A matematika alapjai, 2. óra

1. Mutass bijekciót
a) $\mathbb{R}$ és a $(-1;1)$ között;
b) az $\mathbb{N}$ halmaz összes részhalmazából álló halmaz (jele: $\mathscr{P}(\mathbb{N})$) és a végtelen hosszú 0–1 sorozatok között;
c) a $[0;1]$ és a $[0;1)$ intervallumok között.

Megoldás: **a)** $x \mapsto \tan(x\cdot\pi/2)$ bijekció $(-1;1)$ és $\mathbb{R}$ közt. **b)** Az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ 0–1 sorozathoz rendeljük hozzá az $\{k \in \mathbb{N}\colon a_k = 1\}$ halmazt. Ez nyilván bijekció. **c)** $f(x) := x/2$, ha $x = 1/2^n$ alakú valamely $n \geq 0$-ra, egyébként $f(x) := x$. Ez bijekció a zárt intervallumról a félig nyíltra. (Képzelhető úgy is, hogy az 1, $1/2$, $1/4$, $1/8$ stb. számok egy végtelen szálloda szobaszámai, és mindenki eggyel odébb költözik, hogy az 1-es számú fölszabaduljon. A többi számot nem piszkáljuk.)

2. **a)** Mutass injekciót $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ és $\mathbb{R}$ közt. (Tipp: használjuk a végtelen hosszú 0–1 sorozatokat.)
b) Mutass injekciót $\mathbb{R}$ és $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ közt.

Megoldás: **a)** Vegyük a látott megfeleltetést a 0–1 sorozatokkal: az $\mathbb{N}$ egy X részhalmazához rendeljük hozzá azt az $a(X)$ sorozatot, melyre $a(X)_n$ egy, ha $n \in X$, egyébként nulla; ezzel természetesen megfeleltethetjük a (végtelen hosszú) 0-1 sorozatokat $\mathbb{N}$ részhalmazainak. Minden $X \subset \mathbb{N}$ részhalmazhoz rendeljük hozzá a $0, a(X)_1 a(X)_2 a(X)_3 \ldots$ tizedestört alakú valós számot. Ez injekció $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-ből $\mathbb{R}$-be. **b)** Mivel van injekció $\mathbb{R}$ és $[0,1)$ között, elegendő minden $0 \leq r < 1$ valós r számhoz injektíven az $\mathbb{N}$ egy-egy részhalmazát hozzárendelni. Vegyük az r szám kettes számrendszerbeli felírását, és a „kettedesvessző" utáni 0-1 sorozathoz rendeljük hozzá $\mathbb{N}$ megfelelő részhalmazát. Ez injekció $[0,1)$-ből $\mathbb{N}$-be. (Miért nem bijekció?)

Más megoldás: Vegyük minden valós számnak a tizedestört alakját (amennyiben kettő is van neki, akkor a rövidebbet, ld. $1,19999999\cdots = 1,2$). Ezt kódoljuk el a következőképpen: a pozitív előjel kódja 0, a negatívé 1. Az egyes számjegyek kódja egy 10 karakterből álló sorozat, melyben helyeket 0-tól kezdve számoljuk, és melyben pontosan 1 darab 1-es van, mégpedig a számjegy értékének megfelelő helyen, a többi helyen pedig nulla áll. Végül a tizedesvessző kódja legyen 10 db 1-es. Egy valós szám tizedestört alakján végig haladva balról jobbra, a fenti kódolással minden karaktert átírhatunk csak 0-t és 1-et tartalmazó blokkokra, így a valós számhoz hozzrendelhetünk egy 0–1 sorozatot. Ez nyilván injektív leképezés (hiszen minden így megkapott 0–1 sorozat csak egy valós számból származhat: könnyű kitalálni, hogy melyikből).

3. Igazoljuk az alábbi állításokat az $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ leképezésekre:
a) Ha f és g injekció, akkor $g \circ f$ is az.
b) Ha $g \circ f$ injekció, akkor f is az, de g nem feltétlenül az. De ha ráadásul f szürjektív, akkor g is injekció.
c) Ha f és g szürjektívek, akkor $g \circ f$ is az.
d) Ha $g \circ f$ szürjektív, akkor g is az, de f nem feltétlenül. De ha ráadásul g injektív, akkor f is szürjektív.

Megoldás: **a)** Legyen $a_1 \neq a_2 \in A$. Mivel f injekció, $f(a_1) \neq f(a_2)$. Mivel g injekció, $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$, tehát $g \circ f$ injekció. **b)** Legyen $a_1 \neq a_2 \in A$. Mivel $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ (hiszen $g \circ f$ injekció), $f(a_1) \neq f(a_2)$, tehát f is injekció. Az f értékkészletén persze g is injektív kell legyen (különben $g \circ f$ nem lenne injektív), de azon kívül nem feltétlenül (tehát ha f szürjektív, akkor g tényleg injektív). Konkrét példa: $A = \mathbb{R}^+$, $B = C = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Itt $g \circ f$ injektív, de g nem az.

