A matematika alapjai, 5. óra

1. a) Tegyük fel, hogy az A, B halamzokra $|A|=3$, $|B|=5$. Készíts a segítségükkel olyan $H^{\cdot}$ és H^{+} halmazokat, melyekre $|H^{\cdot}|=|A|\cdot|B|$ és $|H^{+}|=|A|+|B|$.
b) Legyen C az összes különböző $A\to B$ függvény halmaza. Hány eleme van C-nek?

Definíció (rendezett pár): az (x,y) rendezett pár alatt az $\{\{x\},\{x,y\}\}$ halmazt értjük.

2. Mutasd meg, hogy $(x,y)=(u,v) \iff x=u$ és $y=v$.

Definíció (függvény): egy f függvény olyan halmaz, melynek minden eleme rendezett pár, és teljesül rá, hogy tetszőleges x,y,z elemekre $(x,y)\in f$ és $(x,z)\in f$ teljesülése esetén $z=y$ is teljesül. (Ha f-et a szokásos módon gondoljuk egy $A\to B$ leképezésnek, akkor a fenti halmaz az $\{(a,f(a))\colon a\in A\}$ alakú párok halmazát fogja meg, amiből kiolvasható a hozzárendelés: minden párnál annak első eleméhez rendeljük a második elemét.) Vegyük észre, hogy ebben a definícióban nincs explicit módon megadva, hogy f honnan hova képez. Akkor mondjuk, hogy f az A halmazt képezi a B halmazba (azaz f egy $A\to B$ függvény), ha $D_f:=\{x\colon \exists y\colon (x,y)\in f\}=A$, és $R_f:=\{y\colon \exists x\colon (x,y)\in f\}\subseteq B$.

3. Van-e olyan f függvény, melyre $D_f=\varnothing$ vagy $R_f=\varnothing$?

Jelölés: ${}^{B}A:=\{f\colon B\to A\}$ jelöli az összes $B\to A$ függvény halmazát.

Definíció (műveletek számosságokkal (más néven számosságaritmetika), véges eset):
- **Összeadás:** ha a és b számosságok, $a+b$ legyen $|A\cup B|$, ahol $|A|=a$, $|B|=b$ és $A\cap B=\varnothing$.
- **Szorzás:** ha a és b számosságok, ab legyen $|A\times B|$, ahol $|A|=a$, $|B|=b$.
- **Hatványozás:** ha a és b számosságok, a^b legyen $\left|{}^{B}A\right|$, ahol $|A|=a$ és $|B|=b$.

4. Vajon a fent definiált számosságműveletek jóldefiniáltak?

5. (A számosságműveletek azonosságai.) Lássuk be, hogy tetszőleges a, b, c számosságok esetén
a) $a+0=a$; **b)** $a+b=b+a$; **c)** $(a+b)+c=a+(b+c)$;
d) $1\cdot a=a$; **e)** $ab=ba$; **f)** $(ab)c=a(bc)$;
g) $a^0=1$; **h)** $0^a=0$ ha $a\neq 0$; **i)** $a^1=a$; **j)** $1^a=1$;
k) $(a+b)c=ac+bc$; **l)** $(ab)^c=a^cb^c$; **m)** $(a^b)^c=a^{bc}$; **n)** $a^{b+c}=a^ba^c$.

6. Mennyi **a)** $\aleph_0+1$; **b)** $\aleph_0+\aleph_0$; **c)** $\aleph_0+\mathfrak{c}$; **d)** $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}$; **e)** $\aleph_0\cdot\aleph_0$; **f)** $\aleph_0\cdot\mathfrak{c}$?

7. Mutassuk meg, hogy **a)** tetszőleges[1] A halmazra $|\mathscr{P}(A)|=2^{|A|}$; **b)** tetszőleges a számosságra $a<2^a$.

8. Legyenek a és b számosságok.
a) Igaz-e, hogy $a+b=a\Leftrightarrow b=0$?
b) Igaz-e, hogy $a\cdot b=a\Leftrightarrow b=1$?
c) Hogyan lehetne szokásos tulajdonságokkal rendelkező számosságkivonást vagy számosságosztást definiálni?

A számosságműveletek (számosságaritmetika) és a számosságrendezés (in)kompatibilitása.

9. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c, d számosságokra $a\leqslant b$ és $c\leqslant d$, akkor
a) $a+c\leqslant b+d$;
b) $ac\leqslant bc$;
c) $a^c\leqslant b^d$, kivéve, ha $a=b=c=0$, $d>0$ (miért kivétel ez?).

10. Mutassunk példát olyan $a<b$ és $c\leqslant d$ számosságokra, melyekre **a)** $a+c=b+d$; **b)** $ac=bd$.

[1] Ha $|A|=n$, ez volt Véges matematika 1-ből. De ez itt már végtelen matematika :)