A matematika alapjai, 5. óra

1. a) Tegyük fel, hogy az A, B halamzokra $|A| = 3$, $|B| = 5$. Készíts a segítségükkel olyan $H^{\cdot}$ és H^{+} halmazokat, melyekre $|H^{\cdot}| = |A| \cdot |B|$ és $|H^{+}| = |A| + |B|$.
b) Legyen C az összes különböző $A \to B$ függvény halmaza. Hány eleme van C-nek?

Megoldás: Ha A és B diszjunktak, akkor $H^{+} = A \cup B$ persze 8 elemű. Ha nem diszjunktak, akkor vegyük az $A' = \{(\varnothing, x)\colon x \in A\}$ és a $B' = \{(\{\varnothing\}, x)\colon x \in B\}$ halmazokat. Ekkor A' és B' diszjunktak (elemeik rendezett párok, és a párok első elemei eltérnek A', illetve B'-beli párok esetén, tehát nem ugyanazok), így $H^{+} = A' \cup B'$ mindig jó. $H^{\cdot} = A \times B$ mindig jó (nem kell, hogy A és B diszjunktak legyenek).

Definíció (rendezett pár): az (x, y) rendezett pár alatt az $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ halmazt értjük.

2. Mutasd meg, hogy $(x, y) = (u, v) \iff x = u$ és $y = v$.

Megoldás: Technikai okokból jelöljük a rendezett párokat kerek zárójel helyett $\langle ., . \rangle$-vel a megoldás erejéig. Ha $x = u$ és $y = v$, akkor nyilván $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. A megfordításhoz tegyük föl, hogy $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. Esetszétválasztással folytatjuk: ha $x = y$, akkor $\langle x, y\rangle = \{\{x\}\}$ egy egyelemű halmaz, így a jobb oldali halmaz is egyelemű, ami csak úgy lehet, ha $u = v$ és $\langle u, v\rangle = \{\{u\}\}$. Ekkor az $\{\{x\}\} = \{\{u\}\}$ egyenlőségből indulva, az egyenlőség definícióját kétszer alkalmazva kapjuk, hogy $\{x\} = \{u\}$ és $x = u$, tehát valóban $x = u$ és $y = x = u = v$. Ha $x \neq y$, akkor $\langle x, y\rangle$ kételemű halmaz, és emiatt $\langle u, v\rangle$ is az, tehát $u \neq v$. Az egyenlőség definíciója szerint $\{x\} = \{u\}$ és $\{x, y\} = \{u, v\}$ vagy $\{x\} = \{u, v\}$ és $\{x, y\} = \{u\}$ következik, de az utóbbi nem állhat fent, mert nem egyeznek az elemszámok. Az előbbi esetben az egyenlőség definíciója szerint $x = u$ következik, amiből $\{x, y\} = \{u, v\} = \{x, v\}$, tehát szintén az egyenlőség definíciója szerint $y = v$ ($x = v$ nem lehet, mert $x = u$ és $u \neq v$).

Definíció (függvény): egy f függvény olyan halmaz, melynek minden eleme rendezett pár, és teljesül rá, hogy tetszőleges x, y, z elemekre $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ teljesülése esetén $z = y$ is teljesül. (Ha f-et a szokásos módon gondoljuk egy $A \to B$ leképezésnek, akkor a fenti halmaz az $\{(a, f(a))\colon a \in A\}$ alakú párok halmazát fogja meg, amiből kiolvasható a hozzárendelés: minden párnál annak első eleméhez rendeljük a második elemét.) Vegyük észre, hogy ebben a definícióban nincs explicit módon megadva, hogy f honnan hova képez. Akkor mondjuk, hogy f az A halmazt képezi a B halmazba (azaz f egy $A \to B$ függvény), ha $D_f := \{x\colon \exists y\colon (x, y) \in f\} = A$, és $R_f := \{y\colon \exists x\colon (x, y) \in f\} \subseteq B$.

3. Van-e olyan f függvény, melyre $D_f = \varnothing$ vagy $R_f = \varnothing$?

Megoldás: Van, pontosan egy darab, ugyanis akár $D_f = \varnothing$, akár $R_f = \varnothing$, f-ben nem lehet egyetlen rendezett pár sem (hiszen akkor azok első elemei D_f-ben lennének, második elemeik R_f-ben), tehát $f = \varnothing$. Az üres halmaz ugyanakkor kielégíti a függvény definícióját (nincs benne egyetlen elem sem, ami megsértené azt), és $D_{\varnothing} = R_{\varnothing} = \varnothing$.

Jelölés: ${}^{B}A := \{f\colon B \to A\}$ jelöli az összes $B \to A$ függvény halmazát.