Jelölés: Legyen f tetszőleges függvény, $X \subseteq D_f$, Y tetszőleges halmaz. Ekkor $f[X] = \{f(x)\colon x \in X\}$ (ez az X-beli elemek képeinek halmaza), és $f^{-1}[Y] = \{x \in D_f\colon f(x) \in Y\}$ (ez az Y-ba képződő elemek halmaza). Vegyük észre: f^{-1} általában nem $R_f \to D_f$ függvény (miért?), de *halmazfüggvényként* nyugodtan értelmezhetjük.

4. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
a) Micsoda $f[(-1;1)]$, $f^{-1}[\{4,5,6\}]$, $f^{-1}[(-1,1)]$, $f^{-1}[(-3;-2)]$?
b) Van-e olyan $A \subset \mathbb{R}$, melyre $f[A] = \{3,4,5\}$? És olyan, melyre $f[A] = (3;5)$? És $f^{-1}[A] = \{3,4,5\}$?

Megoldás: **a)** $[0;1)$, $\{\pm 2, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{6}\}$, $(-1;1)$, $\emptyset$. **b)** Van, pl. $A = \{-\sqrt{3}, \pm 2, \sqrt{5}\}$. Van, pl. $A = (-\sqrt{5}, -\sqrt{3})$. Nincs, mert ha $x \in f^{-1}[A]$, akkor $-x \in f^{-1}[A]$ is kellene (hiszen x és $-x$ ugyanolyan jó ősei x^2-nek).

5.** **Ekvivalenciatétel (Bernstein).** Mutassuk meg, hogy ha az A és B halmazokra van $f\colon A \to B$ injekció és van $g\colon B \to A$ injekció, akkor van $A \to B$ bijekció is.

Ötlet: **Első ötlet:** Keressünk olyan $A = A_1 \cup A_2$ és $B = B_1 \cup B_2$ fölosztást (azaz $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = A$, B-re hasonlóan), melyre $f[A_1] = B_1$ és $g[B_2] = A_2$. Ha találunk ilyet, akkor $F(x) = f(x)$, ha $x \in A_1$, $F(x) = g^{-1}(x)$, ha

$x \in A_2$ bijekció A és B közt, és pont ilyet keresünk. Ehhez elegendő olyan $A_1 \subset A$ halmazt találni, melyre

$$A \setminus (g[B(\setminus f[A_1])]) = A_1.$$

Ehhez az A részhalmazain értelmezett,

$$h(X) = A \setminus (g[B \setminus f[X]])$$

képlettel definiált $h\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ függvény egy fixpontját keressük (azaz olyan $X \subset A$ halmazt, melyre $h(X) = X$).
Második ötlet: Lássuk be, hogy h monoton, azaz $X \subseteq X' \Rightarrow h(X) \subseteq h(X')$.
Harmadik ötlet: Legyen $X = \cap\{Y \subset A\colon h(Y) \subset Y\}$ (hívjuk jónak a $h(Y) \subseteq Y$ tulajdonságú részhalmazait az A halmaznak), és mutassuk meg, hogy $h(X) = X$ a $h(X) \subset X$, majd $X \subset h(X)$ lépésekkel.

Megoldás: Egy $X \subset A$-ra legyen

$$h(X) = A \setminus (g[B \setminus f[X]]).$$

Ekkor $X \subseteq X' \Rightarrow f[X] \subset f[X'] \Rightarrow B \setminus f[X] \supseteq B \setminus f[X'] \Rightarrow g[B \setminus f[X]] \supseteq g[B \setminus f[X']] \Rightarrow A \setminus (g[B \setminus f[X]]) \supseteq A \setminus (g[B \setminus f[X']])$, azaz $h(X) \subseteq h(X')$ (tehát h monoton). Nevezzük $Y \subset A$-t jónak, ha $h(Y) \subset Y$. Mivel minden $X \subset A$-ra $h(X) \subset A$, ez igaz $X = A$-ra is, azaz A jó; tehát van jó halmaz. Legyen $X = \cap\{Y \subset A\colon h(Y) \subset (Y)\}$ (vagyis X az összes jó halmaz metszete). Ekkor minden jó Y-ra $X \subset Y$, tehát h monotonitása miatt $h(X) \subset h(Y)$, és mivel Y jó, $h(Y) \subset Y$; összesítve: minden jó Y halmazra $h(X) \subset Y$. Emiatt $h(X)$ a jó halmazok metszetében, vagyis X-ben is bennfoglaltatik, azaz $h(X) \subset X$. Ebből h monotonitása miatt $h(h(X)) \subset h(X)$ adódik, tehát $h(X)$ is jó; ebből $X \subset h(X)$ (hiszen X a definíciója szerint része minden jó halmaznak). A kettőt összevetve $h(X) = X$ adódik. Ekkor $F(x) = f(x)$, ha $x \in X$, $F(x) = g^{-1}(x)$, ha $x \in A \setminus X$ bijekció A és B közt (azaz $X = A'$-vel kapunk megfelelő felosztást).

Definíció: A és B halmazok *ekvivalensek* (jelölésben $A \sim B$), ha létezik $f\colon A \to B$ bijekció (jelölésben $A \sim_f B$).

