A matematika alapjai, 4. óra

1. Igaz vagy hamis?
a) $x \in y \in z \Rightarrow x \in z$; **b)** $x \in y \subseteq z \Rightarrow x \in z$; **c)** $x \subseteq y \in z \Rightarrow x \in z$; **d)** $x \subseteq y \subseteq z \Rightarrow x \in z$;
e) $x \in y \in z \Rightarrow x \subseteq z$; **f)** $x \in y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$; **g)** $x \subseteq y \in z \Rightarrow x \subseteq z$; **h)** $x \subseteq y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$.

Definíció: Ha A halmaz, $\mathscr{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ az A *hatványhalmaza* (azaz $\mathscr{P}(A)$ az A részhalmazainak a halmaza).

2. Legyen A egy véges, n elemű halmaz. Hány eleme van $\mathscr{P}(A)$-nak?

Megoldás: 2^n, hiszen A minden eleme vagy benne van egy részhalmazban, vagy nem; így 2^n különböző részhalmazt lehet összeállítani (erre emlékezhetünk Véges matematika 1-ből is).

3. Egy H halmazra legyen $\mathscr{P}^1(H) = \mathscr{P}(H)$, és legyen $\mathscr{P}^k(H) = \mathscr{P}(\mathscr{P}^{k-1}(H))$.
a) Micsoda $\mathscr{P}(\emptyset)$? És $\mathscr{P}(\{\emptyset\})$? És $\mathscr{P}^3(\emptyset)$?
b) Hány eleme van $\mathscr{P}^n(\emptyset)$-nek?

Megoldás: **a)** $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ **b)** Ha n-szer végezzük el a hatványhalmazképzést az üres halmazból indulva, az n-edik lépésben megkapott halmaz elemszáma T_n, ahol $T_0 := 0$, $T_n := 2^{T_{n-1}}$. Az első néhány lépésben előállított halmazok elemszámai $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^{16} = 65536$, a hatodik lépésnél pedig 2^{65536}, ami *nagyon* sok (sokkal-sokkal több, mint ahány atom van a becslések szerint a látható univerzumban), az utána következőkről nem is beszélve.

4*. **Cantor-tétel.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges (esetleg végtelen) X halmazra $|X| < |\mathscr{P}(X)|$.

Megoldás: Az $f: X \to \mathscr{P}(X)$, $f(x) = \{x\}$ leképezés injekció, tehát $|X| \leq |\mathscr{P}(X)|$. Indirekt módon tegyük föl, hogy van $f: X \to \mathscr{P}(X)$ bijekció. Legyen $H = \{x \in X : x \notin f(x)\}$; persze $H \subset X$, más szóval, $H \in \mathscr{P}(X)$. Mivel f bijektív, létezik $h \in X$, melyre $H = f(h)$. Ekkor $h \in H \iff h \notin f(h) = H$, ami ellentmondás[1].
Megjegyzés: Véges, mondjuk n elemű X halmazra persze $|X| = n < 2^n = |\mathscr{P}(X)|$ miatt az állítás triviális, de a fenti bizonyítás kulcsfontosságú mozzanata, hogy bármilyen X halmazra működik.

5. Hányféleképpen tudod bizonyítani eddig, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható (avagy $c > \aleph_0$)?

Megoldás: Láttuk, hogy $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ (van kétirányú injekció, tehát alkalmazható az ekvivalenciatétel) és Cantor tétele alapján ismert $|\mathbb{N}| < |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ igazolja az állítást; továbbá konstrukcióval is láttuk, hogy a valós számok nem fölsorolhatók (minden valós számsorozathoz (azaz $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényhez) adtunk olyan valós számot, ami nincs benne (azaz a függvényünk nem lehet szürjektív)).

6. Van-e a c-nél nagyobb számosság? Tudsz konkrétan olyan halmazt mutatni, aminek nagyobb a számossága, mint $\mathbb{R}$-nek? És annál is nagyobbat? Vajon van olyan, hogy legnagyobb számosság?

Megoldás: Van, tudunk: Cantor tétele szerint $|\mathscr{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}| = c$. Van nagyobb: ugyanúgy a Cantor-tétel miatt $|\mathscr{P}^n(\mathbb{R})| > |\mathscr{P}^{n-1}(\mathbb{R})|$, tehát végtelen sok különböző végtelen számosságot találtunk. Nincs legnagyobb számosság, hiszen ha $|A| = a$ egy számosság, akkor $|\mathscr{P}(A)| > a$ egy szigorúan nagyobb számosság.

