

A matematika alapjai, 10. feladatsor

Definíciók: **Ítéletváltozó:** igaz vagy hamis értéket fölvevő változó. **Formula:** ítéletváltozókból és a $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ jelekből, valamint zárójelekből álló, szintaktikailag helyes karaktersorozat. **Kiértékelés:** az ítéletváltozók mindegyikébe az igaz vagy hamis érték helyettesítése. **Igazságtáblázat:** egy adott formula igazságértékét tartalmazza minden lehetséges kiértékelésre. Két formula **logikailag ekvivalens**, ha bármely kiértékelésnél ugyanaz az értékük (jelölése: \equiv). Egy formula **tautológia**, ha minden kiértékelésnél igaz. Egy F formula **teljes diszjunktív normálformája** egy olyan G formula, melyre $F \equiv G$ és $G = G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_k$ alakú, ahol $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ -re G_i -ben minden (F -ben szereplő) **ítéletváltozó előfordul pontosan egyszer** (esetleg negálva), és a (negált) ítéletváltozók között csak \wedge kapcsolat van. Formulák egy \mathcal{F} halmaza **kielégíthető**, ha van olyan kiértékelés, melynél minden \mathcal{F} -beli formula igaz. Az \mathcal{F} formulahalmaznak egy G formula **(logikai) következménye**, ha minden olyan kiértékelésre, melynél \mathcal{F} összes eleme igaz, G is igaz; jele $\mathcal{F} \models G$.

1. a) „A ruhatáron kívül elhelyezett tárgyakért felelősséget nem vállalunk!” Mit jelent ez a ruhatárban őrzött tárgyakra nézve?

b) Az utcán egy nagydarab, sötét alak Móriczka elé ugrik: „Ha adsz egy ezrest, nem verlek meg!” Értékelj logikai szempontból a kijelentést és Móriczka lehetséges reakcióit!

c) Az utcán egy másik nagydarab, sötét alak ugrik Móriczka elé: „Ha nem adsz egy ezrest, akkor megverlek!” Most mik a kilátások?

2. Tekintsük az alábbi kijelentéseket: A : Gombóc Artúr el tud utazni Afrikába; B : Gombóc Artúrt elbírja a repülőgép; C : indul hajó Afrikába. Tekintsük az alábbi mondatot: Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgép, vagy ha nem bírja el a repülőgép, de indul hajó Afrikába. Az alábbi formulák közül melyik formalizálja a fenti mondatot?

a) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$

b) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C)$

c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

d) $A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

3. Legyenek A és B ítéletváltozók.

a) Idézzük föl $A, \neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ igazságtáblázatait!

b) Írjunk föl az $A \wedge B, A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ formulákkal ekvivalens, csak \neg és \vee jeleket tartalmazó formulákat!

c) Írjunk föl az $A \wedge B, A \vee B$ és $A \leftrightarrow B$ formulákkal ekvivalens, csak \neg és \rightarrow jeleket tartalmazó formulákat!

4. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat!

a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$

b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$

c) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$

d) $\neg(A \rightarrow (B \wedge C)) \equiv (A \wedge (\neg B)) \vee (A \wedge (\neg C))$

5. Add meg az alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját!

a) $(A \rightarrow B) \vee (B \wedge (\neg A))$

b) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A)$

c) $(\neg(A \vee C)) \wedge (B \vee (\neg A))$

d) $(A \wedge B) \leftrightarrow ((\neg C) \vee A)$

6. Melyik tautológia ezek közül?

a) $A \vee (B \rightarrow (\neg A))$

b) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

c) $((A \vee B \vee C) \wedge (\neg B)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

d) $A \rightarrow (A \wedge B)$

e) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

f) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow B))$

7. Hány logikailag nem ekvivalens formula adható n ítéletváltozó használatával?

8. Helyesek-e az alábbi következtetések?

a) $\{A \vee B \vee C, (\neg A) \wedge (\neg C)\} \models B$

b) $\{A \vee B, B\} \models \neg A$

c) $\{A \rightarrow (B \wedge C), (\neg C) \vee B, A \vee C\} \models B \vee C$

d) $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, (\neg B) \wedge D\} \models A \wedge C$

e) Ha piros hó esik, és nem fúj a szél, akkor harangoznak. Tehát ha piros hó esik és nem harangoznak, akkor fúj a szél.

f) Ha fúj a szél, akkor süt a nap vagy hideg van. Nem fúj a szél vagy süt a nap. Tehát ha süt a nap, akkor nincs hideg.

