A matematika alapjai, 10. feladatsor

Definíciók: **Ítéletváltozó:** igaz vagy hamis értéket fölvevő változó. **Formula:** ítéletváltozókból és a $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ jelekből, valamint zárójelekből álló, szintaktikailag helyes karaktersorozat. **Kiértékelés:** az ítéletváltozók mindegyikébe az igaz vagy hamis érték helyettesítése. **Igazságtáblázat:** egy adott formula igazságértékét tartalmazza minden lehetséges kiértékelésre. Két formula **logikailag ekvivalens**, ha bármely kiértékelésnél ugyanaz az értékük (jelölése: $\equiv$). Egy formula **tautológia**, ha minden kiértékelésnél igaz. Egy F formula **teljes diszjunktív normálformája** egy olyan G formula, melyre $F \equiv G$ és $G = G_1 \vee G_2 \vee \cdots \vee G_k$ alakú, ahol $\forall i \in \{1,2,\ldots,k\}$-re G_i-ben *minden* (F-ben szereplő) *ítéletváltozó előfordul pontosan egyszer* (esetleg negálva), és a (negált) ítéletváltozók között csak $\wedge$ kapcsolat van. Formulák egy $\mathscr{F}$ halmaza **kielégíthető**, ha van olyan kiértékelés, melynél minden $\mathscr{F}$-beli formula igaz. Az $\mathscr{F}$ formulhalmaznak egy G formula **(logikai) következménye**, ha minden olyan kiértékelésre, melynél $\mathscr{F}$ összes eleme igaz, G is igaz; jele $\mathscr{F} \models G$.

1. a) „A ruhatáron kívül elhelyezett tárgyakért felelősséget nem vállalunk!” Mit jelent ez a ruhatárban őrzött tárgyakra nézve?
b) Az utcán egy nagydarab, sötét alak Móriczka elé ugrik: „Ha adsz egy ezrest, nem verlek meg!” Értékeld logikai szempontból a kijelentést és Móriczka lehetséges reakcióit!
c) Az utcán egy másik nagydarab, sötét alak ugrik Móriczka elé: „Ha nem adsz egy ezrest, akkor megverlek!” Most mik a kilátások?

Megoldás: **a)** Az égvilágon semmit. Felelősség tényleges vállalásáról nincs szó, csak annak hiányáról. **b)** Ha Móriczka ad egy ilyen kétes alak szavára, akkor ha ad neki ezrest, nem veri meg, tehát bebiztosíthatja magát. Persze lehet, hogy akor sem veri meg, ha nem ad neki ezrest, de erről nem nyilatkozott a sötét alak. **c)** Ha nem ad neki pénzt, azzal bebiztosítja magának a verést (feltéve, hogy szavahihető az alak), ami kerülendő. De simán lehet, hogy akkor is megveri, ha ad neki ezrest, erről nem szólt semmit. Összevetve ez az alak verekedősebb, mint az előző, mert azt legalább le lehet beszélni a verekedésről (és lehet, hogy amúgy esze ágában sincs verekedni, csak bepróbálkozik egy kis fagyipénz reményében).

2. Tekintsük az alábbi kijelentéseket: A: Gombóc Artúr el tud utazni Afrikába; B: Gombóc Artúrt elbírja a repülőgép; C: indul hajó Afrikába. Tekintsük az alábbi mondatot: Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgép, vagy ha nem bírja el a repülőgép, de indul hajó Afrikába. Az alábbi formulák közül melyik formalizálja a fenti mondatot?

a) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$ **b)** $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C)$
c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$ **d)** $A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)$

Megoldás: A c).

3. Legyenek A és B ítéletváltozók.
a) Idézzük föl A, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ igazságtáblázatait!
b) Írjunk föl az $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ formulákkal ekvivalens, csak $\neg$ és $\vee$ jeleket tartalmazó formulákat!
c) Írjunk föl az $A \wedge B$, $A \vee B$ és $A \leftrightarrow B$ formulákkal ekvivalens, csak $\neg$ és $\rightarrow$ jeleket tartalmazó formulákat!

Megoldás: **a)** Ettől most tekintsünk el. Két dolgot azért idézzünk föl: egyrészt $A \rightarrow B$ egy esetben hamis, az $A = i$, $B = h$ kiértékelésnél (megjegyzés: ha A hamis, akkor $A \rightarrow B$ igaz, B-től függetlenül). Másrészt $A \leftrightarrow B$ (ekvivalencia) két kiértékelésre igaz: $A = i, B = i$ és $A = h, B = h$ esetén.
b) Például $A \wedge B \equiv \neg((\neg A) \vee (\neg B))$, $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$ könnyen ellenőrizhetők. **c)** Példának okáért $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow (\neg B))$.

4. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat!
a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$ **b)** $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$
c) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$ **d)** $\neg(A \rightarrow (B \wedge C)) \equiv (A \wedge (\neg B)) \vee (A \wedge (\neg C))$

Megoldás: Logikai ekvivalenciát igazolhatunk úgy, hogy mindkét formula igazságtáblázatát fölírjuk. Ha minden kiértékelésre ugyanaz az érték (tehát a két formula oszlopa megegyezik), akkor és csak akkor ekvivalensek. Illusztráció céljából **a)**

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$(B \rightarrow C)$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$
i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h	h
i	h	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	i	i
h	i	i	h	i	i	i
h	i	h	h	i	h	i
h	h	i	h	i	i	i
h	h	h	h	i	i	i

Látható, hogy a két kérdéses formula (5. és 7. oszlop) igazságértéke minden kiértékelésre megegyezik, azaz valóban logikailag ekvivalensek.

5. Add meg az alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját!
a) $(A \to B) \vee (B \wedge (\neg A))$ **b)** $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A)$
c) $(\neg(A \vee C)) \wedge (B \vee (\neg A))$ **d)** $(A \wedge B) \leftrightarrow ((\neg C) \vee A)$

Megoldás: TDNF fölírásához is igazságtáblázatot használhatunk. Illusztráció céljából **d)**

A	B	C	$A \wedge B$	$((\neg C) \vee A)$	$\boxed{(A \wedge B) \leftrightarrow ((\neg C) \vee A)}$	
i	i	i	i	i	**i**	←
i	i	h	i	i	**i**	←
i	h	i	h	i	h	
i	h	h	h	i	h	
h	i	i	h	h	**i**	←
h	i	h	h	i	h	
h	h	i	h	h	**i**	←
h	h	h	h	i	h	

Tekintsük azokat a sorokat, melyekben a kérdéses formula igaz értékű; ezek alapján a TDNF (minden olyan sorra (kiértékelésre), melyre igaz értéket ad, a változókat a sornak (kiértékelésnek) megfelelően (szükség esetén negálva) összeéseljük, és a soroknak megfelelő tagokat összevagyoljuk):
$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C)$.

6. Melyik tautológia ezek közül?
a) $A \vee (B \to (\neg A))$ **b)** $A \to (B \to A)$ **c)** $((A \vee B \vee C) \wedge (\neg B)) \to (A \to C)$
d) $A \to (A \wedge B)$ **e)** $(A \wedge (A \to B)) \to B$ **f)** $(A \to B) \to ((C \to B) \to ((A \vee C) \to B))$

Megoldás: Itt annyi a teendő, hogy fölírjuk a formula igazságtáblázatát, és ha minden kiértékelésre igaz (azaz minden sorban igaz), akkor tautológia; ha pedig nem minden kiértékelésnél igaz, akkor nem az.

7. Hány logikailag nem ekvivalens formula adható n ítéletváltozó használatával?

8. Helyesek-e az alábbi következtetések?
a) $\{A \vee B \vee C, (\neg A) \wedge (\neg C)\} \models B$ **b)** $\{A \vee B, B\} \models \neg A$
c) $\{A \to (B \wedge C), (\neg C) \vee B, A \vee C\} \models B \vee C$ **d)** $\{A \to B, C \to D, (\neg B) \wedge D\} \models A \wedge C$
e) Ha piros hó esik, és nem fúj a szél, akkor harangoznak. Tehát ha piros hó esik és nem harangoznak, akkor fúj a szél.
f) Ha fúj a szél, akkor süt a nap vagy hideg van. Nem fúj a szél vagy süt a nap. Tehát ha süt a nap, akkor nincs hideg.

Megoldás: Illusztráció céljából **c)**

A	B	C	$B \wedge C$	$A \to (B \wedge C)$	$(\neg C) \vee B$	$A \vee C$	$B \vee C$	
i	i	i	i	i	i	i	i	←
i	i	h	h	h	i	i	i	
i	h	i	h	h	h	i	i	
i	h	h	h	h	i	i	h	
h	i	i	i	i	i	i	i	←
h	i	h	h	i	i	h	i	
h	h	i	h	i	h	i	i	
h	h	h	h	i	i	h	h	
				↑	↑	↑		

Tekintsük azokat a sorokat, melyekben minden feltevés igaz. (A feltevések oszlopait, illetve a kérdéses sorokat nyilakkal megjelöltem.) Ezekre a kiértékelésekre a kérdéses formula (az utolsó oszlopban) mindig igaz, tehát helyes a következtetés. (Ha a kérdéses sorok (azaz kiértékelések) valamelyikénél hamis lenne a formulánk ertéke, akkor nem lenne helyes a következtetés.) Látszik amúgy, hogy ugyanezen feltételhalmazból $B \wedge C$ is következik.

