A matematika alapjai, 7. óra

1. a) Legyen S az összes teáskanál halmaza, T pedig az összes olyan dologé, ami *nem* teáskanál[1]. Melyik igaz ezek közül: $S \in T$, $T \in S$, $S \in S$, $T \in T$?
b) Hm, ezek szerint kétféle halmaz van: $H \in H$ és $H \notin H$ is előfordulhat. Legyen X azon halmazok halmaza, melyek nem elemük önmaguknak. Mit mondhatunk X-ről?

Megoldás: **a)** S egy halmaz, tehát biztosan nem kevergetnénk vele a teánkat, azaz S nem teáskanál, így $S \in T$, és $S \notin S$. T is egy halmaz, ami nem teáskanál, így $T \notin S$, de $T \in T$. Ezek szerint néhány halmaz eleme saját magának, néhány pedig nem. **b)** X definíciója szerint $X \in X \iff X \notin X$. Ajaj...

2. Vegyük az összes halmazok U halmazát, meg annak a hatványhalmazát. Jó ez így?

Megoldás: Hajaj... Cantor tétele szerint $|\mathscr{P}(U)| > |U|$, tehát $\mathscr{P}(U)$-nak biztosan van olyan eleme (azaz U-nak olyan részhalmaza), ami nem eleme U-nak, azaz nem halmaz. Node egy halmaz részhalmaza mégiscsak halmaz... Ezek szerint nincs olyan sem, hogy az összes halmazok halmaza. De miért?!

3. a) Mutassuk meg, hogy számosságok tetszőleges H halmazához található olyan a számosság, melyre $\forall h \in H: a \geqslant h$.
b) Mutassuk meg, hogy számosságok tetszőleges H halmazához található olyan b számosság, melyre $\forall h \in H: b > h$.
c) Mutassuk meg, hogy számosságok tetszőleges H halmazához található olyan számosság, amely nincs benne H-ban.
d) Legyen H az összes számosságok halmaza. Van-e valami rossz érzésed H-val kapcsolatban?

Megoldás: **a)** Minden $s \in H$ számossághoz legyen H_s egy mintahalmaz ($|H_s| = s$). Vegyük az $X = \cup_{s \in H} H_s$ halmazt. Mivel $H_s \subset X$, $a = |H_s| \leqslant |X|$ minden $s \in H$-ra, tehát $a = |X|$ jó választás.
b) Legyen $b = |\mathscr{P}(X)|$ az előző X-szel. Ekkor a Cantor-tétel alapján $\forall h \in H: h \leqslant a < b$, így a szigorú egyenlőtlenség átvitelére látottak alapján b jó.
c) Az előző b megteszi, hiszen $\forall h \in H: b > h$, tehát $\forall h \in H: b \neq h$, azaz $b \notin H$.
d) Ezek szerint nincs is olyan, hogy az összes számosság halmaza. Mindig van olyan számosság, ami kimarad. De mi az, hogy nincs ilyen?!?! Miért ne lenne?? Mi baj van ezzel a definícióval, hogy legyen H az összes számosság halmaza? Ki érti ezt, ki érti ezt?

4. Mit is nevezünk halmaznak?

Megoldás: Inkább menjünk haza! Eddig azt gondoltam, tudom, mi az a halmaz, de most már fogalmam sincs. Annyit mondunk, hogy „vegyük az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazát”, és kiderül, hogy ez ellentmondásos, nem vehetem ezt a halmazt. De még csak azt se mondhatom, hogy vegyük a számosságok halmazát, mert azzal is baj van! Akkor most milyen halmazok vannak, és milyenek nincsenek?! Mégis, mire mondhatjuk, hogy az halmaz, és mi alapján?!? Merhetem azt mondani, hogy vegyük az összes Cauchy-konvergens racionális számsorozat halmazát? Vagy azzal is valami baj lesz?!?!? És mi még a halmazra mint egyetlen alapfogalomra akarjuk alapozni a matematika összes többi alapfogalmát? Kétségbeejtő. Hát ezért járok matek szakra?! (De azért még nincs vége ám a kurzusnak...)

[1] Ha valaki ezt komolytalannak érezné, a teáskanál szót szinte tetszőleges más, jobban definiált / komolyabbnak tűnő fogalommal helyettesítheti. Bertrand Russelnek nem volt probléma, hogy ezt a példát használja.