Komjáth Péter

Halmazelmélet

Budapest, 2007

Előszó

E jegyzet a matematika tanárszakosok „A Matematika Alapjai 1." előadása anyagát tartalmazza, úgy, ahogy a második évezred utolsó tízegynéhány évében az ELTE-n leadtam. Az anyag többé-kevésbé Péter Rózsa és Urbán János előadásának „jogutódja", de bizonyos részeket felhasználtam Hajnal András előadásából is.

A halmazelméleti ismeretekből feltételezem a halmaz, a számosság fogalmát és a megszámlálható halmazokra vonatkozó legismertebb állításokat. Ezenkívül feltételezem, hogy az olvasó járatos a matematika fogalomvilágában, ismeri a tipikus bizonyítási módszereket (indirekt, indukció, stb) és rendelkezik némi számelméleti, algebrai, lineáris algebrai jártassággal.

A bizonyítások végét □ jelöli. A kiegészítő szövegrészeket, amelyek tehát nem részei az előadásnak, kisebb betűkkel szedtük.

1 Bevezetés

Zénón szerint bármilyen gyorsan is futok,
soha nem fogom beérni a buszt.
(Farkas Katalin)

Mielőtt az érdemi munkához kezdenénk, összefoglaljuk a halmazokra vonatkozó eddigi ismereteinket.

Ha x eleme az A halmaznak, azt $x \in A$-val, ha nem eleme, azt $x \notin A$-val jelöljük.

Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, jelben $A \subseteq B$, ha A minden eleme B-ben is benne van. Itt természetesen az egyenlőséget, tehát azt hogy $A = B$ sem zárjuk ki. Forgalomban vannak más megállapodások is, van aki ezt $A \subset B$-vel jelöli. Van, akinél ez utóbbi azt jelenti, hogy A valódi rész (tehát $A \neq B$), egyébként a mi jelölésünket használja. Mi egyszerűen csak az $A \subseteq B$ jelölést használjuk, és ha valami miatt valódi részről van szó, azt szavakban mondjuk meg. Ha A és B halmazok, akkor $A \cup B$ jelöli az *egyesítésük*et (*uniójuk*at), $A \cap B$ a *metszetük*et (közös részüket). Tehát

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

és

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

Ha $A \cap B = \emptyset$, azaz A-nak és B-nek nincs közös eleme, akkor A és B *diszjunktak*. Az A és B halmaz *különbsége* (tehát azon elemek halmaza, amelyek A-ban benne vannak, de B-ben nincsenek) $A - B$ (szokásos ezt még $A \setminus B$-vel is jelölni).

Bevezetünk egy fontos új jelölést: ha f függvény, A részhalmaza f értelmezési tartományának, akkor $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$. Azért nem szabad a szokásos $f(A)$ jelölést alkalmaznunk, mert előfordulhat, hogy az A halmaz egyszersmind eleme f értelmezési tartományának és ekkor $f(A)$ két, többnyire különböző dolgot jelölne.

A összes részhalmazainak $P(A)$ halmaza az A *hatványhalmaza*.

Halmazokat különböző módokon tudunk megadni: megnevezéssel: $\emptyset$ (az üres halmaz), $\mathbf{N}$ (a természetes számok halmaza), $\mathbf{Z}$ (az egész számok halmaza), $\mathbf{Q}$ (a racionális számok halmaza), $\mathbf{R}$ (a valós számok halmaza), $\mathbf{C}$ (a komplex számok halmaza). Elemeinek felsorolásával: $\{a\}$, $\{a, b, c\}$, esetleg szimbolikus felsorolással: $\{0, 1, 4, 9, \ldots\}$. A leggyakoribb halmazmegadás, amikor részhalmazként adunk meg egy halmazt: ha A egy már ismert halmaz, $T(x)$ valamilyen tulajdonság, akkor $B = \big\{x \in A : T(x)\big\}$ is halmaz. Itt $T(x)$ jelenthet bármilyen matematikailag értelmes tulajdonságot.

Ismerjük még a véges és végtelen halmaz fogalmát és tudjuk, hogy a természetes számok éppen a véges halmazok elemszámai.

Egy végtelen halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha elemeit egyetlen sorozatban fel lehet sorolni: $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$. Ekkor azt is mondjuk, hogy számossága

$\aleph_0$ (alef-nulla[1]). Általában megszámlálhatónak nevezünk egy halmazt, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

A megszámlálható halmazokról a következő nevezetes tételeket ismerjük:

1. A racionális számok halmaza megszámlálható.
2. Megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.
3. A valós számok halmaza nem megszámlálható.

Bizonyos esetekben szükségünk lesz arra, hogy olyan összességekről beszéljünk, amelyekről nem tudjuk, hogy halmazok (esetleg tudjuk, hogy nem halmazok). Ezeket *osztály*oknak nevezzük. Így szó lesz az összes halmazok osztályáról, az egyelemű, a végtelen halmazok osztályáról, stb. A legfontosabb tudnivaló, hogy olyan osztályt, amely nem halmaz, nem tehetünk elemként halmazba (és osztályba sem).

Egy másik ehhez hasonló fogalom az *operáció*. Jóldefiniált hozzárendelést nevezünk így, amiről azonban nem tudjuk, hogy függvény lenne. Ennek okát abban ragadhatjuk meg, hogy értelmezési tartománya olyan osztály, amely esetleg nem halmaz (tehát valódi osztály). Példák operációkra: $\mathcal{F}(x) = x$ tehát az egész világon értelmezett identitás; $\mathcal{F}(A) = P(A)$, a hatványhalmaz; $\mathcal{G}(x) = \{\emptyset\}$, ez az egész világon értelmezett konstans operáció.

A halmazelmélet két fő célkitűzése: megalapozni a matematika valamennyi ágát és tanulmányozni a végtelen halmazokat. Az első azt jelenti, hogy a matematika egyéb fogalmait visszavezetjük, „redukáljuk" a halmaz fogalmára, valahogy úgy ahogy az analitikus geometria redukálja a geometriát a valós algebra fogalmaira. A második pedig azt, hogy definíciók, állítások minél szélesebb körét szeretnénk átvinni a végtelen halmazokra, módszereket dolgozunk ki tetszőleges halmazok tulajdonságainak vizsgálatára.

Történetileg először az úgynevezett *naiv halmazelmélet* alakult ki, ebben tetszés szerint, korlátozás nélkül lehetett képezni a halmazokat. Ez a felépítés azonban, mint hamar kiderült, ellentmondásokra vezetett. A leghíresebbet ezek közül az ellentmondások közül, a Russell-paradoxont rövidesen mi is megismerjük.

Ezeknek az ellentmondásoknak az eredményeképpen a naiv halmazelmélet összeomlott. A matematikusok ezután a menekülés érdekes módját választották. A halmazelmélet *axiomatikus felépítésével* megszorításokat tettek arra, hogy milyen módszerekkel lehet halmazokat előállítani, a meglehetősen bonyolult axiómarendszer elég gazdag ahhoz, hogy a matematika szokásos halmazait megadja, de elég szegény ahhoz, hogy a fenti ellentmondásokat már ne lehessen levezetni.

[1] $\aleph$: alef, a héber ábécé első betűje.

2 Az axiómák

Ha megegyezünk az ép észben, akkor
a hülyeség például nem tolerálható.
(Esterházy Péter: Ama nagyon szép)

Egy ilyen axiómarendszert, az úgynevezett Zermelo-Fraenkel axiómarendszert a következőkben ismertetünk.

0. Az egyenlőség axiómája. Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlőek.

1. A létezés axiómája. Létezik halmaz.

Ezt az axiómát általában abban a formában szokták kimondani, hogy létezik olyan halmaz, aminek nincs eleme (tehát egy konkrét halmaz, az üres halmaz létezését mondják ki). Persze, a 0. axiómából már tudjuk, hogy csak egy üres halmaz létezhet.

Valamilyen ilyen, úgynevezett feltétlen egzisztenciaaxiómára mindenképpen szükség van, hiszen a többi, úgynevezett feltételes egzisztenciaaxióma csak azt mondja ki, hogy ha bizonyos halmazok léteznek, akkor más halmazok is léteznek, és valahogyan el kell kezdeni halmazok készítését.

2. A részhalmaz-axióma. Ha A halmaz, $T(x)$ tulajdonság, akkor $\{x \in A : T(x)\}$ is halmaz. Itt $T(x)$ bármilyen szabatosan megfogalmazott matematikai tulajdonságot jelenthet.

Ezt az axiómát nagyon sokszor használjuk matematikai munkánkban; például egyenletek megoldása ilyen halmazok leírását jelenti: adjuk meg az $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2x - 3 = 0\}$ halmaz elemeit, stb.

Most már könnyen bebizonyíthatjuk két halmaz metszetének létezését: $A \cap B$ nem más, mint az $\{x \in A : x \in B\}$ halmaz. Hasonlóképpen a különbség létezését is kimondhatjuk: $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$.

De az első axióma gyengébb formájából az erősebbet is le tudjuk vezetni: ha A halmaz, akkor $\{x \in A : x \neq x\}$ az üres halmaz.

3. A páraxióma.

Adott x-hez és y-hoz van olyan halmaz, amely csak x-et és y-t tartalmazza. Jele: $\{x, y\}$. A megfogalmazás ravasz: mivel nem kötöttük ki, hogy x és y legyen különböző, ez valójában két axióma: az egyelemű halmaz axiómája: minden x-hez létezik a kizárólag x-ből álló $\{x\}$ egyelemű halmaz és a kételemű halmazok axiómája: ha $x \neq y$ akkor létezik a csak belőlük álló $\{x, y\}$ halmaz.

Eddigi axiómáink segítségével már végtelen sok halmazt tudunk készíteni: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$.

4. Az unió axiómája. Ennek természetes formája a következő lenne: ha A és B halmaz, akkor van olyan C halmaz, aminek az elemei éppen az A és B elemei együtt. Jelben: $C = A \cup B$.

Ezt azonban általánosítjuk: halmazok tetszőleges $\{A_i : i \in I\}$ halmazához (itt tehát I tetszőleges indexhalmazt jelent) elkészítjük azok

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

-vel vagy $\bigcup\{A_i : i \in I\}$-vel jelölt unióját.

Itt valójában egy halmazból készítünk egy másikat, ugyanis $A = \{A_i : i \in I\}$-ből csináljuk $B = \bigcup\{A_i : i \in I\}$-t. Érdemes végiggondolni az A_i jelölés nélkül, milyen kapcsolatban van A és B. B elemei azok, amelyek elemei A valamelyik elemének, tehát A „unokái". Tehát

$$B = \{x : x \in y \in A\},$$

az így elkészített halmazt szokás egyszerűen $B = \bigcup A$-val jelölni, és az unió axiómája valódi formájában éppen ennek létezését mondja ki.

Hogyan tudjuk belátni, hogy létezik három, négy stb. halmaz egyesítése? $A \cup B \cup C$-t megkaphatjuk, ha megvan $\{A, B, C\}$, ezt meg így kapjuk meg:

$$\{A, B, C\} = \{A, B\} \cup \{C\} = \bigcup\{\{A, B\}, \{C\}\},$$

az $\big\{\{A, B\}, \{C\}\big\}$ halmazt pedig a páraxióma háromszori használatával kaphatjuk meg.

Egy érdekes speciális eset: $\bigcup \emptyset = \emptyset$, körülbelül úgy, ahogy az üres összeget nullának definiáljuk. Ne tévesszük össze $\bigcup\{\emptyset\}$-zal, ami, bár ugyanazt az eredményt adja (az üres halmazt), mást jelent.

Nem szükséges külön axiómát bevezetni sok halmaz hasonlóan elkészítendő metszetéhez: ha $A = \{A_i : i \in I\}$, akkor

$$B = \bigcap_{i \in I} A_i$$

létezését így láthatjuk be: válasszunk egy $i_0 \in I$ elemet, ekkor

$$B = \{x \in A_{i_0} : x \in A_i \text{ minden } i \in I\text{-re}\}.$$

Sőt, osztálynyi sok halmaz metszetét is gond nélkül definiálhatjuk. Csak akkor vagyunk bajban, ha $A = \emptyset$, „sehány" halmaz metszetét nem tudjuk definiálni (ugyanis ahogy $\bigcup \emptyset = \emptyset$, $\bigcap \emptyset$-nek a legnagyobb halmaznak kellene lennie, ilyen pedig nincs). Ekkor persze a fenti okoskodás sem működik: nem tudunk $i_0 \in I$ elemet választani.

5. A hatványhalmaz axióma. Minden halmaznak létezik hatványhalmaza (tehát összes részhalmazainak halmaza). Erre az axiómára azért van szükség, mert még a végtelenségi axiómával (lásd következő axióma) sem tudjuk megszámlálhatónál nagyobb halmaz létezését belátni.

6. Végtelen halmaz létezése. Létezik végtelen halmaz. Erre az axiómára pedig azért van szükség, mert az eddigi axiómákkal nem tudjuk végtelen halmaz létezését bebizonyítani.

Ez az axióma persze feleslegessé teszi az 1. axiómát.

Némi gondot okoz, ha ezt az axiómát kizárólag formálisan leírható tulajdonságokkal próbáljuk definiálni. Egy lehetőség a következő: létezik olyan A halmaz, hogy $\emptyset \in A$, és minden $x \in A$ elemhez $\{x\} \in A$ is teljesül. Egy másik lehetőség a természetes számok halmazát megadni, ez azonban nem olyan egyszerű, lásd 57. oldal.

Később meg fogunk még ismerni két további axiómát; a pótlás axiómáját és a kiválasztási axiómát.

3 A Descartes-szorzat

Az x és y által alkotott rendezett párt így definiáljuk: $\langle x, y\rangle = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$. Tétel mondja ki, hogy ez megfelel a rendezett pártól megkövetelt tulajdonságnak:

1. Tétel. *Ha* $\langle x, y\rangle = \langle z, t\rangle$ *akkor* $x = z$ *és* $y = t$.

Bizonyítás. Esetszétválasztással dolgozunk.
1. eset. $x = y$

Ekkor a baloldal $\big\{\{x\}\big\}$, azaz egy egyelemű halmaz, aminek egyetlen eleme $\{x\}$. Tehát a jobboldalnak, $\big\{\{z\}, \{z, t\}\big\}$-nek is egyetlen eleme van. Ez csak úgy lehet, ha $z = t$. Tehát $\big\{\{x\}\big\} = \big\{\{z\}\big\}$ s mivel a halmaz meghatározza elemeit, kapjuk hogy $\{x\} = \{z\}$, azaz $x = z$. Tehát $x = y = z = t$ és készen vagyunk.
2. eset. $x \neq y$

Ekkor a baloldal kételemű: ugyanis egyik eleme egyelemű halmaz ($\{x\}$), a másik kételemű ($\{x, y\}$), s ezek semmilyen körülmények között sem eshetnek egybe. Ezért a jobboldal is mindenképpen kételemű, ami csak úgy lehet, hogy egyik eleme $\{z\}$, a másik az ettől különböző $\{z, t\}$. De akkor $z \neq t$ is igaz. Persze, a baloldali egyelemű elem azonos kell, hogy legyen a jobboldali egyeleművel: $\{x\} = \{z\}$ és ugyanez igaz a kételeműekre: $\{x, y\} = \{z, t\}$. De innen adódik, hogy $x = z$ és $y = t$, s ezzel készen vagyunk. □

Ezután az A és B halmazok Descartes-szorzatát a következőképpen definiáljuk:

$$A \times B = \big\{\langle x, y\rangle : x \in A, y \in B\big\}.$$

2. Tétel. *$A \times B$ halmaz.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $A \times B$ megkapható, az axiómák segítségével, A-ból és B-ből. Ha $\langle x, y\rangle \in A \times B$, akkor $\langle x, y\rangle = \big\{\{x,\}, \{x, y\}\big\}$ alakú. $x \in A$, $y \in B$ miatt $\{x\}$, $\{x, y\} \subseteq A \cup B$. Azaz, $\{x\}$, $\{x, y\} \in P(A \cup B)$. Folytatva,

$\{\{x,\},\{x,y\}\} \subseteq P(A \cup B)$, azaz $\{\{x,\},\{x,y\}\} \in P\big(P(A \cup B)\big)$. Azt kaptuk, hogy $\langle x,y\rangle$ mindig eleme $P\big(P(A \cup B)\big)$-nek, és ezután a részhalmaz-axiómával befejezhetjük a bizonyítást:

$$A \times B = \big\{z \in P\big(P(A \cup B)\big) : \text{ van } x \in A, \text{ van } y \in B, z = \langle x,y\rangle\big\}.$$

□

Logikus lenne ezek után a függvény fogalmát úgy definiálni, hogy az $f : A \to B$ függvényt azonosítjuk gráfjával, tehát $\big\{\langle x, f(x)\rangle \in A \times B : x \in A\big\}$-val, és a következőt mondanánk: függvény egy olyan f halmaz, ami valamilyen A és B halmazokra részhalmaza $A \times B$-nek, és rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x \in A$-hoz pontosan egy olyan $y \in B$ van, amire $\langle x,y\rangle \in f$.

