A matematika alapjai, 9. feladatsor

A kiválasztási axióma (Axiom of Choice): ha $\{A_i \colon i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor létezik $f \colon I \to \cup_{i \in I} A_i$ kiválasztási függvény, azaz olyan I-n értelmezett függvény, melyre $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$-re. **Máshogyan:** Ha A halmaz, és $\forall x \in A$ nemüres halmaz, akkor $\exists f \colon A \to \cup A$, melyre $\forall x \in A \colon f(x) \in x$.

Elnevezés: Az előző órai axiómarendszer ezzel kiegészítve a ZFC axiómarendszer nevet viseli.

1. Legyen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ és $y_0 = f(x_0)$. Tegyük föl, hogy minden $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to y_0$. Mutassuk meg, hogy f folytonos x_0-ban (azaz $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$).

Megoldás: (Ez az átviteli elv egyik iránya.) Indirekte tegyük föl, hogy $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \colon |x - x_0| < \delta$, és $|f(x) - y_0| \geqslant \varepsilon$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re a $\delta = 1/n$-hez van olyan x_n szám, melyre $|x_n - x_0| < 1/n$, és $|f(x_n) - y_0| \geqslant \varepsilon$. Ekkor tehát az x_n sorozat tart x-hez, de $f(x_n)$ nem tart y_0-hoz, ellentmondás.
Ez a szokásos levezetés, ami korrekt is a szokásos szinten, de most ássunk kicsit mélyebbre. Az x_n sorozat valójában egy $g \colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $g(n) = x_n$, azaz g mondja meg, hogy a sorozatnak mi az n-edik eleme). Ha az ellentmondásokat elkerülendő ugye egy ZFC-halmazuniverzumban dolgozunk, és minden fogalmat halmazokra építünk, akkor ez a g függvény egy halmaz. De mi garantálja, hogy benne van a halmazuniverzumunkban? Ráadásul $g(n) = x_n$ a bizonyításban olyan elem, ami $1/n$-nél közelebb van x_0-hoz, de a függvényértékek túlzottan eltérnek, azaz $x_n = g(n) \in \{x \in \mathbb{R} \colon |x - x_0| < 1/n, |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon\} =: B_n$. A B_n halmazok az indirekt feltevés miatt sosem üresek. Tehát az a kijelentés, hogy létezik az ellentmondást igazoló sorozat (függvény), azzal egyenértékű, hogy a $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ halmazokhoz létezik kiválasztási függvény. Ez nem magától értetődő, de a kiválasztási axióma tudja garantálni. *Megjegyzés:* itt nem használtuk a kiválasztási axióma teljes erejét, mert csak megszámlálható sok nemüres halmazból kellett egy-egy elemet választanunk; tehát itt elég lenne a kiválasztási axiómának az a gyengített változata is, hogy „ha $\{A_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor létezik $f \colon \mathbb{N} \to \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ kiválasztási függvény” (itt tehát a tetszőlegesen nagy I indexhalmaz helyett csak a megszámlálható $\mathbb{N}$ indexhalmazra követeltük meg az egy lépésben választás jogosságát).
Megjegyzés: a kiválasztási axióma szerepe tehát ott volt, amikor végtelen sok halmazból kellett egy-egy elemet választani, mert ezt a kiválasztást egy függvény írja le (ez egyenértékű); ennek a függvénynek a létezésést (halmazuniverzumbeli előfordulását) szavatolja az axióma. Ökölszabálynak nem rossz, hogy a „vegyünk egy-egy olyan elemet, melyre ez-az teljesül” típusú szituációban, ha végtelen sok elemet kell választani, akkor gyanakodjunk, hogy a kiválasztási axióma kell.

2. Mutassuk meg, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható!

3. Idézd föl a számosságműveleteknél a végtelen sok számosság összegének, illetve szorzatának jóldefiniáltságának bizonyítását (azaz hogy miért nem függ egyik sem a mintahalmazok választásától). Mutass rá a kiválasztási axióma szerepére a levezetésekben.

4. A számosságszorzás gyenge monotonitása szerint ha $\{A_i \colon i \in I\}$ nemüres halmazok, akkor $|\{f \colon f(i) \in A_i \forall i \in I\}| = \prod_{i \in I} |A_i| \geqslant \prod_{i \in I} 1 = 1$, tehát nemüres halmazok tetszőleges halmazához van kiválasztási függvény, tehát igaz a kiválasztási axióma. Bizonyítja-e ez a kiválasztási axiómát?

5. Mutassuk meg, hogy minden végtelen halmaznak van megszámlálható részhalmaza. (Azaz ha a végtelen számosság, akkor $a \geqslant \aleph_0$.)

6. Mutassuk meg, hogy ha a végtelen számosság, akkor $a + \aleph_0 = a$.

7. Tegyük föl, hogy egy valós f függvényre $f(x + y) = f(x) + f(y)$ teljesül minden valós x, y számra (ez a Cauchy-féle függvényegyenlet). Mutassuk meg, hogy
a) $f(0) = 0$;
b) $f(nx) = nf(x)$ minden pozitív egész n-re;
c) $f(nx) = nf(x)$ minden egész n-re;
d) $f(nx) = nf(x)$ minden racionális n-re;
e) ha f folytonos, akkor $f(x) = cx$ valamilyen c konstansra.

Tétel: minden vektortérnek van bázisa (feltéve a kiválasztási axiómát).

Definíció: Tekintsük az $\mathbb{R}$ halmazt egy $\mathbb{Q}$ feletti vektortérnek (a szokásos műveletekkel). Ennek a vektortérnek egy bázisát *Hamel-bázisnak* nevezzük.

8. Mutassuk meg, hogy a Cauchy-féle függvényegyenletnek van nem cx alakú megoldása.

9. Legyen H egy Hamel-bázis. Mit mondhatunk H számosságáról?

10. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x$ függvény előáll két periodikus függvény összegeként.

Mese2: A kontinuumhipotézis szerint nincs számosság $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között (azaz $c = \aleph_1$.) A ZFC axiómarendszernek van olyan modellje, melyben ez teljesül, de olyan is, melyben nem; azaz a kontinuumhipotézis független a ZFC-től.