig a „fizikus” okoskodásban a pillanatnyi sebesség, azaz az érintő irányában haladtunk egy kicsit, majd visszaugrottunk a görbére.

Megjegyzés: Bizonyítható, hogy szakaszonként folytonosan differenciálható görbék esetén a fenti, „fizikus” okoskodás helyes eredményt ad az ívhosszra.

(b) Kiszámítjuk a dobozra feltekert fonal hosszát.

Helyezzük el az R sugarú, h magasságú henger alakú dobozt egy koordináta rendszerben úgy, hogy a doboz alja az xy síkon legyen, és a henger tengelye egybeessen a z tengellyel. Gondoljuk azt, hogy a fonálon egy légy mászik fel.

Ekkor a légy koordinátái a t időpontban $x(t) = R\cos t, y(t) = R\sin t, z(t)$, és legyen $z(0) = = 0, z(T) = h$.

A légy pillanatnyi sebessége a t időpontban $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\cdot\mathbf{i} + \dot{y}(t)\cdot\mathbf{j} + \dot{z}(t)\cdot\mathbf{k}$.

Mivel a sebességvektor az érintő irányába mutat, ezért $\mathbf{r}(t)$ a z tengellyel $60°$-os szöget zár be.

Tehát $\dfrac{\dot{z}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \dfrac{\dot{z}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}} = \dfrac{\dot{z}(t)}{\sqrt{R^2 + (\dot{z}(t))^2}} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

Ebből $\dot{\mathbf{z}}(t) = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

Mivel $z(0) = 0$, ezért $z(t) = \dfrac{R}{\sqrt{3}}t$.

Tehát $z(T) = h$ esetén $z(T) = \dfrac{R}{\sqrt{3}}T = h$, amiből $T = \dfrac{h\sqrt{3}}{R}$.

A görbe ívhossza:

$$L = \int_0^T |\dot{\mathbf{r}}(t)|\ dt = \int_0^{\frac{h\sqrt{3}}{R}} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\, dt = \int_0^{\frac{h\sqrt{3}}{R}} \frac{2}{\sqrt{3}}R\, dt = 2h.$$

Tehát a görbe ívhossza a henger magasságának a kétszerese.

(c) Intuitív megoldás a sörösüvegre:

A sörösüveget vízszintes síkokkal $h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ szeletekre vágjuk. A kis szeleteket hengerekkel közelítve azt kapjuk, hogy szeletenként a görbe hossza egyenlő a szelet magasságának a kétszeresével. Ezért a teljes görbe hossza egyenlő az üveg magasságának a kétszeresével.

Az előbbi szeletek egy részét hengerek helyett közelíthetjük csonkakúpokkal is. Ehhez a közelítéshez azonban előbb paraméterezni kell a csonkakúpra feltekert görbét (ez nehezebb feladat, mint a hengerre feltekert görbe paraméterezése), majd ki kell számítani a hosszát. Amennyiben a csonkakúp elég meredek ahhoz, hogy a feltételeknek megfelelő görbét illeszthessük rá, úgy a megoldás itt is az lesz, hogy a görbe hossza a csonkakúp magasságának a kétszerese.

(d) Általános megoldás olyan forgásfelületre, amelyre a feladat feltételeinek megfelelő görbe illeszthető:

A görbe érintője minden pontban $60°$-os szöget zár be a z tengellyel,
tehát $\dfrac{\dot{z}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$. Ebből $\dot{z}(t) = \dfrac{1}{2} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|$.
Ha $z(0) = 0$ és $z(T) = h$, akkor

$$h = z(T) = [z(t)]_0^T = \int_0^T \dot{z}(t)\ dt = \int_0^T \frac{1}{2} \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)|\ dt = \frac{1}{2}L.$$

Tehát az ívhossz: $L = 2h$.

Hasonló megoldás adható más hegyesszög esetén is.