Az axiomatikus halmazelmélet hagyományosan másként definiálja a függvény fogalmát: az f halmazt függvénynek nevezzük, ha minden eleme rendezett pár és $\langle x,y_1\rangle$, $\langle x,y_2\rangle \in f$ esetén mindenképpen teljesül $y_1 = y_2$. Ekkor már a következő állítás sem magától értetődő:

3. Tétel. *Ha f függvény, akkor értelmezési tartománya és értékkészlete is halmaz.*

Bizonyítás. Megint csak olyan A halmazt próbálunk keresni, amelyre igaz, hogy $\langle x,y\rangle \in f$ esetén $x \in A$, ekkor ugyanis a részhalmaz-axióma segítségével megkaphatjuk az x-ek „pontos” halmazát (mintegy kivágva a jó x-eket).

Ha $\langle x,y\rangle = \big\{\{x\},\{x,y\}\big\} \in f$, akkor nyilván $\{x\} \in \bigcup f$ és így $x \in \bigcup\bigcup f$ tehát az $A = \bigcup\bigcup f$ választás megfelelő. Hasonlóan járunk el az értékkészlet megadásában. □

Ehhez hasonlóan definiáljuk a kétváltozós relációkat: ha A halmaz, akkor R kétváltozós reláció rajta, ha $R \subseteq A \times A$. Ilyen reláció az egyenlőség; tehát $R = \big\{\langle x,y\rangle : x = y \in A\big\}$. Egy másik példa, amire a Neumann-rendszámok definiálásánál lesz szükség, az epszilon reláció:

$$R = \big\{\langle x,y\rangle : x \in y, x,y \in A\big\}.$$

A több változós relációk definiálásához először is definiálni kell a többtényezős Descartes-szorzatot. Ezt így csináljuk: az $A_1,\dots,A_n$ halmazok ($A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$-nel jelölt) Descartes-szorzata legyen $\big(\cdots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \cdots \times A_n\big)$. A zárójelezésre azért van szükség, mert a Descartes-szorzás nem asszociatív: a legtöbb esetben $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ mert a baloldal elemei olyan párok amelyek első koordinátái $A \times B$-ből valók, míg a jobboldaliaké A-beli. Persze, olyan eset is van, amikor $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ például, ha valamelyik halmaz az üres halmaz.

Ezután könnyű az n-változós relációk definiálása: a fenti értelemben vett $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ halmaz részhalmazait nevezzük így.

Feladatok. 1. Oldjuk meg az $A \times B = B \times A$ egyenletet !

2. Lássuk be, hogy ha f függvény, A részhalmaza a D_f értelmezési tartománynak, akkor az $f|A$ megszorítás is függvény.
3. Legyen f, g függvény. Bizonyítsuk be, hogy $f \cap g$ is függvény ! Mikor lesz $f \cup g$ is függvény ?
4. Lássuk be, hogy ha f_0 és f_1 függvények, akkor $f_1 \circ f_0$ kompozíciójuk is az !

4 Számosságok

Ha A és B halmazok, azt mondjuk, hogy A és B ekvivalensek, jelben $A \sim B$, ha van közöttük bijekció, tehát kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ha jelentősége van annak, hogy egy f függvény ilyen bijekcó, akkor $A \sim_f B$-t írunk.

Könnyű látni, hogy ezzel valóban ekvivalencia-relációt[2] definiáltunk a halmazokon: minden A-ra $A \sim_{\mathrm{id}} A$ (ahol id az identikus $A \to A$ bijekció), ha $A \sim_f B$, akkor $B \sim_{f^{-1}} A$, és végül, ha $A \sim_f B$, $B \sim_g C$, akkor $A \sim_{g \circ f} C$ (ahol $g \circ f$ az f és g kompozíciója).

Így az összes halmazok egymással ekvivalens halmazok osztályaira bomlik. Az egy osztályban levő halmazok közös tulajdonságát *számosság*nak nevezzük. Ha tehát $A \sim B$, akkor azt mondjuk, hogy *A és B számossága ugyanaz* és azt írjuk, hogy

$$|A| = |B|.$$

Az A halmaz számosságát tehát $|A|$-val jelöljük.

Bár a fenti definíció teljesen világos a matematikával foglalkozók számára, éppen axiomatikus halmazelméleti szempontból megengedhetetlen. Ugyanis új alapfogalmat, a számosságot definiáltuk, pedig éppen az a célunk, hogy egyetlen alapfogalom, a halmaz maradjon, a többit mind vezessük vissza erre úgy, hogy azonosítsuk bizonyos halmazokkal.

Tehát a helyes definícióhoz egy olyan $\mathcal{F}$ operációt kell csinálnunk, amely az összes halmazokon van értelmezve és amelyre igaz, hogy $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \sim B$. Bármilyen fenti tulajdonságú operációt jogunk van ,,a számosság-operáció"-nak nevezni. Lehetséges ilyen operációt megadni, de csak nagyon nehezen, tárgyalásunk végén tudjuk megtenni (59. oldal). Egyelőre használjuk mégis a számosságot, mint új alapfogalmat.

Azt azonban jegyezzük meg, hogy mindenképpen jogos $|A| = |B|$-t írni, mert ezt akármikor visszafordíthatjuk arra az állításra, hogy ,,van A és B között bijekció".

[2] Nem teljesen korrekt szóhasználat. Ugyanis relációkat csak halmazokon szokás definiálni, itt pedig az összes halmazokon tesszük ezt, ezek pedig, mint látni fogjuk, nem alkotnak halmazt.

5 Számosságok összehasonlítása

Definíció. Ha a és b számosságok, akkor $a \leq b$ a következő esetben áll fenn. Ha $|A| = a$ és $|B| = b$ akkor van $A \to B$ injekció. $a < b$ természetesen azt jelenti, hogy $a \leq b$ de $a \neq b$, azaz van A-ból B-be injekció, de nincs közöttük bijekció.

Ennek a definíciónak van egy lényeges hiányossága. Számosságokat hasonlítunk össze, mégis, halmazok tulajdonságait vizsgáljuk. Elvileg elképzelhető, hogy adott a és b számosságokhoz, az $a \leq b$ kérdésre különböző választ kapunk, ha egyszer az A, B, másszor az A', B' halmazokat használjuk (és persze $|A| = |A'| = a$, $|B| = |B'| = b$). Be kell tehát látnunk, hogy bár az összehasonlításkor halmazokat használunk, a végeredmény nem függ azok megválasztásától, csak a-tól és b-től. Azaz, az alábbi tételre van szükségünk:

4. Tétel. *Ha A, B, A', B' halmazok, van $A \to B$ injekció, $A \sim A'$, $B \sim B'$, akkor van $A' \to B'$ injekció is.*

Bizonyítás. Legyen $A' \sim_f A$, $B \sim_g B'$ (tehát $f : A' \to A$ és $g : B \to B'$ bijekciók) és $h : A \to B$ injekció. Ekkor $g \circ h \circ f : A' \to B'$ injekció (mivel három injekció kompozíciója). □

Ezután a számosságösszehasonlítás tulajdonságait vizsgáljuk meg.

Először is, $a \leq a$, mivel az identitás alkalmas $A \to A$ injekció.

A tranzitivitáshoz tegyük fel, hogy $a \leq b \leq c$. Legyen tehát adva az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ injekció. Ekkor nyilván ezek kompozíciója, $g \circ f : A \to C$ megfelelő injekció.

Következő célunk annak megmutatása, hogy ha a és b számosságok, továbbá $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$. Ez már távolról sem triviális. Kiküszöbölve a számosságokra vonatkozó definíciókat, a következőt kell belátni.

5. Tétel. (Az ekvivalencia tétel) *Ha A és B halmazok, van A-ból B-be, illetve B-ből A-ba egy-egy injekció, akkor van A és B között bijekció.*

Bizonyítás. Ismételten használni fogjuk az $f[X] = \{f(x) : x \in X\}$ jelölésmódot. Legyen tehát adva $f : A \to B$, $g : B \to A$ injekció, célunk ezekből „összerakni" az $F : A \to B$ bijekciót.

Az ötlet a következő. Megpróbáljuk A-t felbontani két diszjunkt részre, mint $A = A' \cup A''$, hasonlóan B-t is, mint $B = B' \cup B''$ olymódon, hogy $B' = f[A']$ és $A'' = g[B'']$ és ekkor F-et így határozzuk meg:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A' \\ g^{-1}(x), & \text{ha } x \in A''. \end{cases}$$

Valóban, két bijekcióból akkor tudunk egyet összerakni, ha az értelmezési tartományok és az értékkészletek is diszjunktak.

Bár látszólag négy halmazt kell találnunk, a különböző feltételek miatt egy meghatározza a többit:

$$B' = f[A']$$
$$B'' = B - B' = B - f[A']$$
$$A'' = g[B''] = g\big[B - f[A']\big]$$

és végül
$$A' = A - A'' = A - g\big[B - f[A']\big].$$

Ha sikerül találnunk olyan A'-t amire ez igaz, akkor készen vagyunk, mert megfelelően definiálva A'', B', B''-t, készen vagyunk.

A feladatunk tehát a következő: ha a $G : P(A) \to P(A)$ függvényt a $G(X) = A - g\big[B - f[X]\big]$ képlettel definiáljuk, találnunk kell egy $X \subseteq A$ halmazt, amire $G(X) = X$.

Ehhez először is belátjuk G „monotonitás"-át.

Állítás. *Ha $X \subseteq Y$, akkor $G(X) \subseteq G(Y)$.*

Bizonyítás. Csak ki kell számolni.

$$\begin{array}{rcl} X & \subseteq & Y \\ f[X] & \subseteq & f[Y] \\ B - f[X] & \supseteq & B - f[Y] \\ g\big[B - f[X]\big] & \supseteq & g\big[B - f[Y]\big] \\ G(X) = A - g\big[B - f[X]\big] & \subseteq & A - g\big[B - f[Y]\big] = G(Y) \end{array}$$

Azaz, két olyan operációt alkalmaztunk, amely megfordítja, további két olyant, amely megőrzi a $\subseteq$ kapcsolatot, ami ezért összességében megmarad. $\square$

Ezután úgy oldjuk meg a $G(X) = X$ „egyenlet"-et, hogy képletet adunk X-re. Legyen
$$X = \bigcap_{G(Y) \subseteq Y} Y.$$

Mielőtt továbbmennénk, be kell látnunk, hogy ez a metszet létezik, azaz van legalább egy ilyen Y halmaz. De $Y = A$ egy megfelelő választás.

A metszet definíciója miatt, $X \subseteq Y$ minden olyan Y-ra, amire $G(Y) \subseteq Y$. Fent bebizonyított állításunk szerint ekkor $G(X) \subseteq G(Y)$ is áll, azaz, folytatva az egyenlőtlenségek láncát
$$G(X) \subseteq G(Y) \subseteq Y.$$

Tehát $G(X)$ minden ilyen Y-nak része, ezért metszetüknek, X-nek is, $G(X) \subseteq X$.

Ezzel beláttuk a kívánt állítás felét; $G(X) \subseteq X$-et. A másik feléhez ezt fel fogjuk használni.

Valóban, a $G(X) \subseteq X$ egyenlőtlenségre alkalmazva az Állítást, azt kapjuk, hogy $G\big(G(X)\big) \subseteq G(X)$, tehát a $G(X)$ halmaz rendelkezik azzal a tulajdonsággal amit az Y-októl megkövetelünk. Ott van valahol tehát az X-et definiáló metszetben, ezért $X \subseteq G(X)$. $\square$

Feladat. Lássuk be az alábbi „tranzitivitási" szabályokat: Ha $a \leq b < c$, akkor $a < c$. Ha $a < b \leq c$, akkor $a < c$. Általában, ha $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ egyenlőtlenségek sorozata, és legalább egy helyen $<$ áll, akkor $a_1 < a_n$ teljesül.

6 Cantor tétele. A Russell-paradoxon

Ez az igazi nagy játék: a játék a végtelennel. Úgy látszott, hogy ennél magasabbra már nem hághat az emberi szellem. És ekkor megingott az egész épület. (Péter Rózsa: *Játék a végtelennel*)

6. Tétel. (Cantor) *Minden A halmazra $|A| < |P(A)|$.*

Bizonyítás. Mivel a számosságok közötti $<$ kapcsolatot úgy definiáltuk, hogy $\leq$ teljesül, de $=$ nem, a bizonyítás két lépésből fog állni.

Első lépés. $|A| \leq |P(A)|$.

Ehhez egy $A \to P(A)$ injekciót kell megadni, ilyen például az $f(x) = \{x\}$-szel definiált $f : A \to P(A)$ függvény.

Második lépés. $|A| \neq |P(A)|$.

Indirekten, tegyük fel, hogy $F : A \to P(A)$ bijekció. A következő módon definiáljuk A-nak B részhalmazát: $B = \{x \in A : x \notin F(x)\}$. Mivel F-ről feltételeztük, hogy szürjektív, van olyan $b \in A$ elem, hogy $F(b) = B$. Ekkor viszont (B definíciója miatt) $b \in B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $b \notin F(b)$ ami viszont ($F(b) = B$ miatt) pedig pontosan akkor, ha $b \notin B$, s ez mindenképpen ellentmondás. $\square$

Jegyezzük meg, hogy az előző tétel következményeképpen már végtelen sok végtelen számosságot ismerünk:

$$|\mathbf{N}| < |P(\mathbf{N})| < |P(P(\mathbf{N}))| < \cdots.$$

Még érdekesebb eredményt kapunk, ha a tételt az összes halmazok V halmazára alkalmazzuk: ekkor ugyanis egyrészt $|V| < |P(V)|$ másrészt nyilván $P(V) \subseteq V$, ami ellentmondás. Ezzel tehát bebizonyítottuk az alábbi tételt:

7. Tétel. *Nem létezik az összes halmazok halmaza.*

Alkalmazva Cantor tételének bizonyítását erre az esetre, egyszerű bizonyítást nyerhetünk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az összes halmazok egy V halmazt alkotnak. Készítsük el a következő részhalmazt. $A = \{x \in V : x \notin x\}$. Ekkor A eleme A-nak pontosan akkor, ha reá teljesül a feltétel, azaz, ha $A \notin A$, de ez mindenképpen ellentmondás. $\square$

Ez a tétel végzetes csapást mért a naiv halmazelméletre, Abban ugyanis V mindenképpen halmaz, így ezzel kiküszöbölhetetlen ellentmondást vezetünk le. Ezt nevezik Russell-paradoxonnak, felfedezője, Bertrand Russell után.

Naplójában Russell érzékletesen írja le, hogyan próbálta megoldani ezt a látszólag egyszerű problémát, amibe véletlenül botlott.

> Minden reggel leültem egy üres papírlap elé. Egész nap, a rövid ebédidő kivételével, ezt az üres papírt bámultam. Gyakran előfordult, hogy estéig egyetlen szót sem írtam rá.[3]

Felvethető a kérdés, hogy mi a mélyenfekvő oka ennek az ellentmondásnak. Egy lehetséges magyarázat az, hogy amikor V-t halmaznak fogadjuk el, feltesszük, hogy az összes halmaz egyszer s mindenkorra meg van adva. Ezután — átlózással — új halmazt készítünk, nem meglepő tehát, hogy az így elkészített halmaz nincs benne az összes halmazok listájában, V-ben. Az axiomatikus felépítésben nincs olyan stádium, amikor valamennyi halmaz meg lenne konstruálva, a halmazok világa „nyitott", bármikor bővíthető, csak bizonyos szabályok vannak rögzítve, amelyek szerint mindig lehet új halmazokat csinálni.

Feladat. Adjunk egyszerű bizonyítást a $|P(A)| \geq |A| + 1$ egyenlőtlenségre ! Egyenértékű-e ez Cantor tételével ? Javítható-e a képletben szereplő 1-es 2-re ?

7 Műveletek számosságokkal

A számosságokkal végzett műveleteket úgy próbáljuk definiálni, hogy

1. a véges számosságokra, azaz a természetes számokra a szokásos eredményt adják,
2. a definíció lehetőleg egyszerű, természetes legyen, végül
3. lehetőleg minél több azonosságot, szabályt elégítsenek ki.

Összeadás

Ha a és b számosságok, $a + b$ összegüket a következőképpen definiáljuk: legyenek A és B diszjunkt halmazok, $|A| = a$, $|B| = b$, ekkor $a + b$ az $A \cup B$ halmaz számossága.

Ebben a formában ez a definíció még nem tökéletes. A baj az, hogy $a + b$ kiszámításához A, B „mintahalmazok"-at vettünk, így, legalábbis elméletben,

[3] B. Russell: *Önéletrajz*, Európa Könyvkiadó, 1970, 257. old.

elképzelhető, hogy a kiszámított összeg attól is függ, pontosan melyik A, illetve B halmazt vettük. Be kell tehát bizonyítanunk, ha ugyanahhoz az a, b számosságokhoz más halmazokat veszünk, mondjuk A'-t és B'-t, akkor is ugyanazt az eredményt kapjuk. Azaz az alábbi állításra van szükségünk.

8. Tétel. *Ha $A \sim A'$, $B \sim B'$, továbbá $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, akkor $A \cup B \sim A' \cup B'$.*

Bizonyítás. Ha $f : A \to A'$ és $g : B \to B'$ bijekció, akkor az alábbi F függvény bijekció lesz $A \cup B$ és $A' \cup B'$ között.

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \\ g(x), & \text{ha } x \in B. \end{cases}$$

Jegyezzük meg, hogy az axiomatikus halmazelméleti függvénydefiníciót figyelembevéve $F = f \cup g$ írható. □

Az éppen definiált számosságösszeadás nyilvánvalóan kielégíti az egyik kritériumot, amit megköveteltünk: természetes számokra a szokásos összeget adja.