9. A lovagok és lóköttők szigetén mindenki vagy lovag, vagy lóköttő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lóköttők mindig hazudnak.

a) Két emberrel találkozunk, A -val és B -vel. A azt mondja: „Legalább az egyikünk lóköttő.” Miféle A és B ?

b) Három lakossal találkozunk, A -val, B -vel és C -vel. A ezt mondja: „ B és C egyforma típusú.” Valaki megkérdi C -től: „Egyforma típusú A és B ?” Mit válaszol C ?

Oldjuk meg a feladatokat „józan paraszti ésszel”, illetve logikai formalizálás segítségével is!

10. Most a lovagok (mindig igazat igazmondók), lóköttők (mindig hazudók) és normálisak (hol igazat, hol valótlan állítók) szigetén járunk. Adott három szigetlakó, A, B és C , akikről tudjuk, hogy egyikük lovag, másikuk lóköttő, harmadikuk pedig normális (de azt nem tudjuk, hogy ki milyen). A következőket állítják:

A : Normális vagyok.

B : Ez igaz.

C: Nem vagyok normális.

Miféle A , B és C ? Hogyan lehetne a feladatot formálisan (ítéletváltozókkal, formulákkal, igazságtáblázattal stb) megoldani?

11. A lovagok, lóköltők és normálisok szigetén két ember, A és B , a következőket állítják:

A : B lovag.

B : A nem lovag.

Mutassuk meg, hogy legalább az egyikük igazat mond, habár nem lovag. Hogyan lehetne a feladatot formálisan megoldani?

Definíciók:

Logikai axiómák (axiómasémák): (α , β és γ bármilyen formula lehet, az eredmény tautológia):

1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

3) $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (((\neg\beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$.

Modus Ponens (levágás) következtetési szabály: $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$.

Egy \mathcal{F} formulahalmazból az F formula **levezethető**, ha van olyan F_1, F_2, \dots, F_n formulasorozat, melyben minden $1 \leq i \leq n$ -re $F_i \in \mathcal{F}$, vagy F_i logikai axióma (melyben α, β, γ helyébe tetszőleges formulák vannak helyettesítve), vagy F_i valamely F_j, F_k formulák következménye a Modus Ponens szerint, ahol $j < i$ és $k < i$; továbbá $F_n = F$. Jelölés: $\mathcal{F} \vdash F$. Az \mathcal{F} -beli formulákat szokás *feltevés*-eknek hívni.

Tétel (az ítéletkalkulus teljességi tétele): a fenti levezetésfogalomra teljesül, hogy tetszőleges \mathcal{F} formulahalmazra és φ formulára $\mathcal{F} \models \varphi \iff \mathcal{F} \vdash \varphi$. (Informálisan: ami levezethető, az igaz; és ami igaz, az levezethető; ahol az „igaz” logikai következményt jelent.)

12. Mutassuk meg, hogy a logikai axiómák tautológiák (bármely formulák legyenek is α , β és γ helyébe írva).

Példa. Mutassuk meg, hogy tetszőleges F formulára $\emptyset \vdash F \rightarrow F$.

Az 1. logikai axiómába $\alpha = F$ -et és $\beta = F \rightarrow F$ -et helyettesítve legyen

$F_1 = F \rightarrow (F \rightarrow F) \rightarrow F$. A 2. logikai axiómába $\alpha = \gamma = F$ -et és $\beta = F \rightarrow F$ -et helyettesítve legyen

$F_2 = (F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F))$. A Modus Ponens következtetési szabályt alkalmazva az F_1 és F_2 formulákra legyen

$F_3 = (F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F)$. Az 1. logikai axiómába $\alpha = \beta = \gamma = F$ -et írva

$F_4 = F \rightarrow (F \rightarrow F)$, majd F_3 és F_4 -re Modus Ponens-t alkalmazva

$F_5 = F \rightarrow F$.

13. Mutassuk meg, hogy

a) $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash C$;

b) $\{\beta, (\neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta)\} \vdash \alpha$ (azaz az indirekt következtetést le lehet vezetni);

c) $\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash (\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)$ (azaz a kontrapozitív okoskodás is levezethető).

d) $\{\neg\neg F\} \vdash F$.