A matematika alapjai, 9. feladatsor

A kiválasztási axióma (Axiom of Choice): ha $\{A_i\colon i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor létezik $f\colon I \to \cup_{i\in I} A_i$ kiválasztási függvény, azaz olyan I-n értelmezett függvény, melyre $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$-re. **Máshogyan:** Ha A halmaz, és $\forall x \in A$ nemüres halmaz, akkor $\exists f\colon A \to \cup A$, melyre $\forall x \in A\colon\ f(x) \in x$.

Elnevezés: Az előző órai axiómarendszer ezzel kiegészítve a ZFC axiómarendszer nevet viseli.

1. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ és $y_0 = f(x_0)$. Tegyük föl, hogy minden $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to y_0$. Mutassuk meg, hogy f folytonos x_0-ban (azaz $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$).

2. Mutassuk meg, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható!

3. Idézd föl a számosságműveleteknél a végtelen sok számosság összegének, illetve szorzatának jóldefiniáltságának bizonyítását (azaz hogy miért nem függ egyik sem a mintahalmazok választásától). Mutass rá a kiválasztási axióma szerepére a levezetésekben.

4. A számosságszorzás gyenge monotonitása szerint ha $\{A_i\colon i \in I\}$ nemüres halmazok, akkor $|\{f\colon f(i) \in A_i \forall i \in I\}| = \prod_{i\in I} |A_i| \geqslant \prod_{i\in I} 1 = 1$, tehát nemüres halmazok tetszőleges halmazához van kiválasztási függvény, tehát igaz a kiválasztási axióma. Bizonyítja-e ez a kiválasztási axiómát?

5. Mutassuk meg, hogy minden végtelen halmaznak van megszámlálható részhalmaza. (Azaz ha a végtelen számosság, akkor $a \geqslant \aleph_0$.)

6. Mutassuk meg, hogy ha a végtelen számosság, akkor $a + \aleph_0 = a$.

7. Tegyük föl, hogy egy valós f függvényre $f(x+y) = f(x) + f(y)$ teljesül minden valós x, y számra (ez a Cauchy-féle függvényegyenlet). Mutassuk meg, hogy
a) $f(0) = 0$;
b) $f(nx) = nf(x)$ minden pozitív egész n-re;
c) $f(nx) = nf(x)$ minden egész n-re;
d) $f(nx) = nf(x)$ minden racionális n-re;
e) ha f folytonos, akkor $f(x) = cx$ valamilyen c konstansra.

Tétel: minden vektortérnek van bázisa (feltéve a kiválasztási axiómát).

Definíció: Tekintsük az $\mathbb{R}$ halmazt egy $\mathbb{Q}$ feletti vektortérnek (a szokásos műveletekkel). Ennek a vektortérnek egy bázisát *Hamel-bázisnak* nevezzük.

8. Mutassuk meg, hogy a Cauchy-féle függvényegyenletnek van nem cx alakú megoldása.

9. Legyen H egy Hamel-bázis. Mit mondhatunk H számosságáról?

10. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x$ függvény előáll két periodikus függvény összegeként.