Próbáljuk meg felírni az összeadás azonosságait.

9. Tétel.
(a) $a + b = b + a$.
(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Bizonyítás.
(a) Mivel halmazokra teljesül az $A \cup B = B \cup A$ azonosság.
(a) Az $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ halmazegyenlőség alapján. □

Szorzás

Ha a és b számosságok, ab szorzatukat a következőképpen definiáljuk: legyenek A és B halmazok, $|A| = a$, $|B| = b$, ekkor ab az $A \times B$ halmaz számossága.

Itt ismét igazolni kell, hogy az eredmény csak a-tól és b-től függ.

10. Tétel. *Ha $A \sim A'$ és $B \sim B'$, akkor $A \times B \sim A' \times B'$.*

Bizonyítás. Ha $f : A \to A'$ és $g : B \to B'$ bijekció, akkor az alábbi F függvény bijekció lesz $A \times B$ és $A' \times B'$ között.

$$F\big(\langle x, y\rangle\big) = \big\langle f(x), g(y)\big\rangle$$

□

Vizsgáljuk meg a szorzás azonosságait.

11. Tétel.
(a) $ab = ba$.
(b) $(ab)c = a(bc)$.
(c) $(a + b)c = ac + bc$.

Bizonyítás.
(a) Azt kell belátni, hogy adott A és B halmaz esetén

$$A \times B \sim B \times A.$$

Egy megfelelő bijekció adható meg a következőképpen: rendeljük hozzá $\langle x, y\rangle$-hoz $\langle y, x\rangle$-et.
(b) Be kell látni, hogy

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C).$$

Egy bijekció a két oldal között a következőképpen adható meg: rendeljük hozzá $\big\langle\langle x, y\rangle, z\big\rangle$-hez $\big\langle x, \langle y, z\rangle\big\rangle$-t.
(c) Azonnal adódik az

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

azonosságból. □

Végtelen sok számosság összeadása

Végtelen sok számosság összegét (helyesebben számosságok tetszőleges halmazára azok összegét) a kézenfekvő módon definiáljuk: ha $\{a_i : i \in I\}$ számosságok tetszőleges halmaza, akkor

$$\sum_{i \in I} a_i$$

-vel vagy $\sum\{a_i : i \in I\}$-vel jelölt összegüket a következőképpen számítjuk ki: legyen $\{A_i : i \in I\}$ páronként közös elem nélküli halmazok rendszere, amelyre $|A_i| = a_i$. Ekkor $\left|\bigcup\{A_i : i \in I\}\right|$ a kívánt számosság.

Itt a szokásos problémával kell szembenéznünk, nevezetesen, be kell látni, hogy az eredmény nem függ az $\{A_i : i \in I\}$ halmazok választásától, csak a $\{a_i : i \in I\}$ halmaztól. Ehhez a következő állításra van szükségünk.

12. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\{A_i : i \in I\}$ páronként közös elem nélküli halmazok rendszere és $\{A'_i : i \in I\}$ ugyancsak. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in I$-re $A_i \sim A'_i$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \sim \bigcup_{i \in I} A'_i.$$

Bizonyítás. Legyen $f_i : A_i \to A'_i$ bijekció. Ekkor

$$F : \bigcup\{A_i : i \in I\} \to \bigcup\{A'_i : i \in I\}$$

bijekció, ahol az F függvényt a következőképpen definiáljuk. Legyen $F(x) = f_i(x)$, ahol $i \in I$ az egyetlen index, amire $x \in A_i$ (csak egy ilyen i van, mert a halmazok páronként diszjunktak). □

Végtelen sok számosság szorzása

Logikus, hogy végtelen sok számosság szorzatának definiálásához először a Descartes-szorzatot kell általánosítani: ki kell találni, mi legyen végtelen sok halmaz szorzata. Mivel $A \times B$ úgy is megfogalmazható, hogy minden lehetséges módon egymástól függetlenül kiválasztunk A-ból és B-ből is egy elemet, ezt próbáljuk általánosítani.

Ha adott halmazoknak egy tetszőleges $\{A_i : i \in I\}$ rendszere, a halmazok *Descartes-szorzat*án a következő halmazt értjük:

$$\prod_{i \in I} A_i = \bigl\{f : f(i) \in A_i \text{ minden } i \in I\text{-re}\bigr\}.$$

Kicsit másként jelölve a Descartes-szorzatot: $\prod\{A_i : i \in I\}$. Tehát a halmaz elemei azok az I-n értelmezett függvények, amelyekre igaz, hogy minden $i \in I$-re az i-n felvett érték az A_i halmaz valamelyik eleme.

Megint csak, először be kell látni, hogy így halmazt kapunk. A szokásos módon ehhez elég egy halmazba „zárni" az összes szereplő függvényeket, azaz egy olyan C halmazt találni, hogy $f \in \prod\{A_i : i \in I\}$ esetén $f \in C$ teljesüljön. Ismét csak elég olyan A és B halmazokat találni, hogy minden ilyen f-re $f \subseteq A \times B$ igaz legyen, de itt nyilván vehető $A = I$, $B = \bigcup\{A_i : i \in I\}$. A Descartes-szorzat tehát része a

$$P\Bigl(I \times \bigcup\{A_i : i \in I\}\Bigr)$$

halmaznak, így maga is halmaz.

Definícióink egy furcsaságot eredményeznek. Próbáljuk meg meghatározni $A_0 \times A_1$-et adott A_0 és A_1 halmazok esetén! Ez (látszólag) nem probléma, a rendezett párok halmaza, azaz

$$A_0 \times A_1 = \bigl\{\langle x, y\rangle : x \in A_0, y \in A_1\bigr\}.$$

Ugyanakkor ez speciális esete az iménti definíciónak is, ami szerint $A_0 \times A_1$ azon f függvények halmaza, amelyek értelmezési tartománya $\{0, 1\}$ és $f(0) \in A_0$, $f(1) \in A_1$ teljesül. Ez a két halmaz persze nem azonos, bár könnyű találni egy bijekciót közöttük: rendeljük hozzá $\langle x, y\rangle$-hoz azt a $\{0, 1\}$-en értelmezett függvényt, amelyre $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Számosságok tetszőleges halmazának szorzatát ezekután így definiáljuk; legyen $\{a_i : i \in I\}$ számosságok halmaza. Ekkor

$$\prod_{i \in I} a_i = \Bigl|\prod_{i \in I} A_i\Bigr|$$

ahol A_i olyan halmaz, hogy $|A_i| = a_i$.

A végtelen összeadás és szorzás azonosságai közül csak egyet, a disztributivitás még csak nem is legáltalánosabb formáját mondjuk ki és bizonyítjuk.

13. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\{a_i : i \in I\}$ *és* $\{b_j : j \in J\}$ *számosságok halmazai. Ekkor*

$$\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j.$$

Bizonyítás. Legyenek $\{A_i : i \in I\}$ diszjunkt halmazok $|A_i| = a_i$ számossággal és $\{B_j : j \in J\}$ diszjunkt halmazok $|B_j| = b_j$ számossággal. Elég belátni, hogy

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \times \Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \times B_j)$$

és hogy a jobboldali felbontás diszjunkt. Valóban, a baloldal elemei olyan $\langle x, y\rangle$ alakú rendezett párok, ahol x valamelyik A_i, y pedig valamelyik B_j halmaz eleme, és minden $\langle x, y\rangle$ pár csak egy $A_i \times B_j$ eleme lehet, hiszen minden x csak egy A_i-ben, minden y csak egy B_j-ben lehet. □

Hatványozás

A hatványozást egészen egyszerűen úgy definiálhatjuk, mint ismételt szorzást, tehát $a^b = \prod a$, ahol b-szer vesszük tényezőként a-t. Azaz, ha $|I| = b$, akkor

$$a^b = \prod_{i\in I} a_i,$$

ahol minden a_i egyenlő a-val. Tovább visszafejtve a definíciót,

$$a^b = \Big|\prod_{i\in I} A_i\Big|,$$

ahol $|A_i| = a_i = a$ és itt célszerűen minden A_i halmazt ugyanannak az A halmaznak választva és beírva a Descartes-szorzat definícióját az adódik, hogy a^b egyenlő a

$$\{f : I \to A\}$$

halmaz számosságával.

Ez motiválja a következő definícót: ha A és B halmazok, legyen

$$^{B}A = \{f : B \to A\}$$

és, ha $a = |A|$, $b = |B|$, akkor $a^b = |^{B}A|$. Annak oka, hogy a halmazhatványozásban a kitevőt balra írjuk az, hogy ez segít minket nem összekeverni, hogy az A-ból B-be vagy a B-ből A-ba képező függvényekről van szó.

Ezekután kiszámítjuk a nevezetes hatványokat.

14. Tétel. $a^0 = 1$, $0^a = 0$ $(a \neq 0)$, $a^1 = a$, $1^a = 1$.

Bizonyítás. a^0 kiszámításához le kell írni ${}^{\emptyset}A$-t. Azaz, az $\emptyset \to A$ függvényeket kell számbavenni, és ilyen pontosan egy van: az üres függvény. Tehát ${}^{\emptyset}A = \{\emptyset\}$ és ezért $a^0 = 1$.

0^a kiszámításához az ${}^{A}\emptyset$ halmazt kell tanulmányozni. Ha A nem az üres halmaz, nincs olyan függvény, amely A-ból az üres halmazba képezne. Így tehát ${}^{A}\emptyset = \emptyset$ és ezért $0^a = 0$. Ha viszont $A = \emptyset$, akkor, mint láttuk pontosan egy $\emptyset \to \emptyset$ függvény van, így $0^0 = 1$.

A továbbiakhoz egy 1 elemű mintahalmazra van szükségünk, legyen ez $\{0\}$. a^1 kiszámításához a ${}^{\{0\}}A$ halmazt kell meghatározni. Ebben a $\{0\}$-n értelmezett, A-ba képező függvények vannak, s ezek valóban annyian vannak, mint ahány eleme A-nak, mert az $f : \{0\} \to A$ függvényt meghatározza, hogy $f(0)$ melyik eleme A-nak.

Végül ${}^{A}\{0\}$-t kell leírni. Ez egyszerű: a kívánt halmazban egyetlen függvény van, az, amelyik A minden elemén 0-t vesz fel. $\square$

Következnek a hatványozás azonosságai.

15. Tétel.
(a) $(ab)^c = a^c b^c$.
(b) $(a^b)^c = a^{(bc)}$.
(c) $a^{b+c} = a^b a^c$.

Bizonyítás.
(a) Azt kell belátni, hogy

$${}^{C}(A \times B) \sim {}^{C}A \times {}^{C}B.$$

A baloldal egy eleme olyan F függvény, amely $z \in C$-re $A \times B$-beli elemet vesz fel, tehát értékei $F(z) = \langle f(z), g(z)\rangle$ alakúak, ahol $f(z) \in A$, $g(z) \in B$, tehát $f \in {}^{C}A$, $g \in {}^{C}B$. Ezért célszerű F-hez ezt az $\langle f, g\rangle$ párt hozzárendelni. (Vigyázat ! Axiomatikus halmazelméleti definícióink szerint F NEM AZONOS $\langle f, g\rangle$-vel, hiszen F $\big\langle z, \langle x, y\rangle\big\rangle$ alakú rendezett párokból áll (ahol $z \in C$, $x \in A$, $y \in B$) míg $\langle f, g\rangle$ egyetlen rendezett pár. Ezt azért emeljük ki, mert az axiomatikus halmazelméleten kívül jogos és szokásos az $F = \langle f, g\rangle$ azonosítás, itt azonban ragaszkodunk azon elvünkhöz, hogy két halmaz csak akkor azonos, ha ugyanazok az elemeik.)
(b) Azt kell belátni, hogy

$${}^{C}\left({}^{B}A\right) \sim {}^{B\times C}A.$$

Az előző okoskodáshoz hasonlóan úgy fogunk érvelni, hogy a két halmaz tulajdonképpen ugyanaz, amellett persze, hogy teljesen más. Legyen f a baloldal egy eleme ! Ekkor f egy C-ből ${}^{B}A$-ba képező függvény. Tehát $z \in C$-re $f(z)$ egy valamilyen $B \to A$ függvény. Ezt úgy tudjuk megadni, hogy ha megadjuk minden $y \in B$-re az $f(z)(y) \in A$ értéket. Azaz, minden $\langle y, z\rangle \in B \times C$ párhoz ki kell jelölni egy A-beli értéket. Ez valóban egy ${}^{B\times C}A$-beli függvény megadását jelenti. A formális bijekció a két oldal között tehát a következő lesz: $f \in {}^{C}\left({}^{B}A\right)$-hoz rendeljük hozzá $g \in {}^{B\times C}A$-t, ahol $g\big(\langle y, z\rangle\big) = f(z)(y)$.

(c) Azt kell belátni, hogy

$$^{B\cup C}A \sim {}^{B}A \times {}^{C}A,$$

ahol $B \cap C = \emptyset$. A baloldal elemei $F : (B \cup C) \to A$ alakú függvények, míg a jobboldalé (f, g) alakú párok, ahol $f : B \to A$, $g : C \to A$ alakú függvény. Ezután könnyű a bijekciót megadni: adott $F : (B \cup C) \to A$-hez rendeljük hozzá (f, g)-t, ahol $f = F|A$, $g = F|B$. Így valóban minden párt megkapunk a $B \cap C = \emptyset$ kikötés miatt: adott $f : B \to A$, $g : C \to A$ függvényekhez vegyük a következő $F : (B \cup C) \to A$ függvényt:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \\ g(x), & x \in C. \end{cases}$$

Ezt a függvény axiómatikus halmazelméleti definíciója miatt így is írhatjuk: $F = f \cup g$. □

A műveletek monotonitása.

A végtelen számosságokon értelmezett műveletek nem monotonok a szokásos értelemben, ugyanis például $0 < 1$ mégis $0 + \aleph_0 = 1 + \aleph_0 = \aleph_0$. Hasonlóan $1 < 2$ de $1\aleph_0 = 2\aleph_0 = \aleph_0$. Így tehát a szigorú monotonitási szabály nem remélhető (ha minden tagot nemcsökkentünk és legalább egyet szigorúan növelünk, akkor az összeg is szigorúan nő) de a gyenge változat még igaz marad (amikor csak $\leq$-t kapunk).

16. Tétel. *Tegyük fel, hogy adva van számosságok két halmaza (azonos indexhalmazzal): $\{a_i : i \in I\}$ és $\{b_i : i \in I\}$, továbbá $a_i \leq b_i$ teljesül minden $i \in I$-re. Ekkor $\sum\{a_i : i \in I\} \leq \sum\{b_i : i \in I\}$ és $\prod\{a_i : i \in I\} \leq \prod\{b_i : i \in I\}$.*

Bizonyítás. Legyenek $\{A_i : i \in I\}$, illetve $\{B_i : i \in I\}$ megfelelő számosságú halmazrendszerek, azaz $|A_i| = a_i$ és $|B_i| = b_i$, továbbá az első egyenlőtlenség bizonyításához azt is kikötjük, hogy a rendszerek diszjunkt halmazokból állnak. Mivel $a_i \leq b_i$ egyszerűen feltehetjük, hogy $A_i \subseteq B_i$. De ekkor $\bigcup\{A_i : i \in I\} \subseteq \bigcup\{B_i : i \in I\}$, így $\sum\{a_i : i \in I\} \leq \sum\{b_i : i \in I\}$-t rögtön beláttuk. A második egyenlőtlenséghez azt elég belátni, hogy

$$\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i,$$

ami a Descartes-szorzat definíciójából azonnal adódik: a baloldal elemei azok az I-n értelmezett függvények, amelyeknél $f(i) \in A_i$ teljesül minden $i \in I$-re, míg a jobboldalé azok, amelyeknél $f(i) \in B_i$ teljesül minden $i \in I$-re, s az első feltételből nyilván következik a második. □

Hasonló tétel igaz a hatványozás gyenge monotonitására.