Definíció (műveletek számosságokkal (más néven számosságaritmetika), véges eset):

- **Összeadás:** ha a és b számosságok, $a + b$ legyen $|A \cup B|$, ahol $|A| = a$, $|B| = b$ és $A \cap B = \varnothing$.
- **Szorzás:** ha a és b számosságok, ab legyen $|A \times B|$, ahol $|A| = a$, $|B| = b$.
- **Hatványozás:** ha a és b számosságok, a^b legyen $\left|{}^{B}A\right|$, ahol $|A| = a$ és $|B| = b$.

4. Vajon a fent definiált számosságműveletek jóldefiniáltak?

5. (A számosságműveletek azonosságai.) Lássuk be, hogy tetszőleges a, b, c számosságok esetén

a) $a + 0 = a$;	**b)** $a + b = b + a$;	**c)** $(a + b) + c = a + (b + c)$;	
d) $1 \cdot a = a$;	**e)** $ab = ba$;	**f)** $(ab)c = a(bc)$;	
g) $a^0 = 1$;	**h)** $0^a = 0$ ha $a \neq 0$;	**i)** $a^1 = a$;	**j)** $1^a = 1$;
k) $(a + b)c = ac + bc$;	**l)** $(ab)^c = a^c b^c$;	**m)** $(a^b)^c = a^{bc}$;	**n)** $a^{b+c} = a^b a^c$.

Megoldás: **a)** Legyen $|A| = a$. Mivel $|\varnothing| = 0$ és A és $\varnothing$ diszjunktak, $a + 0 = |A \cup \varnothing| = |A| = a$ adódik.
b) -
c) Megfelelő A, B, C mintahalmazok esetén azt kell megmutatni, hogy az $(A \cup B) \cup C$ és az $A \cup (B \cup C)$ halmazok közt van bijekció. Mivel az unió asszociatív, ezek a halmazok de facto ugyanazok.
d) Legyen $|A| = a$, $E = \{1\}$, amikor is $|E| = 1$. Mivel $E \times A = \{(1, a)\colon a \in A\}$, $E \times A \to A$ bijekció például az $(1, a) \mapsto a$ hozzárendelés, így $1 \cdot a = |E \times A| = |A| = a$ adódik.
e) -
f) Most az $(A \times B) \times C = \{((a; b); c)\colon a \in A, b \in B, c \in C\}$ és az $A \times (B \times C) = \{(a; (b; c))\colon a \in A, b \in B, c \in C\}$ halmazok

közt kell bijekciót adni. Ezek a halmazok nem azonosak, de az $((a;b);c) \mapsto (a;(b;c))$ leképezés bijekció köztük.
g) Legyen A egy a számosságú halmaz. $a^0 = |\{f\colon \emptyset \to A\}| = |\{\emptyset\}| = 1$ (idézzük föl: egyetlen olyan függvény van, melyre $D_f = \emptyset$, mégpedig $\emptyset$).
h) $0^a = |\{f\colon A \to \emptyset\}|$, és ha $A \neq \emptyset$, akkor egy ilyen függvényben minden $x \in A$ elemhez kell legyen olyan pár, melynek első eleme éppen x, a második pedig eleme az üres halmaznak. Ilyen párok persze nincsenek, tehát nincs ilyen függvény. (Az üres függvény nem jó itt, mert annak értelmezési tartománya az üres halmaz, nem pedig A.) Az $A = \emptyset$ esetet lefedi az előző részfeladat.
i) Legyen $|A| = a$ és $B = \{1\}$ (ekkor persze $|B| = 1$). Ekkor egy $f \in {}^BA$ függvényt egyértelműen meghatározza az, hogy melyik $a \in A$ elem a képe az $1 \in B$ elemnek; ezzel nyilván bijekciót kapunk ${}^BA$ és A közt (egy $f \in {}^BA$ függvényhez rendeljük hozzá az $f(1) \in A$ elemet), tehát $a^1 = |{}^BA| = |A| = a$. (És ha $A = \emptyset$?)
j) -
k) -
l) Legyenek A, B és C alkalmas mintahalmazok. Az állítást visszavezetve a definíciókra az igazolandó, hogy

$$\left|{}^C(A \times B)\right| = \left|\left({}^CA\right) \times \left({}^CB\right)\right|$$

Egy $f\colon C \to A \times B$ függvényhez rendeljük azt az $(f_1, f_2) \in ({}^CA) \times ({}^CB)$ függvénypárt, melyre $f_1(c)$ az $f(c) \in A \times B$ rendezett pár első eleme, $f_2(c)$ pedig az $f(c)$ rendezett pár második eleme (más szóval: az f-hez hozzárendeljük a koordinátafüggvényeiből álló párt). Ez bijekció.
m) -
n) -

6. Mennyi **a)** $\aleph_0 + 1$; **b)** $\aleph_0 + \aleph_0$; **c)** $\aleph_0 + \mathfrak{c}$; **d)** $\mathfrak{c} + \mathfrak{c}$; **e)** $\aleph_0 \cdot \aleph_0$; **f)** $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}$?

