A matematika alapjai, 3. óra

1. a) Mutassuk meg, hogy nincs bijekció $\mathbb{N}$ és $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ között (utóbbi az $\mathbb{N}$ halmaz összes részhalmazából álló halmaz). **b)** Létezik vajon $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció?

Megoldás: **a)** Tegyük föl, hogy van egy f bijekció, és legyen $f(n) = A_n$ (ez az n-hez rendelt részhalmaz). Legyen $H = \{n \in \mathbb{N} \colon n \notin A_n\}$. Kétségkívül $H \subset \mathbb{N}$. Mivel f bijekció, kell legyen olyan $m \in \mathbb{N}$, melyre $H = f(m) = A_m$. Viszont ekkor $m \in H$ pontosan akkor teljesül H definíciója szerint, ha $m \notin A_m$. Ez problémás (ellentmondás), mivel $H = A_m$. Tehát nem létezhet bijekció. (Amúgy ezt nevezik Cantor-féle átlós módszernek: ha elképzelünk egy táblázatot, ahol az oszlopok a $0, 1, 2, \dots$ számokkal, a sorok az $A_0, A_1, A_2, \dots$ halmazokkal vannak indexelve, és egy sor-oszlop kereszteződés aszerint 1 vagy 0, hogy az adott szám (oszlopindex) benne van-e vagy sem az adott halmazban (sorindex), akkor a H halmazt az a 0–1 sorozat írja le, melyet a táblázat átlójának elemenkénti átállításával kapunk.) **b)** Nem. Ha lenne megfelelő f bijekció, akkor a korábban látottak alapján volna $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ bijekció is.

Definíció: A és B halmazok *ekvivalensek* (jelölésben $A \sim B$), ha létezik $f \colon A \to B$ bijekció (jelölésben $A \sim_f B$).

2. Mutassuk meg, hogy a $\sim$ ekvivalenciareláció[1] (azaz $A \sim A$ (reflexív); ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$ (szimmetrikus); ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$ (tranzitív)).

Megoldás: $A \sim A$ az identitásfüggvénnyel. Ha $A \sim_f B$, akkor $B \sim_{f^{-1}} A$ (azaz: az $A \sim B$-t igazoló $f \colon A \to B$ bijekció inverze $B \to A$ bijekció). Ha $A \sim_f B$ és $B \sim_g C$, akkor $A \sim_{g \circ f} C$. Ez utóbbit részletesebben kiírva: tegyük fel, hogy $A \sim B$ és $B \sim C$, azaz $\exists f \colon A \to B$ bijekció és $\exists g \colon B \to C$ bijekció. Ebből kéne levezetni egy $h \colon A \to C$ bijekció létezését (azaz $A \sim C$-t). Azt állítjuk, hogy $g \circ f$ jó lesz. Valóban, a 2. feladatsor 3. feladata szerint $g \circ f$ injektív és szürjektív is lesz; ennek precíz levezetését ott lehet felidézni. Az órán ezt közvetlenül is meggondoltuk, picit másképp.

„Definíció”[1] (számosságok és összehasonlításuk):

- Az előző feladat alapján a halmazok összessége egymással ekvivalens halmazok osztályaira bomlik. Az egy osztályban levő halmazok közös tulajdonságát *számosságnak* hívjuk; egy A halmaz számosságát $|A|$-val jelöljük. Ha tehát $A \sim B$, akkor azt mondhatjuk, hogy A és B számossága ugyanaz, írásban $|A| = |B|$.
- Két számosság, a és b egyenlő, ha valamely $|A| = a$ és $|B| = b$ halmazokra $A \sim B$. (Láttuk, hogy ez jóldefiniált: nem függ a mintahalmazok választásától.)
- Ha a és b számosságok, akkor $a \le b$ definíció szerint akkor, ha valamely $|A| = a$ és $|B| = b$ halmazok esetén van $A \to B$ injekció;
- Ha a és b számosságok, akkor $a < b$ definíció szerint akkor, ha $a \le b$, de $a \ne b$.

A következőkben megmutatjuk, hogy a számosságokon definiált $\le$ jóldefiniált részbenrendezés, azaz: kompatibilis az $=$-gel (nem függ a mintahalmazok választásától); reflexív ($a \le a$); tranzitív ($a \le b \le c \Rightarrow a \le c$); és antiszimmetrikus ($a \le b$ és $b \le a$ esetén $a = b$).

3. Mutassuk meg, hogy
a) ha A, A', B, B' halmazok, $|A| \le |B|$, $|A| = |A'|$ és $|B| = |B'|$, akkor $|A'| \le |B'|$;
b) tetszőleges két a, b számosságra $a \le b$ jóldefiniált, azaz teljesülése vagy nem teljesülése nem függ a mintahalmazok választásától;
c) ha a és b számosságokra $a \le b$ és $b \le a$, akkor $a = b$.
d) ha a számosság, akkor $a \le a$;
e) ha a, b és c számosságokra $a \le b$ és $b \le c$, akkor $a \le c$.