17. Tétel. *Ha $a_0 \leq a_1$ és $b_0 \leq b_1$ akkor $a_0^{b_0} \leq a_1^{b_1}$ kivéve, ha $0 = a_0 = a_1 = b_0 < b_1$, ekkor ugyanis $1 = 0^0 > 0^{b_1} = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $|A_0| = a_0$, $|A_1| = a_1$, $|B_0| = b_0$, $|B_1| = b_1$, és még, mivel $a_0 \leq a_1$, $b_0 \leq b_1$ azt is feltesszük, hogy $A_0 \subseteq A_1$ és $B_0 \subseteq B_1$. Mivel $a_0^{b_0} \leq a_1^{b_1}$-t kell belátni, a legegyszerűbb persze az lenne, hogy bebizonyítsuk ${}^{B_0}A_0 \subseteq {}^{B_1}A_1$-t, ez azonban általában nem igaz: a baloldal elemei B_0-ból képező függvények, a jobboldalé B_1-ből képezők. Így mindenképpen egy $F : {}^{B_0}A_0 \to {}^{B_1}A_1$ injekciót kell megadni. Ha $f : B_0 \to A_0$, akkor $F(f)$ legyen f olyan kiterjesztése B_1-re, ami még mindig A_1-be képez. Kissé precízebben: legyen $t \in A_1$, definiáljuk $F(f)$-et a következőképpen:

$$F(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B_0 \\ t, & x \in B_1 - B_0. \end{cases}$$

Világos, hogy ez injekció, hisz $F(f)$-ből visszanyerhetjük f-t (megszorítva B_0-ra) és a konstrukció csak akkor nem működik, ha $A_1 = \emptyset$ (ekkor nem tudunk $t \in A_1$-et kiválasztani). Ekkor persze $A_0 = \emptyset$ is teljesül. A baj csak akkor van, ha $B_0 \neq B_1$ (hiszen csak ekkor kell kiterjeszteni), és ha még $B_0 \neq \emptyset$, akkor ismét nincs baj, hiszen mindkét oldal (${}^{B_0}A_0$ és ${}^{B_1}A_1$) az üres halmaz, tehát van az elsőnek injekciója a másodikba. Így azt is megkaptuk, mikor nem áll fenn az egyenlőtlenség. □

18. Tétel. *Minden A halmazra $|P(A)| = 2^{|A|}$.*

Bizonyítás. A szokásos módon, mindkét oldalhoz keresünk egy „mintahalmaz"-t, és belátjuk, hogy ezek ekvivalensek. A baloldal mintahalmaza persze $P(A)$. A jobboldalhoz először egy 2 számosságú halmazt keresünk, ez $\{0,1\}$ lesz. Ezután a jobboldal mintahalmaza

$${}^{A}\{0,1\} = \{f : A \to \{0,1\}\}$$

azaz az A-ból $\{0,1\}$-be képező függvények halmaza lesz. A két oldal közötti bijekciót így adjuk meg: ha $B \subseteq A$, akkor a neki megfelelő függvény legyen a χ_B karakterisztikus függvény, tehát az, aminek definíciója

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in B \\ 0, & \text{ha } x \in A - B. \end{cases}$$

□

19. Tétel. *Minden a számosságra $2^a > a$.*

Bizonyítás. Legyen $|A| = a$. Ekkor Cantor tételét és az előző tételt felhasználva $2^a = 2^{|A|} = |P(A)| > |A| = a$. □

8 A kiválasztási axióma

A szorzás monotonitásának egyik speciális esete a következő:

ha $\{a_i : i \in I\}$ számosságok halmaza és $a_i \geq 1$ minden $i \in I$-re, akkor

$$\prod_{i \in I} a_i \geq 1.$$

Érdemes ezt a halmazok nyelvén is megfogalmazni:
ha $\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Ezt még tovább átfogalmazva kimondjuk, mint következő axiómánkat:

7. A kiválasztási axióma.

> Ha $\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor van olyan I-n értelmezett f függvény, hogy $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$-re.

A kiválasztási axómát, Cohen 1963-as eredménye szerint nem lehet levezetni a többiből. Hogyan ? Nem ezt csináltuk éppen az előbb, amikor levezettünk egy tételt, aminek egy speciális esete a kiválasztási axióma lett ? Ez az ellentmondás csak úgy oldható fel, ha rámutatunk, hogy a bizonyításban használtuk ezt az axiómát. Ez valóban így van, sőt, számos ismert és egyszerű bizonyításban használtuk azt — anélkül, hogy tudtunk volna róla. Először nézzünk meg néhány példát erre.

20. Tétel. *Megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.*

Bizonyítás. Legyenek halmazaink $A_0, A_1, \ldots$, soroljuk fel mindegyiket:
$A_0 = \{a_{00}, a_{01}, \ldots\}$,
$A_1 = \{a_{10}, a_{11}, \ldots\}$,
...
Ezután uniójuk a szokásos módon felsorolható:

$$X = A_0 \cup A_1 \cup \cdots = \{a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}, \ldots\},$$

és készen vagyunk.

Hohó ! Hol használtuk itt a kiválasztási axiómát ? E kérdés megválaszolásához ismételjük el az előző bizonyítást, de egy kicsit részletesebben.

Adva van tehát megszámlálható halmazok egy A megszámlálható halmaza. **Vegyük** A elemeinek egy felsorolását: $A = \{A_0, A_1, \ldots\}$. (Itt még nem használtuk a kiválasztási axiómát, egy nemüres halmaznak vettük egy elemét.) Minden A_i halmazra létezik felsorolásainak nemüres B_i halmaza. **Válasszuk ki** minden A_i halmazhoz elemeinek egy felsorolását ! Azaz vegyünk egy olyan g függvényt, amely az $i = 0, 1, \ldots$ értékekre $g(i) \in B_i$-t elégíti ki. (Itt használtuk a kiválasztási axiómát. Egyszerre választottuk ki végtelen sok nemüres halmaznak egy-egy elemét.) Ezután g segítségével készítsük el a következő mátrixot:

$$\begin{array}{ccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & . & . \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & . & . \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

végül a szokásos cikcakkal járjuk be ezt a mátrixot. □

Következő példánk a folytonosság kétféle definíciójának jólismert ekvivalenciája.

21. Tétel. *Legyen f valós függvény, a valós szám, $f(a) = b$. A következő két állítás ekvivalens:*

(a) *ha $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to b$,*

(b) *minden $\varepsilon > 0$-hoz van $\delta > 0$, hogy $|x - a| < \delta$-ból következik, hogy $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Csak az (a) → (b) irányt bizonyítjuk, mert számunkra itt ez az érdekes.

Tegyük fel, hogy (b) nem igaz, ekkor volna valamilyen $\varepsilon > 0$, amihez semmilyen $\delta > 0$ nem jó. Tehát $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$-ot választva találunk $|x_n - a| < \frac{1}{n}$-et, amire $\big|f(x_n) - b\big| \geq \varepsilon$ és mivel ekkor $x_n \to a$, de $f(x_n) \not\to b$, ezért (a) nem teljesül.

Fogalmazzuk át ezt az okoskodást úgy, hogy világosabb legyen a kiválasztási axióma szerepe! Tegyük fel, hogy g olyan függvény, amely $\mathbf{R}$ nemüres részhalmazainak halmazán van értelmezve és $g(X) \in X$ minden ilyen X halmazra (tehát a kiválasztási axiómát ezeknek az X halmazoknak a családjára alkalmazzuk). Ezután az $\{x_n : n = 1, \ldots\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: legyen $x_n = g(X_n)$, ahol

$$X_n = \Big\{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \frac{1}{n}, \big|f(x) - b\big| \geq \varepsilon\Big\}.$$

□

Az eredeti bizonyításban, mindkét esetben, végtelen sokszor tettünk meg egy „válasszunk a nemüres … halmazból egy elemet” típusú lépést. Az ilyen lépéseknek megvan a jogosultságuk (szabad elemet választani nemüres halmazból), de egy bizonyítás nem tartalmazhat végtelen sok lépést, legalábbis, mint a logika részben látni fogjuk, a matematika axiomatikus felépítésében. Ehelyett egyszer választunk (egy kiválasztási függvényt) s erre vezetjük vissza a további lépéseket. Hangsúlyozom, hogy itt bizonyítási lépésről van szó, a faktoriális függvény $f(0) = 1$, $f(n+1) = f(n)(n+1)$ definíciója egy (vagy két) lépésnek számít. (Ez ugyan rekurzió, de a két előbbi képlet egyértelműen megadja az f függvényt. Ha találomra döntöm el, hogy $f(n+1)$ hogyan keletkezik $f(n)$-ből, akkor csak ,,végtelen sok lépés után fog megszületni a függvény", addig nincs értelme f-ről, mint létezőről beszélni.) Tehát egy lépésben kreálunk egy függvényt, ami minden esetleges szituációban megmondja, mit kell csinálni. A fenti tételnél, a g függvényből egyértelműen meghatároztuk az x_n sorozatot, abban a pillanatban, amikor g-t létezőnek fogadjuk el, az x_n sorozat is létezik.

Mint látni fogjuk, a kiválasztási axiómának számos érdekes következménye van a matematika különböző ágaiban. Ezek egy része természetes, intuiciónknak megfelelő, pozitív állítás. Ilyenekre példa: a számosságösszehasonlítás trichotómiája, az $x^2 = x$ azonosság minden végtelen x számosságra, illetve az a tétel, hogy minden vektortérnek van bázisa. Nagy számban vannak az olyan következmények is, amelyek nehezen hihető, bizarr, ellenpélda-szerű állításokat fogalmaznak meg. Ilyenek: a jólrendezési tétel, a Cauchy-féle függvényegyenlet nem cx alakú megoldásának létezése, az $f(x) = x$ függvény felbonhatósága két periodikus függvény összegére. Megemlítünk két továbbit: a Banach-Tarski paradoxon szerint a térbeli egységgömb véges sok részre darabolható, s ezekből átfedés- és hézagmentesen két egységgömb rakható össze. A másik példa Laczkovich Miklós tétele (1989): az egység területű négyzet felbontható véges sok darabra úgy, hogy ezekből (ismét csak átfedés és hézag nélkül) egység területű körlap rakható össze. (Ezt nevezik a kör modern négyszögesítésének.)

A következőkben a kiválasztási axióma speciális eseteivel foglalkozunk. Jelölje C_n a kiválasztási axiómát n-elemő halmazokra, azaz azt az állítást, hogy minden $\{A_i : i \in I\}$ rendszernek van kiválasztási függvénye, ha $|A_i| = n$ teljesül minden $i \in I$-re.

22. Tétel. *C_2-ből következik C_4.*

Bizonyítás. Legyen $\{A_i : i \in I\}$ halmazrendszer, amire $|A_i| = 4$ teljesül ($i \in I$). Mivel C_2-t feltesszük, van f függvény, ami az $A = \bigcup\{A_i : i \in I\}$ halmaz minden 2-elemű halmazának kiválasztja egy elemét. Célunk megadni egy eljárást, ami f segítségével minden A_i-ből egyértelműen kiválaszt egy $g(i)$ elemet. Mivel $|A_i| = 4$, $\binom{4}{2} = 6$ kételemű részhalmazából választunk ki egy-egy elemet. A_i minden elemét legfeljebb 3-szor választhatja f ki, és csak egy elemet választhat pontosan 3-szor. Ez indokolja a következő eset bevezetését.

Első eset. Van $x \in A_i$, amit f A_i három részhalmazából választja ki.
Ekkor legyen $g(i) = x$.

Második eset. Nem teljesül az első eset, de van olyan $y \in A_i$, amit f A_i semelyik részhalmazából sem választ ki.

Ilyen y csak egy lehet, hiszen, ha y, y' is ilyen, akkor f nem választana az $\{y, y'\}$ halmazból elemet. Ekkor legyen $g(i) = y$.

Harmadik eset. A_i minden eleme egyszer vagy kétszer van kiválasztva.

Ez csak úgy lehet, ha mind az egyszer, mind a kétszer választott elemek száma 2. Ha most a kétszer válsztott elemek halmaza B_i, akkor $|B_i| = 2$, legyen tehát $g(i) = f(B_i)$. $\square$

Térjünk vissza eredeti kérdésünkhöz és keressük meg, hogy a monotonitási tétel (16. Tétel) bizonyításában hol használtuk fel a kiválasztási axiómát! A minket érdeklő állítás így fogalmazható: ha $\{A_i : i \in I\}$ és $\{B_i : i \in I\}$ halmazok rendszerei és minden i-re A_i-nek van injekciója B_i-be, akkor $\prod\{A_i : i \in I\}$-nek van injekciója $\prod\{B_i : i \in I\}$-be. A bizonyítás során rögzítettünk egy g_i injekciót A_i-ből B_i-be (itt használtuk fel a kiválasztási axiómát, hiszen egyszerre végtelen sok dolgot választottunk ki), és ebből konstruáltuk az

$$F : \prod\{A_i : i \in I\} \to \prod\{B_i : i \in I\}$$

függvényt: legyen $F(f)(i) = g_i\big(f(i)\big)$. (A bizonyítás egy nem lényeges további lépést is tartalmaz: minden A_i halmazt átcseréltünk az azonos nagyságú $g_i[A_i]$ halmazra.)

23. Tétel. *Ha a végtelen számosság, akkor $a \geq \aleph_0$.*

Bizonyítás. Legyen $|A| = a$. $\aleph_0$ számosságú mintahalmazunk kézenfekvő módon a természetes számok $\mathbf{N}$ halmaza, így egy $f\colon \mathbf{N} \to A$ injekciót kell produkálnunk.

Mivel A végtelen, van eleme, válasszunk ki egyet, mondjuk x_0-t. Mivel A végtelen, van legalább két eleme, így $A - \{x_0\}$-nak is van eleme, válasszunk ki egyet, mondjuk x_1-et. Mivel A végtelen, legalább három eleme van, $A - \{x_0, x_1\}$-nek is van eleme, válasszunk ki egyet, mondjuk x_2-t. Ezt folytatva, kapjuk az $x_0, x_1, \ldots \in A$ elemeket, s ekkor $f(i) = x_i$ injekció ($i = 0, 1, \ldots$).

Ebben a bizonyításban végtelen sok lépésben választottunk egy-egy elemet, így érdemes átfogalmazni a kiválasztási axióma segítségével. Legyen g kiválasztási függvény A nemüres részhalmazain, azaz $g(X) \in X$ minden $X \subseteq A$-ra, amire $X \neq \emptyset$. Definiáljuk f-et a következőképpen: $f(0) = g(A)$, $f(1) = g\big(A - \{f(0)\}\big)$, $f(2) = g\big(A - \{f(0), f(1)\}\big)$, stb. Mivel A végtelen, f minden természetes számra definiálva lesz. $\square$

24. Tétel. *Ha a végtelen számosság, akkor $a + \aleph_0 = a$.*

Bizonyítás. Legyen $|A| = a$. Az előző tétel szerint van $f\colon \mathbf{N} \to A$ injekció, így, ha $f[\mathbf{N}]$ ennek értékkészlete, $B = A - f[\mathbf{N}]$ annak komplementere, $b = |B|$, akkor $a = b + \aleph_0$. Ekkor

$$a + \aleph_0 = (b + \aleph_0) + \aleph_0 = b + (\aleph_0 + \aleph_0) = b + \aleph_0 = a.$$

Itt a második egyenlőség az összeadás asszociativitásából következik, a harmadik pedig a régről ismert $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ egyenlőséget használja fel. $\square$

Persze, a monotonitás miatt azonnal kapjuk, hogy ha a végtelen, n véges számosság, akkor $a + n = a$, hiszen

$$a \leq a + n \leq a + \aleph_0 = a.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a kézenfekvőnek látszó $a+1=a$ egyenlőséget (ahol a végtelen számosság) nem tudjuk olyan nagyon egyszerűen bizonyítani.

9 Példák számosságokra

Ebben a fejezetben ismételten fogjuk használni a c jelölést a kontinuum számosságra, tehát a valós számok halmazának számosságára.

25. Tétel. *Minden valós intervallum számossága kontinuum (kivéve az egypontú intervallumokat és az $\emptyset$-t).*

Bizonyítás. Ne felejtsük, a kontinuum számosság definíció szerint az $\mathbf{R}$, vagy ha tetszik a $(-\infty, \infty)$ halmaz számossága. A tangens függvény bijekciót ad meg a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallum és $\mathbf{R}$ között. Nagyítással/kicsinyítéssel, illetve eltolással bijekciót adhatunk meg bármelyik (a,b) nyílt intevallum és $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ között. Ha pedig I egy nem előbbi típusú intervallum (tehát zárt, félig zárt, vagy egyirányban végtelen) akkor az ekvivalencia-tételt használjuk: legyen $(a,b) \subseteq I$ elég rövid nyílt részintervallum, ekkor a fentiek szerint $\mathbf{R}$-nek van injekciója $(a,b) \subseteq I$-be, $I \subseteq \mathbf{R}$ miatt van másik irányú injekció is, tehát van $I \sim \mathbf{R}$ bijekció is. □

26. Tétel. $2^{\aleph_0} = c$.

Bizonyítás. Először megfelelő halmazokat kell találni a két oldalhoz, amelyek közötti bijekció létezését igazolni fogjuk. A baloldal mintahalmaza ${}^{\mathbf{N}}\{0,1\}$ lesz, a jobboldalhoz bármelyik nemtriviális intervallumot választhatjuk, legyen ez $[0,1)$. ${}^{\mathbf{N}}\{0,1\}$ elemeire, tehát a természetes számokból $\{0,1\}$-be képező függvényekre gondoljunk, mint végtelen 0-1 sorozatokra. Kézenfekvő ötlet lenne a 0 és 1 közötti valós számokhoz kettes számrendszerbeli kifejtésüknek a kettedesvessző utáni részét, mint végtelen 0-1-sorozatot rendelni. Ez azonban nem lesz bijekció, csak injekció. Ugyanis olyan sorozatokat nem kapunk meg eredményül, amelyek valahonnan kezdve végig egyesekből állnak. (Hasonlóan ahhoz, hogy egy valós szám tizedes kifejtése nem tartalmazhat valahonnan kezdve végig 9-est.) Ha a másik irányban is találunk injekciót, akkor készen leszünk az ekvivalencia tétel alkalmazásával. Egy ilyen injekció például a következő: a végtelen 0-1 sorozatot olvassuk le, mint egy valós szám *tizes számrendszerbeli* felírása. Mivel persze egy 0-1 sorozat nem állhat valahonnan kezdve csupa 9-esből, így valóban injekciót kapunk. □

27. Tétel. $c^2 = c$.

Bizonyítás. Az előző tétel és a hatványozás azonosságai alapján:

$$c^2 = \left(2^{\aleph_0}\right)^2 = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c.$$

□

Tehát a síknak ugyanannyi pontja van, mint az egyenesnek. Ezt először Cantor bizonyította, közvetlenül, meglehetősen bonyolult bijekciót adva $\mathbf{R}$ és $\mathbf{R}^2$ között. A fenti elegáns (ám többet használó) bizonyítás is tőle ered.