9. A lovagok és lőkötők szigetén mindenki vagy lovag, vagy lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak.
a) Két emberrel találkozunk, A-val és B-vel. A azt mondja: „Legalább az egyikünk lókötő.” Miféle A és B?
b) Három lakossal találkozunk, A-val, B-vel és C-vel. A ezt mondja: „B és C egyforma típusú.” Valaki megkérdi C-től:

„Egyforma típusú A és B?” Mit válaszol C?
Oldjuk meg a feladatokat „józan paraszti ésszel”, illetve logikai formalizálás segítségével is!

10. Most a lovagok (mindig igazat igazmondók), lókötők (mindig hazudók) és normálisak (hol igazat, hol valótlant állítók) szigetén járunk. Adott három szigetlakó, A, B és C, akikről tudjuk, hogy egyikük lovag, másikuk lókötő, harmadikuk pedig normális (de azt nem tudjuk, hogy ki milyen). A következőket állítják:
A: Normális vagyok.
B: Ez igaz.
C: Nem vagyok normális.
Miféle A, B és C? Hogyan lehetne a feladatot formálisan (ítéletváltozókkal, formulákkal, igazságtáblázattal stb) megoldani?

11. A lovagok, lókötők és normálisok szigetén két ember, A és B, a következőket állítják:
A: B lovag.
B: A nem lovag.
Mutassuk meg, hogy legalább az egyikük igazat mond, habár nem lovag. Hogyan lehetne a feladatot formálisan megoldani?

Definíciók:
Logikai axiómák (axiómasémák:) (α, β és γ bármilyen formula lehet, az eredmény tautológia):
1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3) $((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (((\neg\beta) \to \alpha) \to \beta)$.
Modus Ponens (levágás) következtetési szabály: $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$.
Egy $\mathscr{F}$ formulahalmazból az F formula **levezethető**, ha van olyan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ formulasorozat, melyben minden $1 \leqslant i \leqslant n$-re $F_i \in \mathscr{F}$, vagy F_i logikai axióma (melyben α, β, γ helyébe tetszőleges formulák vannak helyettesítve), vagy F_i valamely F_j, F_k formulák következménye a Modus Ponens szerint, ahol $j < i$ és $k < i$; továbbá $F_n = F$. Jelölés: $\mathscr{F} \vdash F$. Az $\mathscr{F}$-beli formulákat szokás *feltevés*-eknek hívni.
Tétel (az ítéletkalkulus teljességi tétele): a fenti levezetésfogalomra teljesül, hogy tetszőleges $\mathscr{F}$ formulahalmazra és φ formulára $\mathscr{F} \models \varphi \iff \mathscr{F} \vdash \varphi$. (Informálisan: ami levezethető, az igaz; és ami igaz, az levezethető; ahol az „igaz” logikai következményt jelent.)

12. Mutassuk meg, hogy a logikai axiómák tautológiák (bármely formulák legyenek is α, β és γ helyébe írva).

Példa. Mutassuk meg, hogy tetszőleges F formulára $\varnothing \vdash F \to F$.
Az 1. logikai axiómába $\alpha = F$-et és $\beta = F \to F$-et helyettesítve legyen
$F_1 = F \to (F \to F) \to F$. A 2. logikai axiómába $\alpha = \gamma = F$-et és $\beta = F \to F$-et helyettesítve legyen
$F_2 = (F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$. A Modus Ponens következtetési szabályt alkalmaza az F_1 és F_2 formulákra legyen
$F_3 = (F \to (F \to F)) \to (F \to F)$. Az 1. logikai axiómába $\alpha = \beta = \gamma = F$-et írva
$F_4 = F \to (F \to F)$, majd F_3 és F_4-re Modus Ponens-t alkalmazva
$F_5 = F \to F$.

13. Mutassuk meg, hogy
a) $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$;
b) $\{\beta, (\neg\alpha) \to (\neg\beta)\} \vdash \alpha$ (azaz az indirekt következtetést le lehet vezetni);
c) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\neg\beta) \to (\neg\alpha)$ (azaz a kontrapozitív okoskodás is levezethető).
d) $\{\neg\neg F\} \vdash F$.
Megoldás: **a)** Íme a levezetés és helyességének indoklása:
$F_1 = \beta$ (feltevés).
$F_2 = \beta \to (\neg\alpha \to \beta)$ (1. log.ax.)
$F_3 = \neg\alpha \to \beta$ (MP F_1, F_2-re)
$F_4 = \neg\alpha \to \neg\beta$ (feltevés)
$F_5 = (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ (3. log.ax.)
$F_6 = (\neg\alpha \to \beta) \to \alpha$ (MP F_4, F_5-re)
$F_7 = \alpha$ (MP F_3, F_6).