(e) Intuitív megoldás henger esetén:

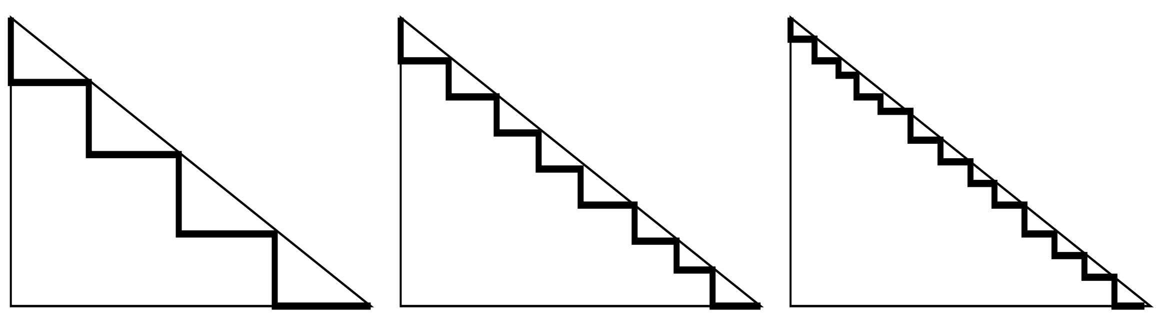
Vegyünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek egyik szöge $30°$-os, és a rövidebb befogója megegyezik a henger magasságával. Ha ennek a háromszögnek a rövidebb befogóját a henger egyik alkotójára illesztjük, majd felcsavarjuk a háromszöget a hengerre, az átfogó éppen a feladatban leírt görbe mentén csavarodik fel. Tehát a görbe hossza megegyezik az átfogó hosszával, ami ebben a háromszögben éppen a rövidebb befogó kétszerese.

Megjegyzés: Az intuitív megoldásokkal óvatosan kell bánni. Bármennyire természetes és kellemes integrálás helyett egy háromszöget felcsavarni egy hengerre, tudnunk kell, hogy az ívhossz definíciójában semmiféle „felcsavarás” nem szerepel. Az intuitív megoldások, bár szellemesek, izgalmasak, de nem helyettesítik a precíz megoldásokat.

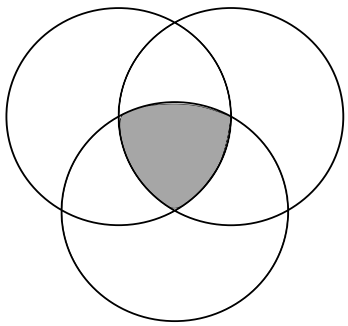
Bizonyítható, hogy amikor a derékszögű háromszöget felcsavarjuk a hengerre, akkor a feladatban megadott görbe ívhossz szerinti paraméterezését adjuk meg. Ezért egyenlő a görbe hossza a háromszög átfogójának a hosszával.

Példa hibás intuitív gondolatmenetre:

Állítás: A derékszögű háromszög átfogója egyenlő a két befogó összegével.
Bizonyítás: A rajzon látható töröttvonal függőleges szakaszainak összhossza az egyik befogó hosszával, a vízszintes szakaszainak összhossza a másik befogó hosszával egyenlő. Tehát a töröttvonal hossza a befogók hosszának összege. Ha a töröttvonalat végtelenül finomítjuk, akkor végtelenül hozzásímul az átfogóhoz, tehát a hossza tart az átfogó hosszához. Tehát a derékszögű háromszög átfogója egyenlő a két befogó összegével.



3. Helyezzünk el három kör alakú, egybevágó söralátétet úgy, hogy bármelyik két alátét metszéspontja egybeessék a harmadik alátét középpontjával. Melyik nagyobb: a három alátét metszetének területe vagy egy kör alakú alátét területének a negyede?



Megoldás: Egy teljes kör 12 darab „A”, és 6 darab „B” tartományból áll, míg a körlapok metszetében 3 darab „A”, és 1 darab „B” tartomány van.