28. Tétel. $n = 2, 3, \ldots$-ra $c^n = c$.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján indukcióval: az $n = 2$ eset már megvan, n-ről $n+1$-re pedig így okoskodunk:

$$c^{n+1} = c^n c = c^2 = c.$$

□

Azaz, az n-dimenziós térnek, $\mathbf{R}^n$-nek ugyanannyi pontja van, mint az egyenesnek (vagy egy bármilyen rövid szakasznak). Ennek jelentősége abban rejlett, hogy a bizonyítás idején a születőben lévő topológia nem tudta megkülönböztetni a különböző euklideszi tereket, nem volt még kidolgozva a dimenzió matematikai fogalma. A tétel azt mutatja, hogy a számosság alkalmatlan e terek leírására.

A fenti tételt alkalmazhatjuk véges dimenziós „fázisterek"-re is. Erre egy példát adunk.

29. Tétel. *A síkbeli, egyenlőszárú háromszögek száma c.*

Bizonyítás. Megint csak az ekvivalencia-tétel miatt elég belátni, hogy a kívánt számosság legfeljebb c és legalább c. Először azt bizonyítjuk, hogy az egyenlőszárú háromszögek száma legfeljebb kontinuum. Minden egyenlőszárú háromszög megadható, ha megadjuk csúcspontjainak összesen 6 koordinátáját, így összesen $c^6 = c$ lehetőség van. Másrészt könnyen megadhatunk kontinuum sok különböző egyenlőszárú háromszöget: legyenek a csúcsok $(-1, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, x)$ valamilyen $x > 0$-ra. □

30. Tétel $c^{\aleph_0} = c$.

Bizonyítás. $c^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$. □

31. Tétel. *A folytonos $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények száma c.*

Bizonyítás. Ha $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, akkor rendeljük hozzá $f|\mathbf{Q}$ megszorítását. Ekkor különböző függvényekhez különböző függvényeket rendeltünk: valóban, ha $f \neq g$ folytonos függvények, akkor van olyan valós x szám, hogy $f(x) \neq g(x)$, a folytonosság miatt ha y x-hez elég közeli szám, akkor $f(y)$ $f(x)$-hez, $g(y)$ $g(x)$-hez lesz egyre közelebb, így ha alkalmas, x-hez közeli racionális y számot választunk, akkor $f(y) \neq g(y)$. Tehát a vizsgált halmazt (valós, folytonos függvények) beinjektáltuk a $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ függvények halmazába, aminek számossága $|{}^{\mathbf{Q}}\mathbf{R}| = c^{\aleph_0} = c$.

Be kell még látni, hogy a folytonos függvények száma legalább c, de könnyű megadni c különböző függvényt: például a konstans függvények száma annyi ahány konstans értéket megadhatunk, azaz c. □

32. Tétel. *Az* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvények száma* 2^c.

Bizonyítás. Persze tudjuk, hogy $2^c > c$ és az is világos, hogy a valós függvények száma c^c. Azt kell tehát belátni, hogy $2^c = c^c$. Az egyik irányú egyenlőtlenség, $2^c \leq c^c$ a hatványozás monotonitásából azonnal következik, így $c^c \leq 2^c$-t kell belátni. Ezt így lehet:

$$c^c \leq \left(2^c\right)^c = 2^{cc} = 2^c,$$

mivel $c^2 = c$. □

Jegyezzük meg, hogy $2^c > c$, tehát kontinuumnál több valós függvény van. Így az utolsó két tétel következménye, hogy van olyan valós függvény, amely nem folytonos. Kétségkívül sikerült ennek legbonyolultabb bizonyítását megtalálni.

Definiáljuk a $c_1, c_2, \ldots$ számosságokat a következőképpen. $c_1 = c$. Indukcióval $c_{n+1} = 2^{c_n}$. Ezzel egy növő $c = c_1 < c_2 < \cdots$ sorozatot definiáltunk.

33. Tétel. $n = 1, 2, \ldots$*-re* $c_n^2 = c_n$.

Bizonyítás. n-re indukcióval. $n = 1$-re, tehát c-re az állítást láttuk. Tegyük fel, hogy tudjuk $c_n^2 = c_n$-t. A $c_{n+1}^2 = c_{n+1}$ egyenlőség „fele" tehát $c_{n+1}^2 \geq c_{n+1}$ a szorzás monotonitásából világos, tehát csak $c_{n+1}^2 \leq c_{n+1}$-t kell belátni. Ez pedig így megy:

$$c_{n+1}^2 = \left(2^{c_n}\right)^2 = 2^{c_n 2} \leq 2^{c_n c_n} = 2^{c_n} = c_{n+1}.$$

Definiáljuk a d számosságot a következőképpen:

$$d = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots.$$

Először is azt állítjuk, hogy d minden eddigi c_n-nél nagyobb: $d \geq c_{n+1} > c_n$. Ezután a fenti állítást d-re is kiterjesztjük.

34. Tétel. $d^2 = d$.

Bizonyítás. Ismét $d^2 \geq d$ világos, tehát csak $d^2 \leq d$-t kell bizonyítani. Felhasználva a 13. Tételt,

$$d^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \leq \sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)c_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i = d.$$

□

Folytathatjuk egyre nagyobb és nagyobb számosságok definícióját: $d_1 = d$, $2^{d_n} = d_{n+1}$, ekkor $d = d_1 < d_2 < \cdots$ és $d_n^2 = d_n$ minden n-re, $e = d_1 + d_2 + \cdots$, ez az e minden d_n-nél nagyobb és $e^2 = e$, stb.

Az eddigiek szerint két módszerünk van nagyobb számosságok létrehozására: ha már van valamennyi számosságunk és ezek között van legnagyobb, mondjuk a, akkor vesszük 2^a-t, ha pedig számosságunk A halmaza olyan, hogy minden bennelevő számossághoz van benne nagyobb, akkor vesszük az A-beli számosságok összegét. Látható, hogy e két módszer használatával nagy bőségben állíthatunk elő számosságokat. Később ki fog derülni, hogy így *minden* végtelen számosságot elő tudunk állítani. Egyelőre csak annyit látunk be, hogy nagyon sokat.

35. Tétel. *Ha A számosságok valamilyen halmaza, akkor van olyan b számosság, hogy $b > a$ teljesül minden $a \in A$-ra.*

Bizonyítás. Legyen

$$b = \sum_{a \in A} 2^a.$$

Ha $a \in A$ tetszőleges számosság, akkor $a < 2^a \leq b$, az összeadás gyenge monotonitása miatt. $\square$

Jegyezzük meg, hogy a tételbeli b speciálisan nem lehet benne A-ban, tehát beláttuk, hogy számosságok bármilyen A halmazához van olyan b számosság, hogy $b \notin A$, azaz az összes számosságok nem alkotnak halmazt. Ez is egy Russell-paradoxon-szerű állítás. Később lesz még egy: belátjuk, hogy az összes rendszámok sem alkotnak halmazt.

Feladat. Tegyük fel, hogy $a_0, a_1, \ldots$ természetes számok. Mennyi lehet az $a_0 a_1 \cdots$ szorzat értéke ?

10 Rendezett halmazok

Egy $\langle A, < \rangle$ párt *rendezett halmaz*nak nevezünk, ha $<$ rendezi A-t, azaz rendelkezik a rendezés három tulajdonságával:

1. (irreflexivitás) $x < x$ sohasem teljesül;
2. (tranzitivitás) ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$;
3. (trichotómia) ha x, $y \in A$, akkor $x < y$, $x = y$ vagy $y < x$.

Könnyű belátni, hogy bármely x, y esetén a 3. pontban felsorolt eseteknek csak az egyike teljesülhet, így a trichotómiát rögtön így is fogalmazhattuk volna.

Az axiomatikus halmazelméletben rendezett halmaznak nevezzük az $\langle A, R \rangle$ rendezett párt, ahol $R \subseteq A \times A$ és

1. $\langle x, x \rangle \notin R$ ha $x \in A$;
2. ha $\langle x, y \rangle \in R$ és $\langle y, z \rangle \in R$, akkor $\langle x, z \rangle \in R$;
3. ha x, $y \in A$, akkor $\langle x, y \rangle \in R$, $x = y$ vagy $\langle y, x \rangle \in R$.

(Az elképzelés tehát az, hogy $<$-et azonosítjuk az $R = \{\langle x, y\rangle : x < y\}$ halmazzal. Ez megfelel annak, hogy az $f : A \to B$ függvényt azonosítottuk az $\{\langle x, f(x)\rangle : x \in A\} \subseteq A \times B$ halmazzal.)

A szigorú axiomatikus elvek szerint éppen használhatnánk a $< \subseteq A \times A$ definíciót, de mindenképpen szabálytalan, ha két rendezett halmaz, $\langle A, <\rangle$ és $\langle B, <\rangle$ rendezését azonos jellel ($<$) jelöljük. Ezt úgy oldjuk meg, hogy indexeket használunk: $\langle A, <_A\rangle$ és $\langle B, <_B\rangle$. De még ezt a szabályt is megsértjük az áttekinthetőség kedvéért; ha nem okoz zavart, mégiscsak az $\langle A, <\rangle$ és $\langle B, <\rangle$ jelöléseket használjuk, hasonlóan ahhoz, ahogy például algebrában a gyűrűk nullelemét mindig ugyanazzal a jellel (0) jelöljük.

Ha példát adunk rendezett halmazra, akkor legalábbis elvben az alaphalmazon kívül a rendezést is meg kell adni. A legtöbb esetben azonban „világos" mire gondolunk, azaz van egy jól ismert rendezés. Ilyen példák a természetes számok $\langle \mathbf{N}, <\rangle$, az egész számok $\langle \mathbf{Z}, <\rangle$, a racionális számok $\langle \mathbf{Q}, <\rangle$, a valós számok $\langle \mathbf{R}, <\rangle$ halmaza. De rendezett halmaz, bármily furcsa is, az üres halmaz az üres rendezéssel: $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$. Minden véges halmaz is rendezhető, ha ugyanis $|A| = n$, akkor A elemeinek van $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ felsorolása és megfelelő rendezést kapunk, ha az indexek szerint rendezünk, tehát $a_i < a_j$, ha $i < j$.

Ha adott két rendezett halmaz, $\langle A, <_A\rangle$ és $\langle B, <_B\rangle$ akkor az $f : A \to B$ függvény neve *rendezéstartó* vagy *monoton* függvény, ha $x <_A y$ esetén $f(x) <_B f(y)$ is mindig teljesül. Jegyezzük meg, hogy monoton függvény mindenképpen injektív: valóban, ha $x \neq y$ az A halmaz elemei, akkor például $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$.

Azt is hasznos megjegyeznünk, hogy $f(x) < f(y)$, $f(x) = f(y)$, $f(x) > f(y)$-ból $x < y$, $x = y$, $x > y$ következik.

Amennyiben az $\langle A, <\rangle$ és $\langle B, <\rangle$ rendezett halmazok közötti rendezéstartó f függvény bijekció is, akkor *hasonlóság*nak illetve *izomorfizmus*nak nevezzük. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\langle A, <\rangle$ és $\langle B, <\rangle$ *hasonlóak* vagy *izomorfak*. Jelben: $\langle A, <\rangle \simeq \langle B, <\rangle$.

Az *izomorfnak lenni* is ekvivalencia-reláció, az egymással izomorf rendezett halmazok közös tulajdonságát *rendtípus*nak nevezzük és $\langle A, <\rangle \simeq \langle B, <\rangle$ esetén azt írjuk, hogy

$$\mathrm{tp}\big(\langle A, <\rangle\big) = \mathrm{tp}\big(\langle B, <\rangle\big).$$

Itt megint új alapfogalmat vezettünk be, mert nem mondtuk meg, mi a rendtípus, csak azt, hogyan viselkedik. Hasonló bajban vagyunk, mint a számosság definíciójával. Ezúttal egy olyan $\mathcal{F}$ operációra lenne szükségünk, ami értelmezve van minden rendezett halmazon, és $\mathcal{F}\big(\langle A, <\rangle\big) = \mathcal{F}\big(\langle B, <\rangle\big)$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle A, <\rangle \simeq \langle B, <\rangle$ teljesül. Minden ilyen tulajdonságú $\mathcal{F}$ operációt jogunk van rendtípusnak nevezni, és csak akkor mondhatjuk, hogy axiomatikus halmazelméleti értelemben szabatosan definiáltuk a rendtípust, ha ilyen operációt meg tudunk adni. Ezt az 59. oldalon tudjuk megtenni.

11 Jólrendezett halmazok

Egy $\langle A, < \rangle$ rendezett halmazt *jólrendezett halmaz*nak nevezünk, ha minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme.

Lássunk példákat jólrendezett halmazokra!

Minden véges rendezett halmaz jólrendezett. Valóban, ha a halmaz $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a rendezés pedig $a_1 < \cdots < a_n$ és B nemüres részhalmaza A-nak, akkor, ha $a_1 \in B$, akkor a_1 lesz a legkisebb elem B-ben. Ha a_1 nincs B-ben, de a_2 benne van, akkor a_2 lesz a legkisebb elem, stb.

A természetes számok $\langle \mathbf{N}, < \rangle$ rendezett halmaza is jólrendezett, azaz ha adva van akárhány (véges vagy végtelen sok) de legalább egy természetes szám, akkor van közöttük legkisebb.

Az egész számok $\langle \mathbf{Z}, < \rangle$ rendezett halmaza viszont nem jólrendezett: például $\{-1, -3, \cdots\}$ olyan részhalmaz, aminek nincs legkisebb eleme.

Hasonló okból nem lesz jólrendezett a racionális vagy valós számok halmaza sem.

Jólrendezett halmaz minden részhalmaza is jólrendezett: legyen $\langle A, < \rangle$ jólrendezett és legyen $B \subseteq A$. Ha $C \subseteq B$ nemüres, akkor (mivel A-nak nemüres részhalmaza) van legkisebb eleme, így $\langle B, < \rangle$ valóban jólrendezett. Itt fontos (lett volna) kikötni, hogy B-n ugyanazt a rendezést vettük, mint A-n, precízebben: B-n azt a $<_B$ rendezést vettük, amiben $x <_B y$ pontosan akkor, ha $x < y$, azaz $<_B$ a $<$ rendezés megszorítása B-re. Még precízebben, $<_B = < \cap (B \times B)$.

Az üres halmaz, pontosabban a rendezett üres halmaz, $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$ is jólrendezett, hiszen $\emptyset$-nek nincs nemüres részhalmaza, így a megkívánt tulajdonság üresen teljesül. Egyébként ez az állítás az előző bekezdésbeliből is következik.

36. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\langle A, < \rangle \simeq \langle B, < \rangle$ és $\langle A, < \rangle$ jólrendezett halmaz. Ekkor $\langle B, < \rangle$ is jólrendezett.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f : \langle A, < \rangle \to \langle B, < \rangle$ izomorfizmus. Legyen $C \subseteq B$ nemüres részhalmaz. Válasszuk ki a nemüres $f^{-1}[C]$ halmaz legkisebb elemét, legyen ez a. Ekkor nyilvánvalóan $f(a)$ a C halmaz legkisebb eleme. □

E tétel szerint jogosult a következő definíció. A jólrendezett halmazok rendtípusait *rendszám*oknak nevezzük

37. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\langle A, < \rangle$ jólrendezett halmaz és $f : \langle A, < \rangle \to \langle A, < \rangle$ rendezéstartó függvény. Ekkor $f(x) \geq x$ teljesül minden $x \in A$-ra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunk nem igaz, és legyen $a \in A$ olyan elem, amire $f(a) < a$. Definiáljuk az $a_1, a_2, \ldots$ elemeket a következőképpen. $a_1 = a$, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, stb. Ekkor, a feltevés szerint $a_2 < a_1$. Erre alkalmazva f-et, mivel rendezéstartó, azt kapjuk, hogy $a_3 = f(a_2) < f(a_1) = a_2$. Tovább alkalmazva f-et az $a_3 < a_2$ egyenlőtlenségre adódik $a_4 = f(a_3) < f(a_2) = a_3$, azaz az $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ végtelen csökkenő sorozatot kapjuk, ami ellentmondás: jólrendezett halmazban nem lehet végtelen csökkenő sorozat. □

38. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\langle A, <\rangle \simeq \langle B, <\rangle$ izomorf jólrendezett halmazok. Ekkor csak egy izomorfizmus van közöttük.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f és g is izomorfizmus $\langle A, <\rangle$ és $\langle B, <\rangle$ között. Ekkor $g^{-1} \circ f$ izomorfizmus lesz $\langle A, <\rangle$-ból $\langle A, <\rangle$-be, így az előző tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy $(g^{-1} \circ f)(x) \geq x$ teljesül minden $x \in A$-ra. Alkalmazva erre az egyenlőtlenségre g-t, az adódik, hogy $f(x) \geq g(x)$ minden x-re. Megcserélve f-t és g-t, ugyanígy azt kapjuk, hogy $g(x) \geq f(x)$ teljesül minden x-re, tehát $f(x) = g(x)$ minden x-re, ami bizonyítandó volt. □

39. Tétel. *Egy $\langle A, <\rangle$ rendezett halmaz akkor és csak akkor jólrendezett, ha nincs benne $x_0 > x_1 > \cdots$ végtelen csökkenő sorozat.*

Bizonyítás. Az egyik irány nyilvánvaló: ha van $x_0 > x_1 > \cdots$ végtelen csökkenő sorozat, akkor $B = \{x_0, x_1, \ldots\}$ olyan nemüres részhalmaz, aminek nincs legkisebb eleme.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy $\langle A, <\rangle$ nem jólrendezett, azaz van olyan B nemüres részhalmaza, aminek nincs legkisebb eleme. B nemüres, így kivehetjük egy x_0 elemét. A feltevés szerint semmi, így x_0 sem lehet B legkisebb eleme, vehetünk tehát egy nála kisebb $x_1 < x_0$ elemet. Ez sem lehet legkisebb, van tehát $x_2 < x_1$ elem is B-ben, stb. Végső soron egy $x_0 > x_1 > \cdots$ végtelen csökkenő sorozatot találhatunk B-ben és ez elég. □

Ez a bizonyítás, legalábbis a második része végtelen sok lépésben választ egy-egy elemet, de a kiválasztási axióma használatával véges bizonyítássá alakítható.

