A matematika alapjai, 6. óra

1. Legyen $I=\{1,2,3\}$, és legyenek A_1, A_2, A_3 nemüres, véges halmazok. Legyen X az összes olyan f függvény halmaza, melynek értelmezési tartománya I, továbbá $f(i)\in A_i$ minden $i\in\{1,2,3\}$-ra.
a) Mennyi $|X|$?
b) Mutass bijekciót X és $A_1\times A_2\times A_3$ között.

2. **a)** Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ nemüres halmazok. Hogyan tudnád értelmezni a $\times_{n\in\mathbb{N}} A_n$ végtelen Descartes szorzatot?
b) És ha minden $r\in\mathbb{R}$ számra adott egy $A_r\neq\varnothing$ halmaz, akkor hogyan értelmeznéd a $\times_{n\in\mathbb{N}} A_n$ szorzatot?

Definíció (műveletek számosságokkal, általános eset):

- **Általános számosságösszeadás (akár végtelen soké):** ha $\{a_i\colon i\in I\}$ számosságok halmaza, akkor $\sum_{i\in I} a_i$ legyen $|\cup_{i\in I} A_i|$, ahol $|A_i|=a_i$, és az $A_i\colon i\in I$ halmazok páronként diszjunktak.
- **Általános Descartes-szorzat:** tetszőleges $\{A_i\colon i\in I\}$ halmazrendszer esetén
$$\prod_{i\in I} A_i := \{f\colon f \text{ függvény}, D_f=I, \text{ és } f(i)\in A_i \text{ minden } i\in I\text{-re}\}.$$
$\prod_{i\in I} A_i$ elemeit az $\{A_i\colon i\in I\}$ rendszerhez tartozó *kiválasztási függvényeknek* nevezzük[1].
- **Általános számosszágszorzás (akár végtelen soké):** ha $\{a_i\colon i\in I\}$ számosságok halmaza, akkor $\prod_{i\in I} a_i$ legyen $|\prod_{i\in I} A_i|$, ahol $|A_i|=a_i$.

3. Lássuk be, hogy
a) két számosság összege és szorzata jóldefiniált;
b) akármilyen $\{a_i\colon i\in I\}$ számossághalmazra $\sum_{i\in I} a_i$ és $\prod_{i\in I} a_i$ jóldefiniált;
c) két számosság esetén a kétféle szorzatdefiníció ugyanazt az eredményt adja;
d) véges sok véges szám(osság)ra ugyanazt kapjuk, mintha véges számokkal végeznénk el a szokásos műveleteket.

4. Tegyük fel, hogy $\{a_i\colon i\in I\}$ és $\{b_j\colon j\in J\}$ számosságok halmazai. Mutassuk meg, hogy
$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j.$$

5. (A számosságműveletek gyenge monotonitása.) Legyen $\{a_i\colon i\in I\}$ és $\{b_i\colon i\in I\}$ számosságok két halmaza (azonos indexhalmazzal), melyre $a_i\leqslant b_i$ teljesül minden $i\in I$-re. Lássuk be, hogy

a) $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i\leqslant\sum_{i\in I} b_i$; **b)** $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i\leqslant\prod_{i\in I} b_i$.

6. Legyen $n\in\mathbb{N}$. Mennyi
a) $\aleph_0+n$? **b)** $2\cdot\aleph_0$? **c)** $n\cdot\aleph_0$? **d)** $\sum_{i=0}^{\infty}\aleph_0$? **e)** $\aleph_0+c$? **f)** $2c$? **g)** nc? **h)** $\aleph_0\cdot c$?
i) $\aleph_0^2$? **j)** $\aleph_0^n$? **k)** $2^{\aleph_0}$? **l)** $\aleph_0^{\aleph_0}$? **m)** c^2? **n)** c^n? **o)** $c^{\aleph_0}$? **p)** c^c?

7. Legyen $a_1, a_2, a_3, \dots$ természetes számok egy sorozata. Mennyi lehet az $a_1a_2a_3\cdots$ (végtelen) szorzat értéke?

8. Mutasd meg, hogy
a) a folytonos $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények száma c;
b) az összes $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények száma 2^c.
c) Vegyük észre, hogy ezzel bizonyítottuk, hogy van nem folytonos valós függvény (amin persze nem lepődünk meg).

[1]Mert minden $i\in I$ indexre választanak egy elemet A_i-ből.