A matematika alapjai, 2. óra

1. Mutass bijekciót
a) $\mathbb{R}$ és a $(-1;1)$ között;
b) az $\mathbb{N}$ halmaz összes részhalmazából álló halmaz (jele: $\mathscr{P}(\mathbb{N})$) és a végtelen hosszú 0–1 sorozatok között;
c) a $[0;1]$ és a $[0;1)$ intervallumok között.

2. a) Mutass injekciót $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ és $\mathbb{R}$ közt. (Tipp: használjuk a végtelen hosszú 0–1 sorozatokat.)
b) Mutass injekciót $\mathbb{R}$ és $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ közt.

3. Igazoljuk az alábbi állításokat az $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ leképezésekre:
a) Ha f és g injekció, akkor $g \circ f$ is az.
b) Ha $g \circ f$ injekció, akkor f is az, de g nem feltétlenül az. De ha ráadásul f szürjektív, akkor g is injekció.
c) Ha f és g szürjektívek, akkor $g \circ f$ is az.
d) Ha $g \circ f$ szürjektív, akkor g is az, de f nem feltétlenül. De ha ráadásul g injektív, akkor f is szürjektív.

Jelölés: Legyen f tetszőleges függvény, $X \subseteq D_f$, Y tetszőleges halmaz. Ekkor $f[X] = \{f(x)\colon x \in X\}$ (ez az X-beli elemek képeinek halmaza), és $f^{-1}[Y] = \{x \in D_f\colon f(x) \in Y\}$ (ez az Y-ba képződő elemek halmaza). Vegyük észre: f^{-1} általában nem $R_f \to D_f$ függvény (miért?), de *halmazfüggvényként* nyugodtan értelmezhetjük.

4. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
a) Micsoda $f[(-1;1)]$, $f^{-1}[\{4,5,6\}]$, $f^{-1}[(-1,1)]$, $f^{-1}[(-3;-2)]$?
b) Van-e olyan $A \subset \mathbb{R}$, melyre $f[A] = \{3,4,5\}$? És olyan, melyre $f[A] = (3;5)$? És $f^{-1}[A] = \{3,4,5\}$?

5**. Ekvivalenciatétel (Bernstein). Mutassuk meg, hogy ha az A és B halmazokra van $f\colon A \to B$ injekció és van $g\colon B \to A$ injekció, akkor van $A \to B$ bijekció is.

Definíció: A és B halmazok *ekvivalensek* (jelölésben $A \sim B$), ha létezik $f\colon A \to B$ bijekció (jelölésben $A \sim_f B$).

6. Mutassuk meg az ekvivalenciatétel segítségével (minél „lustábban”), hogy…
a) $[0;1] \sim [0;1)$; **b)** $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$; **c)** $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

7. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy $f\colon A \to B$ függvény esetén mikor teljesül minden $X,Y \subseteq A$-ra, hogy $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

8. Legyen $f\colon A \to B$. **a)** Mikor igaz $f^{-1}[f[X]] = X$ minden $X \subseteq A$-ra? **b)** Mikor igaz $f[f^{-1}[Y]] = Y$ minden $Y \subseteq B$-re?

Kitekintés: kombinatorikus jellegű halmazos, halmazműveletes feladatok

9. Mutasssuk meg, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tetszőleges halmazsorozat, akkor léteznek olyan $B_i \subseteq A_i$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $\cup A_i = \cup B_i$.

10. Legyen X egy alaphalmaz, és $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$. **a)** Mutassuk meg, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazokból a komplementálás, a $\cap$ és az $\cup$ műveletekkel legfeljebb 2^{2^n} különböző halmaz állítható elő. **b)** Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy ennyi halmaz előállítható legyen.

11. a) Fejezzük ki a $\cap$ operációt a $\setminus$ operációval. (Azaz: adjunk olyan formulát, mely csak az A, B jeleket, zárójeleket és a $\setminus$ jelet tartalmazza, és tetszőleges A, B halmaz esetén elvégezve a formula által előírt műveleteket az $A \cap B$ halmazt kapjuk eredményül.)
Definiáljuk a szimmetrikus differenciát a következőképpen: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Fejezzük ki az $\cup$, $\cap$ és $\setminus$ operációkat a **b)** $\triangle$ és $\cap$; **c)** $\triangle$ és $\cup$; **d)** $\triangle$ és $\setminus$ segítségével.
e) Igazoljuk, hogy az $\cup$ operáció nem fejezhető ki csak a $\cap$ és a $\setminus$ felhasználásával.
f) Igazoljuk, hogy a $\setminus$ operáció nem fejezhető ki csak a $\cap$ és az $\cup$ operációkkal.

12. Mutassuk meg, hogy a $\triangle$ szimmetrikus differencia kommutatív és asszociatív művelet, továbbá a $\cap$ rá vonatkozóan disztributív (azaz $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$), létezik rá nézve neutrális elem, és az $A \triangle X = B$ egyenlet X-re mindig megoldható. Mi köze mindennek a kettes számhoz?

13. a) Mutass $n \geq 2$ db. $n-1$ elemű halmazt, melyek közül bármely $n-1$-nek van közös eleme, de az összesnek nincs.
b*) Mutasd meg, hogy tetszőleges, az előző részfeladat követelményeit kielégítő n darab halmaz uniója n elemű.
c) Mutass 3 halmazt, melyek közül bármely kettőnek végtelen sok közös eleme van, de a háromnak a metszete üres.