Legyen ugyanis g kiválasztási függény B nemüres részhalmazain, azaz $g(X) \in X$, ha $X \subseteq B$ és $X \neq \emptyset$. Ezután legyen $x_0 = g(B)$, majd indukcióval

$$x_{n+1} = g\big(\{x \in B : x < x_n\}\big).$$

Ekkor ismét $x_0, x_1, \ldots$ végtelen csökkenő sorozat B-ben.

12 Kezdőszeletek

Az $\langle A, <\rangle$ rendezett halmaz B részhalmazát *kezdőszelet*nek vagy röviden *szelet*nek nevezzük, ha lefelé zárt, azaz $x \in B$, $y < x$-ből következik, hogy $y \in B$. Rögtön adhatunk példákat: A-nak mindig szelete az üres részhalmaz és maga A.

A természetes számok esetében a szeletek a $\{0, 1, \ldots, n\}$ alakú halmazok és a két kötelező: $\emptyset$ és maga $\mathbf{N}$.

A valós számok $\mathbf{R}$ halmazának szeletei, a két szokásoson ($\emptyset$ és $\mathbf{R}$) kívül a $(-\infty, x)$ és a $(-\infty, x]$ alakú intervallumok.

A racionális számok $\mathbf{Q}$ halmazának szeleteit később írjuk le.

Egy $\langle A, <\rangle$ rendezett halmaz valamelyik B részhalmazát *elem által meghatározott (kezdő)szelet*nek nevezzük, ha

$$B = \{x \in A : x < a\}$$

alakú valamilyen $a \in A$ elemre és $B = A|a$-val jelöljük. Mivel $A|a$ az a elemet nem tartalmazza, maga az A halmaz nem lehet elem általi kezdőszelet, de az üres részhalmaz lehet, éspedig pontosan akkor, ha A-nak van legkisebb eleme. Mint azt az elnevezés szuggerálja, minden elem általi szelet egyben kezdőszelet is; valóban, azt kell leellenőrizni, hogy $y < x \in A|a$ esetén $y \in A|a$ is teljesül, azaz $y < x < a$-ból $y < a$-t kell levezetnünk, ami persze éppen a rendezés tranzitivitása.

A $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$ rendezett halmaz szeletei a triviálisakon ($\emptyset$ és maga $\mathbf{Q}$) kívül nemcsak az elem általi kezdőszeletek, hanem az $\{x \in \mathbf{Q} : x < a\}$ alakú halmazok, ahol a irracionális szám, (ezek nem elem általi kezdőszeletek, miért?) és az

$$\{x \in \mathbf{Q} : x \leq a\}$$

alakúak is, ahol $a \in \mathbf{Q}$ tetszőleges elem. Ugyanez igaz a valós számok halmazára.

Belátjuk, hogy jólrendezett halmazokra a kétféle szeletfogalom egybe is esik annyira, amennyire egybe eshet.

40. Tétel. *Jólrendezett halmaz minden valódi szelete elem által meghatározott.*

Bizonyítás. Legyen $\langle A, < \rangle$ jólrendezett halmaz, és legyen adva $B \neq A$ kezdőszelete! Legyen a halmazunk nemüres $A - B$ részhalmazának legkisebb eleme, azaz $a = \min(A - B)$. Belátjuk, hogy

$$B = A|a.$$

Tegyük fel először, hogy $x \in B$, megpróbáljuk belátni, hogy $x \in A|a$. Ha ez nem teljesülne, akkor $x \geq a$ lenne igaz, de ekkor, mivel B kezdőszelet és $a \leq x \in B$, $a \in B$ is teljesülne, ami viszont biztosan nem igaz.

Tegyük most fel, hogy $x \in A|a$ és próbáljuk meg bebizonyítani, hogy $x \in B$. Ha nem, azaz $x \in A - B$, akkor, mivel $x < a$, az a elem biztosan nem lehet $A - B$ legkisebb eleme, ami ismét ellentmondás. $\square$

41. Tétel. *Ha $\langle A, < \rangle$ jólrendezett, akkor nem lehet izomorf saját valódi kezdőszeletéhez, azaz $a \in A$ esetén nem lehet $\langle A, < \rangle \simeq \langle A|a, < \rangle$.*

Bizonyítás. Ha $f : \langle A, < \rangle \to \langle A|a, < \rangle$ izomorfizmus lenne, akkor f olyan rendezéstartó $A \to A$ leképezés lenne, amire $f(a) < a$, ami ellentmond a 37. Tételnek. $\square$

Érdemes észrevenni, hogy nem jólrendezett halmazokra ez nem feltétlenül teljesül: például, ha A a $(0,1)$ valós intervallum, akkor hasonló bármelyik elem általi kezdőszeletéhez: ha $0 < a < 1$ akkor az $f(x) = ax$ függvény $f : (0,1) \to (0,a)$ izomorfizmus lesz.

Feladat. Igaz-e, hogy kezdőszeletek tetszőleges halmazának uniója is kezdőszelet ? Igaz-e, hogy elem általi kezdőszeletek tetszőleges halmazának uniója is elem általi kezdőszelet ?

13 Rendszámok összehasonlítása

Legyenek α, β rendszámok, akkor mondjuk, hogy $\alpha < \beta$, ha a következő igaz: ha az $\langle A, < \rangle$ halmaz rendszáma α, a $\langle B, < \rangle$ halmaz rendszáma β, akkor $\langle A, < \rangle$ izomorf $\langle B, < \rangle$ valamelyik elem által alkotott szeletéhez: $\langle A, < \rangle \simeq \langle B|b, < \rangle$.

A már megszokott módon le kell ellenőrizni, hogy két rendszám összehasonlításának eredménye nem függ attól, milyen halmazokkal reprezentáljuk őket. Azaz, a következő állítást kell bebizonyítani:

42. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\langle A, < \rangle$ izomorf $\langle B, < \rangle$ egy elem által meghatározott kezdőszeletéhez, $\langle A', < \rangle \simeq \langle A, < \rangle$, $\langle B', < \rangle \simeq \langle B, < \rangle$. Akkor $\langle A', < \rangle$ is izomorf $\langle B', < \rangle$ egy elem által meghatározott kezdőszeletéhez.*

Bizonyítás. Legyen f izomorfizmus $\langle A, < \rangle$ és $\langle B|b, < \rangle$ között, továbbá $g : \langle A', < \rangle \to \langle A, < \rangle$ illetve $h : \langle B, < \rangle \to \langle B', < \rangle$ is izomorfizmus. Legyen $c = h(b)$. Ekkor egymásután alkalmazva a g, f, h függvényeket, izomorfizmust kapunk $\langle A', < \rangle$ és $\langle B'|c, < \rangle$ között. □

Ezek után vizsgáljuk meg a rendszám-összehasonlítás tulajdonságait.

43. Tétel.
(a) *A rendszám-összehasonlítás irreflexív, azaz $\alpha < \alpha$ sohasem teljesül.*
(b) *A rendszám-összehasonlítás tranzitív, azaz ha $\alpha < \beta$ és $\beta < \gamma$, akkor $\alpha < \gamma$.*
(c) *A rendszám-összehasonlítás trichotóm, azaz ha α és β rendszámok, akkor $\alpha < \beta$, vagy $\alpha = \beta$, vagy $\beta < \alpha$.*

Bizonyítás.
(a) Valóban, ha $\alpha < \alpha$ teljesülne, az azt jelentené, hogy (egy α rendszámú) $\langle A, < \rangle$ jólrendezett halmaz hasonló lenne saját maga valódi kezdőszeletéhez, ami a 41. Tétel szerint lehetetlen.

(b) Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta < \gamma$. Legyenek $\langle A, < \rangle$, $\langle B, < \rangle$, $\langle C, < \rangle$ rendre α, β, illetve γ rendszámú jólrendezett halmazok. Ekkor vannak $b \in B$ és $c \in C$ elemek, valamint $f : \langle A, < \rangle \to \langle B|b, < \rangle$ és $g : \langle B, < \rangle \to \langle C|c, < \rangle$ izomorfizmusok. Ezek $g \circ f$ kompozíciója izomorfizmus lesz $\langle A, < \rangle$ és $\langle C|g(b), < \rangle$ között, tehát valóban $\alpha < \gamma$.

(c) Ez a bizonyítás sokkal nehezebb lesz, mint a másik kettő. A halmazok nyelvére lefordítva, a következő állítást kell igazolnunk. Ha adott két jólrendezett halmaz, akkor vagy izomorfak, vagy valamelyik izomorf a másik elem általi kezdőszeletével. Legyen tehát $\langle A, < \rangle$ és $\langle B, < \rangle$ jólrendezett! Definiáljuk a következő részhalmazokat:

$$A' = \{x \in A : \text{van olyan } y \in B \text{ hogy } A|x \simeq B|y\}$$

és hasonlóan

$$B' = \{y \in B : \text{van olyan } x \in A \text{ hogy } B|y \simeq A|x\}.$$

(Itt és a továbbiakban egyszerűen $A|x$-et írunk $(A|x, <)$ helyett, stb).

Rögtön észrevehetjük, hogy ha $x \in A'$, akkor az ezt tanusító y a B' részhalmazba esik, így

$$A' = \{x \in A : \text{van olyan } y \in B' \text{ hogy } A|x \simeq B|y\}$$

és

$$B' = \{y \in B : \text{van olyan } x \in A' \text{ hogy } B|y \simeq A|x\}$$

is igaz (de természetesen ezt nem használhattuk volna definíciónak).

1. Állítás. *Ha $x \in A'$ akkor pontosan egy olyan $y \in B'$ van, hogy $A|x \simeq B|y$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben valamelyik $x \in A'$-höz y_1 és y_2 is megfelelő. Feltehetjük, hogy $y_1 < y_2$. Ekkor tehát $B|y_1 \simeq A|x \simeq B|y_2$, azaz $B|y_2$ olyan jólrendezett halmaz, ami hasonló saját valódi kezdőszeletéhez (nevezetesen $B|y_1$-hez) ami lehetetlen. □

Természetesen hasonló okoskodással kaphatjuk, hogy minden $y \in B'$-höz pontosan egy $x \in A'$ van, amire $A|x \simeq B|y$. Így definiálhatjuk az x-hez y-t rendelő $F : A' \to B'$ bijekciót.

2. Állítás. *$F : A' \to B'$ izomorfizmus.*

Bizonyítás. Tehát be kell látni, hogy rendezéstartó. Ha nem, akkor, mivel bijekció, kell, hogy legyen $x_1 < x_2$, amire $y_2 = F(x_2) < y_1 = F(x_1)$, tehát ahol a rendezés megfordul. Definícióink szerint van $f : A|x_2 \to B|y_2$ izomorfizmus és hasonlóképpen létezik $g : B|y_1 \to A|x_1$ izomorfizmus. Ezek kompozíciója, $g \circ f$ pedig $A|x_2$ és $A|g(y_2)$ között, tehát egy jólrendezett halmaz és annak valódi szelete között lesz izomorfizmus, ami lehetetlen. □

3. Állítás. *A' kezdőszelet A-ban (és hasonlóan B' kezdőszelet B-ben).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x' < x \in A'$. Ekkor van megfelelő $y \in B'$ és $f : A|x \to B|y$ izomorfimus. f megszorítása $A|x'$-re izomorfizmus lesz $A|x'$ és $B|f(x')$ között, azaz $x' \in A'$. □

A Tétel bizonyításának befejezéséhez négy esetet vizsgálunk meg aszerint, hogy A' illetve B' valódi részhalmaz-e vagy sem.

Első eset. $A' = A$, $B' = B$

Ekkor F izomorfizmus lesz $\langle A, < \rangle$ és $\langle B, < \rangle$ között, tehát $\alpha = \beta$, készen vagyunk.

Második eset. $A' = A$ de $B' \neq B$

Ekkor B' valódi, tehát elem általi kezdőszelet, $B' = B|b$, F izomorfizmus lesz $\langle A, < \rangle$ és $\langle B|b, < \rangle$ között, azaz $\alpha < \beta$.

Harmadik eset. $A' \neq A$, $B' = B$

Az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy $\beta < \alpha$.

Negyedik eset. $A' \neq A$, $B' \neq B$

Ekkor $A' = A|x$ és $B' = B|y$ alkalmas $x \in A$ illetve $y \in B$ elemekkel. Az F izomorfizmus mutatja, hogy $A|x \simeq B|y$, tehát $x \in A'$ az A' halmaz definíciója miatt, de $x \in A|x$ lehetetlen. Ez az eset tehát nem fordulhat elő. $\square$

Mielőtt tovább lépnénk, mondjunk ki egy újabb axiómát.

8. A pótlás axiómája. Ha A halmaz, $\mathcal{F}$ pedig operáció, akkor $\{\mathcal{F}(x) : x \in A\}$ is halmaz.

Enek az axiómának talán úgy fogalmazhatnánk meg a ,,filozófiá"-ját, hogy a halmazok a kis, az osztályok a nagy objektumok. Mivel a szürjektív kép képzése csak csökkentheti a méretet, ha halmaz szürjektív képét vesszük, az is csak ,,halmaznyi nagyságú" tehát maga is halmaz.

Valójában, anélkül, hogy tudtuk volna, ezt az axiómát is használtuk korábban: a $c_1, c_2, \ldots$ számosságok képzése után d-t csak úgy tudtuk definiálni, hogy vettük a $\{c_1, c_2, \ldots\}$ halmazt, ahhoz pedig kellett ez az axióma.

Definiáljuk az α-nál kisebb rendszámok halmazát: $\tilde{\alpha} = \{\beta : \beta < \alpha\}$. Egyelőre még az sem világos, hogy ez halmaz (ugyanis ez nem részhalmazdefiníció, mivel nem tudjuk, hogy a rendszámok RSZ osztálya halmaz. Sőt, éppen azt fogjuk bebizonyítani, hogy nem).

44. Tétel. *Ha α rendszám, akkor $\tilde{\alpha}$ halmaz, $\langle\tilde{\alpha}, <\rangle$ jólrendezett és rendszáma éppen α.*

Jegyezzük meg, hogy a $\langle\tilde{\alpha}, <\rangle$-beli $<$ a rendszámok közötti rendezést jelöli.

Bizonyítás. Legyen $\langle A, <\rangle$ α rendszámú jólrendezett halmaz. Definiáljuk a következő $\mathcal{F}$ operációt. $x \in A$-ra $\mathcal{F}(x)$ az $\langle A|x, <\rangle$ halmaz rendszáma. A rendszám-összehasonlítás definíciója alapján $\{\mathcal{F}(x) : x \in A\}$ éppen $\tilde{\alpha}$. A pótlás axiómája miatt $\{\mathcal{F}(x) : x \in A\}$ halmaz, ezzel megkaptuk az első állítást. Ha $x < y$, akkor $A|x$ valódi kezdőszelete $A|y$-nak, így $\mathcal{F}(x) < \mathcal{F}(y)$, azaz $\mathcal{F}$ izomorfizmus $\langle A, <\rangle$ és $\langle\tilde{\alpha}, <\rangle$ között, tehát $\langle\tilde{\alpha}, <\rangle$ is jólrendezett és rendszáma α. $\square$

45. Tétel. (A rendszámtulajdonságok minimalitásának elve) *Ha létezik valamilyen tulajdonságú rendszám, akkor van legkisebb is.*

Bizonyítás. Legyen tehát $T(\alpha)$ valamilyen tulajdonság. Válasszunk ki egy α rendszámot, amire $T(\alpha)$ teljesül. Vizsgáljuk $A = \big\{\beta < \alpha : T(\beta)\big\}$-t, azon α-nál kisebb rendszámok halmazát amelyek rendelkeznek a T tulajdonsággal. Ha ez az üres halmaz, készen vagyunk: α a legkisebb T tulajdonságú rendszám. Ha nem, akkor ez a jólrendezett $\tilde{\alpha}$ nemüres része, van tehát legkisebb eleme, és ekkor az lesz a legkisebb T tulajdonságú rendszám. $\square$

46. Tétel. *Az összes rendszámok nem alkotnak halmazt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az összes rendszámok RSZ osztálya halmaz. Ekkor RSZ a rendszámok közötti rendezéssel a 45. Tétel szerint jólrendezett halmaz, van tehát rendszáma, hívjuk α-nak. $\alpha \in$ RSZ, és tudjuk, hogy az

$\tilde{\alpha} = \mathrm{RSZ}|\alpha$ halmaz rendszáma is α. De ez nem lehet, mert egy jólrendezett halmaznak és valódi szeletének nem lehet ugyanaz a rendszáma (azaz nem lehetnek izomorfak). $\square$

Végül egy állítás, amire a későbbiekben szükségünk lesz.