6. Mutassuk meg az ekvivalenciatétel segítségével (minél „lustábban”), hogy...
a) $[0;1] \sim [0;1)$; **b)** $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$; **c)** $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

Megoldás: **a)** Az identitás injekció $[0;1)$-ből $[0;1]$-be, míg $f(x) = x/2$ injekció $[0;1]$-ből $[0;1)$-be, így az ekvivalenciatétel szerint ekkor van köztük bijekció. **b)** $f(x) = x$ egy $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ injekció. Legyen p/q, $p,q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$, $q > 0$ egy racionális szám egyértelmű törtfelírása. Ha $p \geq 0$, rendeljük hozzá a $2^p \cdot 3^q$ természetes számot, míg ha $p < 0$, rendeljük hozzá az $5^{|p|} \cdot 7^q$ természetes számot. Ez injekció $\mathbb{Q}$-ból $\mathbb{N}$-be, így az ekvivalenciatétel miatt van köztük bijekció is. **c)** Láttunk már mindkét irányú injekciót a két halmaz közt, ami az ekvivalenciatétellel együtt bizonyítja az állítást.

7. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy $f\colon A \to B$ függvény esetén mikor teljesül minden $X,Y \subseteq A$-ra, hogy $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

8. Legyen $f\colon A \to B$. **a)** Mikor igaz $f^{-1}[f[X]] = X$ minden $X \subseteq A$-ra? **b)** Mikor igaz $f[f^{-1}[Y]] = Y$ minden $Y \subseteq B$-re?

Megoldás: **a)** $\iff$ f injektív. ($\Rightarrow$): ha f nem volna injektív, az ezt bizonyító $x \neq y$ és $b = f(x) = f(y)$ elemekkel az $X = \{x\}$ halmazra $f^{-1}(f[X]) = f^{-1}(\{b\}) \supseteq \{x,y\}$, ami emiatt nem X. ($\Leftarrow$): $f^{-1}(f[X]) \supset X$ nyilván mindig teljesül. Indirekte tegyük föl, hogy $\exists y \in f^{-1}(f[X])\colon y \notin X$. Ekkor $f(y) \in f[X]$ miatt $\exists x \in X\colon f(x) = f(y)$, ami $x \neq y$ miatt ellentmondás. **b)** $\iff$ f szürjektív. Nyilván $f(f^{-1}[Y]) \subset Y$. Ha f szürjektív, akkor $\forall y \in Y \exists a \in A\colon f(a) = y$, és persze ekkor $a \in f^{-1}[Y]$, és így $f(f^{-1}[Y]) = Y$. Másrészt, ha $f(f^{-1}[Y]) = Y$ minden $Y \subset B$-re, akkor $Y = B$ választással látjuk, hogy B minden eleme előáll képként.

Kitekintés: kombinatorikus jellegű halmazos, halmazműveletes feladatok

9. Mutasssuk meg, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tetszőleges halmazsorozat, akkor léteznek olyan $B_i \subseteq A_i$ páronként diszjunkt halmazok, melyekre $\cup A_i = \cup B_i$.

10. Legyen X egy alaphalmaz, és $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$. **a)** Mutassuk meg, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazokból a komplementálás, a $\cap$ és az $\cup$ műveletekkel legfeljebb 2^{2^n} különböző halmaz állítható elő. **b)** Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy ennyi halmaz előállítható legyen.

11. **a)** Fejezzük ki a $\cap$ operációt a $\setminus$ operációval. (Azaz: adjunk olyan formulát, mely csak az A, B jeleket, zárójeleket és a $\setminus$ jelet tartalmazza, és tetszőleges A, B halmaz esetén elvégezve a formula által előírt műveleteket az $A \cap B$ halmazt kapjuk eredményül.)
Definiáljuk a szimmetrikus differenciát a következőképpen: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Fejezzük ki az $\cup$, $\cap$ és $\setminus$ operációkat a **b)** $\triangle$ és $\cap$; **c)** $\triangle$ és $\cup$; **d)** $\triangle$ és $\setminus$ segítségével.
e) Igazoljuk, hogy az $\cup$ operáció nem fejezhető ki csak a $\cap$ és a $\setminus$ felhasználásával.
f) Igazoljuk, hogy a $\setminus$ operáció nem fejezhető ki csak a $\cap$ és az $\cup$ operációkkal.

12. Mutassuk meg, hogy a $\triangle$ szimmetrikus differencia kommutatív és asszociatív művelet, továbbá a $\cap$ rá vonatkozóan disztributív (azaz $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$), létezik rá nézve neutrális elem, és az $A\triangle X=B$ egyenlet X-re mindig megoldható. Mi köze mindennek a kettes számhoz?

13. **a)** Mutass $n\geq 2$ db. $n-1$ elemű halmazt, melyek közül bármely $n-1$-nek van közös eleme, de az összesnek nincs.
b***)** Mutasd meg, hogy tetszőleges, az előző részfeladat követelményeit kielégítő n darab halmaz uniója n elemű.
c) Mutass 3 halmazt, melyek közül bármely kettőnek végtelen sok közös eleme van, de a háromnak a metszete üres.