„Definíció:” Az $\aleph_0$-nál nagyobb számosságok közül a legkisebbet $\aleph_1$-nek nevezzük. Hasonlóan, az $\aleph_n$ számosság az a legkisebb számosság, ami nagyobb $\aleph_{n-1}$-nél[2].

7. Mit tudunk $\aleph_1$ és c viszonyáról ($=, \leq, \geq, <, >, \ldots$)?

Megoldás: Mivel $c > \aleph_0$ és $\aleph_1$ a legkisebb $\aleph_0$-nál nagyobb számosság, $\aleph_1 \leq c$. Hogy itt $<$ vagy $=$ van-e, azt ezen a ponton nem tudjuk.

8. Mutasd meg, hogy csak megszámlálható sok diszjunkt körlapot lehet elhelyezni a síkon.

9. Mutassuk meg, hogy nem lehet lefedni a síkot c-nél kevesebb egyenessel.

10. Hány véges részhalmaza van $\mathbb{N}$-nek?

Megoldás: Az $[n] := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak 2^{n+1} részhalmaza van. Soroljuk föl az n-edik lépésben az $[n]$ összes részhalmazát ($n = 0, 1, 2, \ldots$); ez minden lépésnél véges sok elem fölsorolását igényli, tehát így összesen megszám-

---

[1] Ez amúgy a Cantor-féle átlós módszer általánosítása: ahogy korábban az $\mathbb{N}$ és $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ közti bijekciót feltételezve jutottunk ellentmondásra, itt is elképzelhetjük az analóg táblázatot, és annak átlója mentén megváltoztatjuk az eleme–nem eleme jelölőket.

[2] Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ez a definíció értelmes. Például annak sincs értelme, hogy „a 2-nél nagyobb valós számok közül a legkisebb”. Belátható azonban, hogy a végtelen számosságokra a fenti definíció értelmes (de ettől eltekintünk ebben a kurzusban).

lálható sok halmazt sorolunk föl. Másrészt ezzel minden véges részhalmazt fölsoroltunk, hiszen egy $H \subset \mathbb{N}$ *véges* részhalmaznak van egy legnagyobb $h \in H$ eleme, és ekkor $H \subseteq [h]$, tehát H-t fölsoroltuk a h-adik lépésben. (Kiegészítő kérdések: hányszor soroltuk föl az egyes halmazokat? Ha nem pontosan egyszer, az baj? Ha igen, mit lehetne tenni, ha pontosan egyszer szeretnénk?)

Más megoldás: Minden véges részhalmazhoz rendeljük hozzá a megfelelő 0–1 sorozatot. Egy nullát és egy tizedesvesszőt elétéve tekintsük a sorozatot egy tizes számrendszerben fölírt valós számnak. Ez véges hosszúságú (mivel véges sok egyes van benne), tehát valójában racionális. Ezzel kaptunk az $\mathbb{N}$ véges részhalmazainak halmazából egy injekciót a megszámlálható $\mathbb{Q}$ halmazba, tehát megszámlálható sok véges részhalmaza van $\mathbb{N}$-nek.

Más megoldás: Legyenek $p_1 \leq p_2 \leq \dots$ a prímszámok. Egy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{N}$ véges halmaz $H = \{a_1, \dots, a_k\}$ alakú ($k \geq 1$), ahol $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. Rendeljük H-hoz a $\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \in \mathbb{N}$ számot, valamint legyen az üres halmaz képe a 0. Ez injekció lesz $\mathbb{N}$-be, hiszen a számelmélet alaptétele szerint a prímtényezős felbontás egyértelmű, így különböző részhalmazokhoz különböző számokat rendeltünk. Tehát az $\mathbb{N}$ véges részhamlazaiból álló halmaz számossága legfeljebb $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ennyi persze van is, hiszen pl. $n \mapsto \{n\}$ injekció $\mathbb{N}$-ből a véges részhalmazok halmazába. Tehát a válasz $\aleph_0$.

Kiegészítő feladatok.

11. a) Hány diszjunkt O betűt lehet leírni a síkra, ha ugyanakkorák? És ha különböző méretűek is lehetnek?
b*) És T betűt?

12. Mutasd meg, hogy a síkon több mint kontinuum sok konvex részhalmaz van.