47. Tétel. *Legyen $\langle A, <\rangle$ α rendszámú jólrendezett halmaz, és $B \subseteq A$. Ekkor a $\langle B, <\rangle$ (tehát az öröklött rendezéssel ellátott) jólrendezett halmaz β rendszámára $\beta \leq \alpha$.*

Bizonyítás. Ha ez nem igaz, akkor a rendszám-összehasonlítás trichotómiája miatt csak $\alpha < \beta$ lehet. Ekkor van $f : \langle A, <\rangle \to \langle B|b, <\rangle$ izomorfizmus B valamelyik b eleme által alkotott kezdőszeletére. De $B \subseteq A$ miatt f a teljes B jólrendezett halmazt is leképezi, mégpedig $B|b$ részhalmazára, ami lehetetlen, mert ekkor $f(b) < b$ lenne. $\square$

14 Példák rendszámokra

Vegyünk egy α rendszámú $\langle A, <\rangle$ jólrendezett halmazt, és tegyünk hozzá egy új, mondjuk z-nek nevezett, elemet a végére. Könnyen látható, hogy az így keletkezett $B = A \cup \{z\}$ halmaz az adott rendezéssel, azzal tehát, hogy z nagyobb A minden eleménél, szintén jólrendezés. Az is világos, hogy a $\langle B, <\rangle$ halmaz rendszáma csak $\langle A, <\rangle$ rendszámától függ (hiszen, ha $f : \langle A, <\rangle \to \langle A', <\rangle$ izomorfizmus, és z' nagyobb A' minden eleménél, akkor f tovább terjeszthető az $f(z) = z'$ választással). Nevezzük az így készített rendszámot $\alpha + 1$-nek.

48. Tétel. *Ha α rendszám, akkor $\alpha < \alpha + 1$ és $\alpha + 1$ a legkisebb α-nál nagyobb rendszám.*

Bizonyítás. Valóban, ha $\langle A, <\rangle$ rendszáma α és $B = A \cup \{z\}$, ahol z nagyobb minden A-beli elemnél, akkor $\langle A, <\rangle$ izomorf lesz (sőt azonos) $\langle B|z, <\rangle$-bel. Ezért $\alpha < \alpha + 1$.

Tegyük most fel, hogy $\alpha < \beta$, $\langle A, <\rangle$ rendszáma α, $\langle B, <\rangle$-é pedig β. Mivel $\alpha < \beta$, van $z \in B$, hogy a $B|z$ halmaz izomorf $\langle A, <\rangle$-bel. Ha B-ben nincs z-nél nagyobb elem, másszóval B az A-val izomorf $B|z$-ből és az azt követő z elemből áll, akkor $\beta = \alpha + 1$. Ha pedig van z-nél nagyobb elem, van ezek között legkisebb (hisz $\langle B, <\rangle$ jólrendezett), legyen ez y. Ekkor $B|y$ elem általi szelet éppen a $\big(B|z\big) \cup \{z\}$ halmaz, azaz $\alpha + 1 < \beta$. $\square$

Az $\alpha + 1$ alakú rendszámokat *rákövetkező* rendszámoknak nevezzük. Azokat a 0-tól különböző rendszámokat, amelyek nem rákövetkező rendszámok, *limesz* rendszámoknak nevezzük. Ezek szerint a nemüres jólrendezett $\langle A, <\rangle$ halmaz rendszáma akkor rákövetkező, ha van legnagyobb eleme, és akkor limesz, ha nincs legnagyobb eleme, tehát minden $x \in A$ elemhez van olyan $y \in A$, amire $x < y$.

49. Tétel. *Ha α limesz rendszám és $\beta < \alpha$, akkor $\beta + 1 < \alpha$ is teljesül.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $\beta+1$ a legkisebb β-nál nagyobb rendszám, így $\beta+1 \leq \alpha$, de egyenlőség nem állhat, mert α limesz. $\square$

A következőkben néhány konkrét példát vizsgálunk meg rendszámokra.

Első példánk az üres halmaz rendszáma: 0. Nincs ennél kisebb rendszám, azaz $\tilde{0} = \emptyset$.

Ha n természetes szám, bármely két n-elemű rendezett halmaz (amelyek persze mindenképp jólrendezettek) izomorf, azaz csak egy n nagyságú rendszám van. Ezt azonosnak tekintjük az n természetes számmal és így is jelöljük: n. Mivel egy n-elemű rendezett halmaz valódi szeletei sorra $0, 1, \ldots, n-1$ eleműek, ezért $\tilde{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

A következő nevezetes rendszám a természetes számok halmazának, pontosabban $\langle \mathbf{N}, < \rangle$-nek a rendszáma. Ezt ω-val jelöljük, limesz rendszám. Megint rögtön láthatjuk, hogy az ω-nál kisebb rendszámok éppen $0, 1, \ldots$, a természetes számok.

A következő rendszám, a 48. Tétel értelmében, $\omega+1$. Ezt úgy kell elképzelnünk, hogy a természetes számok $\mathbf{N}$ halmaza végére egy pontot teszünk.

A következő rendszám ennek a rákövetkezője, amelyben az ω-s részt két pont követi. Jelöljük ezt $\omega+2$-vel. Ennek rákövetkezője $\omega+3$, ahol 3 pont van a végén. Ezután sorra jön $\omega+4, \omega+5, \ldots$.

Ezt a sorozatot az a rendszám zárja le, amelyben $\mathbf{N}$ két példányát helyezzük egymás után, ezt $\omega+\omega$-val jelöljük, de a későbbiek miatt célszerű a szorzásjelölést is bevezetni, és itt furcsa módon jobbról szorzunk: $\omega 2$. Ha végignézzük a pontok által alkotott szeleteket, akkor közvetlenül adódik, hogy nem ugortunk;

$$\widetilde{\omega 2} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\}.$$

Ez a második limesz rendszám. Jegyezzük meg azt is, hogy ha két jólrendezett halmazt egymásután helyezünk akkor (a definícióból közvetlenül ellenőrizhetően) jólrendezett halmazt kapunk, ennek egyik példája $\omega+\omega$.

$\omega 2$ rákövetkezője $\omega 2+1$, annak pedig $\omega 2+2$, és általában, ha n pontot helyezünk $\omega 2$ végére ($n = 1, 2, 3, \ldots$), akkor az $\omega 2+n$ rákövetkező rendszámot kapjuk.

Ha már három példány összeáll $\mathbf{N}$-ből, akkor $\omega 3$-at kapunk. Ez is limesz rendszám. Utána sorra jönnek $\omega 3+1, \omega 3+2, \ldots$. Általában kapjuk az $\omega a+b$ alakú rendszámokat és könnyű ezeket „dekódolni”: $\omega a+b$ azt jelenti, hogy egymásután rakunk a példány ω-t, majd a végére b pontot. Ezek rendezése a következőképpen írható le: $\omega a+b < \omega a'+b'$ éppen akkor, ha $a < a'$ vagy pedig $a = a'$ de $b < b'$. ωa limesz rendszám, ha $a = 1, 2, \ldots$, $\omega a+b$ pedig rákövetkező, ha $b > 0$ éspedig az $\omega a+(b-1)$ rendszám rákövetkezője.

Eddigi rendszámaink halmaza végtelen sok egymásutáni csoportra bomlik, melyek mindegyike ω rendtípusú. Természetesen ezzel megkapjuk a következő rendszámot, amelynek neve „omega-szor omega” lesz, és ω^2-nek rövidítjük. A következő rendszám ω^2+1, majd ω^2+2 következik, $\omega^2+3, \ldots$ és így tovább. Tovább haladva az $\omega^2+\omega$ limesz rendszám következik, ez tehát úgy néz ki, hogy ω^2-hez jobbról végtelen sok pontot, precízebben egy ω-st teszünk. Ennek rákövetkezője $\omega^2+\omega+1$, ami három egymásutáni csoportból áll, amelyek rendre ω^2, ω, 1 rendszámúak. Ez általában igaz a sorra következő rendszámokra jó ideig, $\omega^2+\omega a+b$ a következőképpen bomlik fel: először egy ω^2-es csoport jön, ezt a darab ω követi, a végére b pont kerül.

Ezeket $\omega^2 2$ zárja le, azaz az a rendszám, ami ω^2 két példányából áll. Erre igaz, hogy megelőzői az eddig felsoroltak:

$$\widetilde{\omega^2 2}=\{\omega a+b : a=0,1,\ldots,b=0,1,\ldots\}\cup\{\omega^2+\omega a+b : a=0,1,\ldots,b=0,1,\ldots\}.$$

A következő rendszámok: $\omega^2 2+1,\omega^2 2+2,\ldots,\omega^2 2+\omega,\omega^2 2+\omega+1,\omega^2 2+\omega+2,\ldots,\omega^2 2+\omega 2,\omega^2 2+\omega 2+1,\ldots,\omega^2 2+\omega a+b,\ldots,\omega^2 3$, azaz immár három példány ω^2-ből.

Távolabb tekintve látjuk immár az összes $\omega^2 a+\omega b+c$ alakú rendszámot, ezeket így hasonlítjuk össze: $\omega^2 a+\omega b+c$ kisebb, mint $\omega^2 a'+\omega b'+c'$, ha $a<a'$, vagy $a=a'$, de $b<b'$, vagy $a=a'$, $b=b'$, de $c<c'$.

Ezek halmazát az a rendszám zárja le, amely végtelen sok ω^2-esből áll, ezt $\omega^2\cdot\omega$-val, vagy rövidebben ω^3-bel jelöljük.

Ezután jönnek sorra az $\omega^3 a+\omega^2 b+\omega c+d$ alakú rendszámok, ez tehát azt jelenti, hogy egymásután helyezünk a darab ω^3-öt, utánuk b darab ω^2-et, majd c darab ω-t, végül d pontot. Az összehasonlítás a fentihez hasonló: $\omega^3 a+\omega^2 b+\omega c+d<\omega^3 a'+\omega^2 b'+\omega c'+d'$ akkor teljesül, ha $a<a'$, vagy $a=a'$ és $b<b'$, vagy $a=a'$, $b=b'$ és $c<c'$, vagy $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$és $d<d'$.

Egy nagy lélegzetvétellel vehetjük az összes $\omega^n a_n+\omega^{n-1}a_{n-1}+\cdots+\omega a_1+a_0$ alakú rendszámokat, ahol n, valamint $a_n,\ldots,a_0$ mind természetes számok. Itt ω^n-et úgy kapjuk, hogy ω előző hatványát, ω^{n-1}-et végtelen sok (helyesebben: ω sok) példányban egymásután rakjuk. Ezután a képlet kiolvasása az előzőhöz hasonló, azaz először a_n darab ω^n-et veszünk, utána teszünk a_{n-1} darab ω^{n-1} -et, stb, a végére a_1 darab ω-s után a_0 darab pont kerül. az összehasonlítás pedig a fentiekkel összhangban:

$$\omega^n a_n+\omega^{n-1}a_{n-1}+\cdots+\omega a_1+a_0<\omega^m b_m+\omega^{m-1}b_{m-1}+\cdots+\omega b_1+b_0$$

ha $n<m$, vagy $n=m$ és valamilyen i-re $a_i<b_i$, de a korábbi együtthatókra egyenlőség áll: $a_n=b_n,\ldots,a_{i+1}=b_{i+1}$. (Itt feltételeztük, hogy a főegyütthatók, a_n és b_m nullától különbözők.)

Jegyezzük meg, hogy bármilyen sok rendszámot is produkáltunk, még mindig csak megszámlálható sokat. Ezek halmazának rendszámát (azaz a következő rendszámot) ω^ω-val jelölhetjük, majd folytathatjuk: $\omega^\omega+1$, stb.

E rendszámokkal egy érdekes tételt bizonyíthatunk. Induljunk ki egy természetes számból, példaképpen vesszük 28-at. Felírjuk kettes számrendszerben, $28=2^4+2^3+2^2$. Ezután a jegyek sorozatát (11100) változatlanul hagyva megnöveljük a számrendszer alapját: $3^4+3^3+3^2$, majd levonunk egyet: $3^4+3^3+2\cdot 3+2(=116)$. Ugyanilyen lépésekkel folyatjuk: $4^4+4^3+2\cdot 4+1(=329)$, $5^4+5^3+2\cdot 5$, 6^4+6^3+6+5,

7^4+7^3+7+4, 8^4+8^3+8+3, 9^4+9^3+9+2, 10^4+10^3+10+1, 11^4+11^3+11, 12^4+12^3+11, $13^4+13^3+10(=30768)$.

50. Tétel. (A hidra tétel, Goodstein, 1944) *Bármilyen természetes számból indulunk ki, a fenti eljárással előbb-utóbb nullához jutunk.*

Bizonyítás. (Vázlat) Az eljárás egyszerűen az, hogy minden lépéshez hozzárendelünk egy rendszámot.

$$\begin{aligned}
2^4+2^3+2^2 &\longrightarrow \omega^4+\omega^3+\omega^2\\
3^4+3^3+2\cdot 3+2 &\longrightarrow \omega^4+\omega^3+\omega 2+2\\
4^4+4^3+2\cdot 4+1 &\longrightarrow \omega^4+\omega^3+\omega 2+1\\
5^4+5^3+2\cdot 5 &\longrightarrow \omega^4+\omega^3+\omega 2\\
6^4+6^3+6+5 &\longrightarrow \omega^4+\omega^3+\omega+5
\end{aligned}$$

Azaz, az ,,omegás alapú" számrendszerben olvassuk le az ugyanazon jegyekkel felírt számot. Arra vigyázni kell, hogy rendszámoknál az együtthatót jobbról írjuk: $2\cdot 3$ ból $\omega 2$ lesz.

A jobboldalon rendszámok szigorúan csökkenő sorozatát kapjuk. Valóban, átalakításunk érzéketlen az egyik típusú lépésre, a számrendszer alapjának növelésére, a másik esetében viszont mindig csökkent. (Úgy is fogalmazhatnánk, hogy egyszerre csináltuk meg az összes növelést.)

Mivel rendszámok szigorúan csökkenő sorozata előbb-utóbb elakad, eljárásunknak valamikor be kell fejeződnie, de ez csak úgy lehet, ha nullához jutunk. $\square$

Egy kicsit csaltam, legyengítettem Goodstein igazi tételét. Annak erősebb formájában a kitevőket is át kell írni, tehát az első lépés

$$28 = 2^{2^2}+2^{2+1}+2^2$$

lesz. Ezt így alakítjuk tovább:

$$3^{3^3}+3^{3+1}+3^3$$

ebből levonunk (a 3-as számrendszerben) 1-et:

$$3^{3^3}+3^{3+1}+2\cdot 3^2+2\cdot 3^1+2$$

ezután

$$4^{4^4}+4^{4+1}+2\cdot 4^2+2\cdot 4^1+1$$

és így tovább. Ebben a változatban a számok már robbanásszerűen nőnek, nagyságuk hozzávetőlegesen $8\cdot 10^{12}$, $3\cdot 10^{38}$, $2\cdot 10^{2184}$, $2\cdot 10^{36305}$ de ugyanúgy, mint az előbb, a sorozat 0-ban végződik. A bizonyítás is hasonló, csak nagyobb rendszámokat kell használnunk. Az általánosított tétel érdekessége, hogy, amint Kirby és Paris bebizonyította, azt már nem lehet a Peano-axiómarendszer segítségével bebizonyítani. (Ez tehát olyan számelméleti állítás, amelyet nem lehet számelméleti eszközökkel eldönteni.)

15 A transzfinit indukció és rekurzió tétele

51. Tétel. (A transzfinit indukció tétele) *Tegyük fel, hogy $T(x)$ olyan rendszámtulajdonság, amire igaz, hogy*

Ha minden $x < \alpha$ rendszámra igaz $T(x)$ akkor $T(\alpha)$ is igaz.

Ekkor $T(\alpha)$ minden α rendszámra igaz.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy van olyan α rendszám, amire $T(\alpha)$ hamis. Ekkor, a 45. Tétel értelmében lenne ilyen legkisebb α rendszám is, de ez a rendszám ellentmondana a keretben leírt tulajdonságnak. $\square$

Jegyezzük meg, hogy tételünk két irányban is eltér a teljes indukció tételétől. Először is, nem kötjük ki külön a kezdőesetet, $T(0)$ teljesülését. Valóban, $\tilde{0} = \emptyset$ miatt, minden 0-nál kisebb β rendszámra $T(\beta)$ mindenképpen teljesül, így a feltevés szerint $T(0)$ is. Másrészt nem elégedtünk meg a $T(x) \longrightarrow T(x+1)$ tulajdonsággal. Ez nem elég, ugyanis, ha az „x véges" vagy „$x < \omega$" tulajdonságot veszem $T(x)$-nek, akkor $T(0)$ és $T(x) \longrightarrow T(x+1)$ teljesülni fog, de persze $T(\omega)$ nem, így nem lesz igaz $T(x)$ minden x-re.