Megoldás: **a)** Legyen a két számosság diszjunkt mintahalmaza $\mathbb{N}$ és $A = \{a\}$. Ekkor az $x \mapsto x+1$, ha $x \in \mathbb{N}$, illetve $x \mapsto 0$, ha $x = a$ bijekció $\mathbb{N} \cup A$ és $\mathbb{N}$ közt, így $\aleph_0 + 1 = |\mathbb{N}| + |A| = |\mathbb{N} \cup A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ adódik.
b) Legyen például A a páros, B a páratlan természetes számok halmaza. Láttuk (könnyű), hogy $|A| = |B| = \aleph_0$. Mivel A és B diszjunktak, továbbá $|A \cup B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, a válasz $\aleph_0$.
c) Legyen $A = \mathbb{N}$ és $B = (0;1) \subset \mathbb{R}$. Ekkor $|A| = \aleph_0$, $B = \mathfrak{c}$, és $(0;1) \subset A \cup B \subset \mathbb{R}$ miatt $\mathfrak{c} = |(0;1)| \leqslant |A \cup B| \leqslant |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, ahonnan a Bernstein-féle ekvivalenciatételből adódik, hogy a válasz $\mathfrak{c}$.
d) -
e) -

7. Mutassuk meg, hogy **a)** tetszőleges[1] A halmazra $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$; **b)** tetszőleges a számosságra $a < 2^a$.

8. Legyenek a és b számosságok.
a) Igaz-e, hogy $a + b = a \Leftrightarrow b = 0$?
b) Igaz-e, hogy $a \cdot b = a \Leftrightarrow b = 1$? (Kössük ki, hogy $a \neq 0$, mert úgy túl könnyű.)
c) Hogyan lehetne szokásos tulajdonságokkal rendelkező számosságkivonást vagy számosságosztást definiálni?

Megoldás: **a)** $\Rightarrow$ nem igaz, például $a = b = \aleph_0$ ellenpélda. A $\Leftarrow$ persze igaz, lásd a korábbi feladatban.
b) $\Rightarrow$ nem igaz, például $a = b = \aleph_0$ ellenpélda. A $\Leftarrow$ persze igaz, lásd a korábbi feladatban.
c) Értelmes kivonást nehéz volna. Hiszen ha lehetne, és valamely a és b számosságokra $a + b = a$, akkor a-t kivonva $a + b - a = a - a$ volna, tehát $b = 0$ következne. De az imént láttuk, hogy ez nem feltétlenül van így. Ez a feladat arra mutat rá, hogy noha a számosságokat gondolhatjuk valamilyen értelemben a természetes számok (mint „mennyiségek”) kiterjesztésének, a végtelen számosságoknál néhány jól megszokott tulajdonság már nem fog teljesülni.

A számosságműveletek (számosságaritmetika) és a számosságrendezés (in)kompatibilitása.

9. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c, d számosságokra $a \leqslant b$ és $c \leqslant d$, akkor
a) $a + c \leqslant b + d$;
b) $ac \leqslant bc$;
c) $a^c \leqslant b^d$, kivéve, ha $a = b = c = 0$, $d > 0$ (miért kivétel ez?).

Megoldás: **a)** Legyenek A, B, C, D megfelelő mintahalmazok ($A \cap C = B \cap D = \emptyset$ is kell az összeadás miatt). Mivel $a \leqslant b$ és $c \leqslant d$, létezik $f\colon A \to B$ és $g\colon C \to D$ injekció. Legyen h az a $A \cup C \to B \cup D$ leképezés, melyre $h(x) = f(x)$, ha $x \in A$, és $h(x) = g(x)$, ha $x \in C$. Mivel A és C diszjunktak, h-t jól definiáltuk (egy elemnek sem akarunk kétféle képet adni); továbbá mivel f és g injekciók és B és D diszjunktak (tehát egy $x \in A$ és egy $y \in C$ elempár képe sem eshet egybe), h is injekció.

[1] Ha $|A| = n$, ez volt Véges matematika 1-ből. De ez itt már végtelen matematika :)

10. Mutassunk példát olyan $a < b$ és $c \leqslant d$ számosságokra, melyekre **a)** $a + c = b + d$; **b)** $ac = bd$.