4. Következik vajon az eddigiekből, hogy…
a) ha az a, b, c számosságokra $a \le b < c$, akkor $a < c$?
b) $|A| < |B|$ és $|B| < |A|$ nem teljesülhet egyszerre?
c) tetszőleges A, B halmazokra $|A| < |B|$, $|A| = |B|$, $|A| > |B|$ közül pontosan az egyik teljesül (azaz a „kiterjesztett $<$” is trichotóm?)

Definíció: Az $\mathbb{R}$ számosságát *kontinuumnak* nevezzük, amit $\mathfrak{c}$-vel jelölünk. Az $\mathbb{N}$ számosságát *megszámlálható végtelennek* nevezzük és $\aleph_0$-lal jelöljük (ejtsd: alef null).

[1] Ez így nem teljesen korrekt, ld. pl. Komjáth Péter ‘Halmazelmélet’ jegyzetét.

5. Mit mondhatunk $\aleph_0$ és $\mathfrak{c}$ viszonyáról?

6. Mutassuk meg közvetlenül, hogy nincs bijekció $\mathbb{N}$ és a valós számok közt, másképp szólva, hogy tetszőleges valós $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozathoz található olyan valós x valós szám, melyre $\forall i \in \mathbb{N}\colon x \neq a_i$. (Apropó: miért ugyanaz a kétféle megfogalmazás?)

Megoldás: Legyen a_n tizedestört felírásában a tizedesvessző utáni k-adik számjegy $a_{n,k}$. Legyen x az a $0{,}x_1x_2x_3,\ldots$ tizedestört-alakú szám, melyben $x_k = 1$, ha $a_{k,k} \neq 1$, és $x_k = 2$, ha $a_{k,k} = 1$. Ekkor tetszőleges n-re az a_n szám és x eltér egymástól a tizedesvessző utáni n-edik jegyben, tehát $\forall n \geq 1\colon x \neq a_n$. $|\mathbb{R}|$-re nézve ez azt jelenti, hogy az nem megszámlálható végtelen (ugyanis tetszőleges $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ leképezés esetén az $a_n = f(n)$ sorozatra alkalmazva a fenti eljárást találunk bizonyítékot arra, hogy f nem szürjektív).

7. Mutassunk bijekciót (vagy igazoljuk a létezését)...
a) $(a_1;a_2) \times (b_1;b_2)$ és $(c_1;c_2) \times (d_1;d_2)$ között[2], ahol $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ és $d_1 < d_2$;
b) $(-\pi/2;\pi/2) \times (-\pi/2;\pi/2)$ és $\mathbb{R}^2$ között;
c) $(0,1)$ és $(0,1) \times (0,1)$ között.
d) Mit jelent ez $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^2$ számosságára nézve?

Megoldás: **a)** $(x,y) \mapsto ((x-a_1) \cdot \frac{c_2-c_1}{a_2-a_1} + c_1, (y-b_1) \cdot \frac{d_2-d_1}{b_2-b_1} + d_1)$ (először eltoljuk az első téglalapot úgy, hogy a bal alsó sarka az origóba essen, aztán fölnagyítjuk mindkét koordinátairányban úgy, hogy akkora legyen, mint a céltéglalap, aztán eltoljuk úgy, hogy a bal alsó sarka a (c_1, d_1)-be essen).
b) $(x,y) \mapsto (\tan(x), \tan(y))$.
c) Kétirányú injekciót mutatunk, ami Bernstein-tétele szerint igazolja bijekció létezését is. Legyen $f\colon (0,1) \to (0,1) \times (0,1)$ az $x \mapsto (x, \frac{1}{2})$ leképezés, ami nyilván injekció. A másik irány érdekesebb. Legyen most $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$. Vegyük x-nek és y-nak a tizedestörtalakját (ha kettő is van nekik, akkor a rövidebbet), ezek $x = 0{,}x_1x_2x_3,\ldots$, $y = y_1y_2y_3\ldots$. Legyen $g((x,y)) = 0{,}x_1y_1x_2y_2x_3y_2\ldots$ az x és y tiezedesjegyeinek összefésülésével kapott szám. Ekkor g injekció, hiszen ha $(x,y) \neq (x',y')$, akkor a tizedestörtalakjuk is eltérő, és ezért az összefésülésükkel kapott tizedestörtek is mások (nem csak ránézésre, hanem ténylegesen is: az összefésülés után nem lehet probléma avégtelen sok 9-re végződő számokkal, mert az összefésült szám csak akkor végződhetne végtelen sok 9-re, ha a kiindulási x és y is végtelen sok 9-re végződne, de egyik sem teszi). Ezzel készen vagyunk.
d) Ennek és korábbi megfontolások fényében $|\mathbb{R} = |(0,1)| = |(0,1) \times (0,1)| = |\mathbb{R}^2||$. Ebből az is következik, hogy $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ minden $n \geq 1$-re, tehát a halmazelméleti számosságfogalom nem mond semmit egy alakzat (ponthalmaz) dimenziójáról.

[2] Ez két nyílt téglalap.