52. Tétel. (A transzfinit rekurzió tétele) *Tegyük fel, hogy $\mathcal{G}$ olyan operáció, amely minden függvényen értelmezett. Akkor egyértelműen létezik olyan, minden rendszámon értelmezett $\mathcal{F}$ operáció, amelyre*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}(\mathcal{F}|\tilde{\alpha})$$

áll fenn minden α rendszámra.

Jegyezzük meg, hogy az állítás értelmes, hiszen $\tilde{\alpha}$ halmaz, így ha $\mathcal{F}$ operáció, akkor a pótlás axiómája miatt $\mathcal{F}|\tilde{\alpha}$ értékkészlete halmaz, ezért $\mathcal{F}|\tilde{\alpha}$ függvény.

Bizonyítás. Először belátjuk az egyértelműséget. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is kielégíti a megkövetelt állítást. Mivel $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$ van a rendszámtulajdonságok minimalitásának elve miatt olyan α rendszám, hogy $\mathcal{F}_1(\alpha) \neq \mathcal{F}_2(\alpha)$ de minden $\beta < \alpha$ rendszámra fennáll $\mathcal{F}_1(\beta) = \mathcal{F}_2(\beta)$. Azaz $\mathcal{F}_1|\tilde{\alpha} = \mathcal{F}_2|\tilde{\alpha}$. Ekkor viszont

$$\mathcal{F}_1(\alpha) = \mathcal{G}(\mathcal{F}_1|\tilde{\alpha}) = \mathcal{G}(\mathcal{F}_2|\tilde{\alpha}) = \mathcal{F}_2(\alpha)$$

ami ellentmondás.

Nevzzünk egy valamilyen α rendszámra az $\tilde{\alpha}$ halmazon értelmezett f függvényt *jó függvény*nek ha $f(\beta) = \mathcal{G}(f|\tilde{\beta})$ teljesül minden $\beta < \alpha$ rendszám esetén.

1. Állítás. *Minden α rendszámra legfeljebb egy jó függvény van $\tilde{\alpha}$-on.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f_1 és f_2 mindkettő jó függvény $\tilde{\alpha}$-ra. Mivel $f_1 \neq f_2$, a $\{\beta \in \tilde{\alpha} : f_1(\beta) \neq f_2(\beta)\}$ halmaz nemüres. Mivel $\tilde{\alpha}$ jólrendezett, van benne legkisebb elem, mondjuk β. Ekkor, mivel f_1 és f_2 jó függvények, $f_1(\beta) = \mathcal{G}(f_1|\tilde{\beta}) = \mathcal{G}(f_2|\tilde{\beta}) = f_2(\beta)$, ellentmondás. $\square$

Mostantól, ha egy α rendszámra létezik jó függvény, akkor azt (mivel pontosan egyetlen van) f_α-val jelöljük.

2. Állítás. *Ha f_α jó α-ra és $\beta < \alpha$ akkor $f_\beta = f_\alpha|\tilde{\beta}$ jó β-ra.*

Bizonyítás. Le kell ellenőriznünk, hogy $f_\beta(\gamma) = \mathcal{G}(f_\beta|\tilde{\gamma})$ teljesül-e minden $\gamma < \beta$-ra. Ez onnan következik, hogy f_α jó. $\square$

3. Állítás. *Minden α rendszámra létezik jó függvény.*

Bizonyítás. Legyen $T(\alpha)$ az a tulajdonság, hogy létezik jó függvény $\tilde{\alpha}$-n. A transzfinit indukció tételével be fogjuk látni, hogy $T(\alpha)$ teljesül minden α rendszámra.

$T(0)$ igaz, mivel az üres függvény nyilvánvalóan jó 0-ra. (Mást nem is választhattunk volna, mert az üres függvény az egyetlen, $\tilde{0} = \emptyset$-on értelmezett függvény.)

Legyen α rákövetkező rendszám, $\alpha = \beta + 1$ és tegyük fel, hogy $T(\beta)$ igaz. Ekkor, f_α (ha létezik) ki kell, hogy terjessze f_β-t. Értelmezési tartománya, $\tilde{\alpha}$ eggyel több elemet tartalmaz, mint f_β-é, nevezetesen β-t. Tehát definiálnunk kell $f_\alpha(\beta)$-t és csak $f_\alpha(\beta) = \mathcal{G}(f_\beta)$ lehet és ez megfelelő.

Tegyük végül fel, hogy α limesz rendszám és $T(\beta)$ teljesül minden $\beta < \alpha$-ra. Ha $\gamma < \alpha$ és nekünk meg kell határozni $f_\alpha(\gamma)$-t akkor a 2. Állítás szerint ez egyenlő $f_\beta(\gamma)$-val minden $\gamma < \beta < \alpha$-ra és ilyen β rendszámok vannak, mivel α limesz. Ugyanezen Állítás szerint azt is tudjuk, hogy ezek az értékek egyértelműen meghatározottak. Legyen tehát $f_\alpha(\gamma) = f_\beta(\gamma)$, ahol $\gamma < \beta < \alpha$ tetszőleges. (Azaz ezek közös, β-tól nem függő értékét vesszük.) Azt kell megmutatnunk, hogy $f_\alpha(\gamma) = \mathcal{G}(f_\alpha|\tilde{\gamma})$ teljesül minden $\gamma < \alpha$-ra. Legyen $\gamma < \beta < \alpha$. Elég belátnunk azt, hogy $f_\alpha|\tilde{\gamma} = f_\beta|\tilde{\gamma}$ mert akkor a fenti egyenlőséget tovább írhatjuk: $\mathcal{G}(f_\alpha|\tilde{\gamma}) = \mathcal{G}(f_\beta|\tilde{\gamma}) = f_\beta(\gamma) = f_\alpha(\gamma)$. Ha most $\delta < \gamma$, akkor konstrukciónk szerint $f_\alpha(\delta) = f_\beta(\delta)$ (ugyanis választhattuk volna $f_\alpha(\delta)$ definíciójánál ezt a β-t, mint δ és α közötti rendszámot) és éppen erre volt szükségünk. $\square$

Hasonló okoskodással láthatjuk, hogy ha $\mathcal{F}(\alpha) = f_\beta(\alpha)$-val definiáljuk (bármelyik $\beta > \alpha$) akkor ez kielégíti, amit $\mathcal{F}$-től megköveteltünk. $\square$

16 A jólrendezési tétel

Ernst Zermelo bizonyította be (1904-ben) a következő fontos és meglepő tételt.

53. Tétel. (A jólrendezési tétel) *Ha igaz a kiválasztási axióma, akkor minden halmaz jólrendezhető.*

Bizonyítás. Legyen tehát A valamilyen halmaz, célunk ennek jólrendezése. Ahelyett, hogy megadnánk egy $<$ rendezést rajta, ami jólrendezés, egy olyan halmazt fogunk találni, amely már biztosan jólrendezett, és van A-val bijekciója. Ez persze elég, a bijekció mentén „áthúzhatjuk” a jólrendezést.

Az A halmaz nem tartalmazhat mindent (hiszen a világ nem halmaz), legyen tehát t olyan elem, amire $t \notin A$.

Mivel feltesszük a kiválasztási axiómát, van g kiválasztási függvény az A nemüres részhalmazaiból álló halmazcsaládon:

$$g : P(A) - \{\emptyset\} \to A$$

és $g(X) \in X$ minden szóbajövő X-re. (Vigyázni kell, hajlamosak vagyunk $P(A) - \emptyset$-t írni g értelmezési tartományaként. Ez viszont nem az, amire gondolunk, hiszen ha bármilyen halmazból levonjuk az üres halmazt, csak az eredeti halmazt kapjuk $B - \emptyset = B$ minden B-re. Mi viszont azt akarjuk, hogy A összes részhalmazai közül hagyjuk el az üres halmazt és ez tényleg $P(A) - \{\emptyset\}$.)

Elkészítjük a g^* függvényt a következőképpen. Értelmezési tartománya $P(A)$ és

$$g^*(X) = \begin{cases} g(X) & \text{ha } X \text{ nemüres} \\ t & \text{ha } X = \emptyset. \end{cases}$$

Jegyezzük meg, hogy $g^* : P(A) \to A \cup \{t\}$ függvény.

Azt állítjuk, hogy a transzfinit rekurzió tétele miatt van olyan $\mathcal{F}$ operáció ami az összes rendszámon értelmezve van és

$$\mathcal{F}(\alpha) = g^*\big(A - \{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\}\big)$$

teljesül minden α rendszámra. Ehhez szükségünk van a megfelelő $\mathcal{G}$ operáció definíciójára. Könnyen látható, hogy az összes függvényen definiált $\mathcal{G}(f) = g^*(A - \mathrm{Ran}(f))$ megfelelő (itt, mint szokásos, $\mathrm{Ran}(f)$ az f függvény értékkészletét jelöli). Jegyezzük meg, hogy $\mathcal{F}(\alpha) \in A \cup \{t\}$ mindig teljesül.

1. Állítás. *Ha $\alpha < \beta$ rendszámok, $\mathcal{F}(\alpha) = t$ akkor $\mathcal{F}(\beta) = t$.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{F}(\alpha) = t$ akkor $\{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma \in \tilde{\alpha}\} \supseteq A$ így a még ennél is nagyobb $\{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma \in \tilde{\beta}\}$ le kell hogy fedje A-t.

2. Állítás. *Ha $\alpha < \beta$ rendszámok, $\mathcal{F}(\alpha) \neq t$, $\mathcal{F}(\beta) \neq t$, akkor $\mathcal{F}(\alpha) \neq \mathcal{F}(\beta)$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{F}(\alpha) \neq t$, $\mathcal{F}(\beta) = g(A - \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\})$ tehát $A - \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \beta\}$-nak egy eleme. De $\mathcal{F}(\alpha)$-t is levontuk, így $\mathcal{F}(\beta)$ ettől csak különböző lehet.

3. Állítás. *Van olyan α rendszám, amire $\mathcal{F}(\alpha) = t$.*

Bizonyítás. Ha nincs ilyen rendszám, akkor $\mathcal{F}$ a rendszámokat A-ba képezi. $\mathcal{F}$ értékkészlete, $B = \{x \in A : x = \mathcal{F}(\alpha)\}$ a részhalmazaxióma értelmében halmaz. A 2. Állítás szerint $\mathcal{F}$ injektív, így a pótlás axiómája értelmében a rendszámok, azaz $\mathrm{RSZ} = \{\mathcal{F}^{-1}(x) : x \in B\}$ halmazt alkotnának, ami tudjuk, hogy nem igaz.

A bizonyítás befejezéséhez legyen α a legkisebb rendszám, amire $\mathcal{F}(\alpha) = t$. Ekkor $A = \{\mathcal{F}(\gamma) : \gamma < \alpha\}$ így $\mathcal{F}$ (helyesebben annak $\mathcal{F}|\tilde{\alpha}$ megszorítása) bijekciót ad $\tilde{\alpha}$ és A között és elértük célunkat. $\square$

Adunk egy másik, szintén Zermelo-tól származó bizonyítást.

Másik bizonyítás. Legyen ismét adva az A halmaz és rajta a g kiválasztási függvény, tehát ha $X \subseteq A$ nemüres részhalmaz, akkor $g(X) \in X$. Legyen

$$F = \big\{\langle B, <\rangle : B \subseteq A, < \text{ jólrendezi } B\text{-t, ha } x \in B, \text{ akkor } x = g(A - B|x)\big\}.$$

Először is azt állítjuk, hogy F halmaz. Valóban, F elemei $\langle B, R\rangle$ alakúak, ahol $B \subseteq A$, $R \subseteq B \times B \subseteq A \times A$, így F részhalmaza $P(A) \times P(A \times A)$-nak.

Másodszorra azt látjuk be, hogy ha $\langle B_1, <_1\rangle, \langle B_2, <_2\rangle \in F$, akkor $B_1 = B_2$ és a rendezések is megegyeznek, vagy $B_1 \subseteq B_2$, valamilyen $x \in B_2$-re $B_1 = B_2|x$ és a $<_1$ rendezés a $<_2$ rendezés megszorítása B_1-re, vagy ugyanez fordítva áll (tehát $B_2 \subseteq B_1$, stb). Ehhez először is azt jegyezzük meg, hogy a rendszám-összehasonlítás trichotómiájáról szóló tétel miatt van izomorfizmus vagy $\langle B_1, <_1\rangle$ és $\langle B_2, <_2\rangle$ között, vagy $\langle B_1, <_1\rangle$ és $\langle B_2, <_2\rangle$ egy elem általi szelete vagy $\langle B_2, <_2\rangle$ és $\langle B_1, <_1\rangle$ egy elem általi szelete között. Szimmetria okokból feltehetjük, hogy az első két eset valamelyike áll fenn és f egy izomorfizmus $\langle B_1, <_1\rangle$ és $\langle B_2, <_2\rangle$ egy szelete között. Belátjuk (és ez elég) hogy minden x-re $f(x) = x$. Valóban, ha ez nem igaz, van legkisebb x, amire $f(x) \neq x$. Mivel izomorfizmusról van szó, f identikus $B_1|x$-en, és ezeket az elemeket B_2-ben $f(x)$ követi, tehát $B_1|x = B_2|f(x)$. A feltételek miatt

$$x = g(A - B_1|x) = g(A - B_2|x) = f(x),$$

ami ellentmondás.

Legyen

$$E = \bigcup_{\langle B, <\rangle \in F} B.$$

Ha $x \neq y$ elemek E-ben, akkor van persze B_1, B_2, hogy $x \in B_1$, $y \in B_2$. Afentiek szerint egyik tartalmazza a másikat, így $x, y \in B_2$ (vagy fordítva). Ezek szerint van olyan B, amiben x és y össze vannak hasonlítva. De az összehasonlítás eredménye, hiába veszünk különböző B-ket, csak egyféle lehet: ha $x, y \in B_1$ és $x, y \in B_2$, akkor (mondjuk) B_1 kezdőszelete B_2-nek, és azt is láttuk, hogy a B_1-beli rendezés a B_2-beli megszorítása.

Így definiálhatjuk a $<$ relációt E-n: ha $x, y \in E$, legyen $x < y$, ha ez fennáll minden olyan $\langle B, <\rangle \in F$-re, amelyre $x, y \in B$. Ez valóban rendezés lesz, mert könnyen láthatóan tranzitív.

Legyen most $x \in E$. Válasszunk egy $\langle B, <\rangle \in F$-et, amire $x \in B$. A fent elmondottak értelmében minden más $\langle B', <'\rangle \in F$-re, amelyre $x \in B'$, a $B'|x$ kezdőszelet azonos a $B|x$ kezdőszelettel, és rajta a rendezés is ugyanaz, ezért az E-beli $E|x$ kezdőszelettel is azonos (nemcsak izomorf, de azonos is). Ezt azért hasznos tudni, mert a $\langle B, <\rangle \in F$ halmazok jólrendezettek, így ott x-ből nem indulhat végtelen csökkenő lánc, de akkor $\langle E, <\rangle$-ben sem, azaz a 38. Tétel értelmében $\langle E, <\rangle$ jólrendezett. Az is adódik ebből, hogy minden $x \in E$-re

$$x = g\big(A - (B|x)\big) = g\big(A - (E|x)\big),$$

tehát $\langle E, <\rangle \in F$.

Azt állítjuk, hogy $E = A$ és ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. Tegyük fel, hogy nem, tehát, hogy az $A - E$ halmaz nemüres. Legyen $t = g(A - E)$. Legyen $E' = E \cup \{t\}$ és vegyük E'-nek azt a $<'$ rendezését, amely megegyezik E rendezésével, aminek a végére tesszük t-t. Ekkor $\langle E', <'\rangle \in F$, azaz $E' \subseteq E$ (emlékezzünk E definíciójára) ami persze ellentmondás. $\square$

Amikor Zermelo bebizonyította a jólrendezési tételt, heves támadások kereszttüzébe került. Ennek oka az, hogy például a valós számok halmazának jólrendezhetősége olyan állítás, amely erősen ellentmond tapasztalatainknak, a bizonyítás nem ad semmilyen módszert ilyen jólrendezés elkészítésére. Kizárólag a létezést igazolja, ráadásul indirekt módon (lásd a 3. Állítás bizonyítását). Mivel Zermelo bizonyítása nyilvánvalóan jó volt, az abban felhasznált kiválasztási axiómát kifogásolták. Erre válaszul mutatta meg Zermelo, hogy, anélkül, hogy tudatosították volna, már korábban is használták ismert és egyszerű bizonyításokban. Cohen munkájából ma már tudjuk, hogy a kiválasztási axióma felhasználása nélkül azt sem tudjuk megmutatni, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója (de azzal a bizonyítással nincs gond, hogy $\mathbf{R}$ nem megszámlálható).

Jegyezzük meg, hogy a jólrendezési tétel megfordítása jóval könnyebb.

54. Tétel. *Ha minden halmaz jólrendezhető, akkor igaz a kiválasztási axióma.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok tetszőleges rendszere. Legyen $A = \bigcup\{A_i : i \in I\}$ az egyesítésük. Feltevésünk szerint van $<$ jólrendezés A-n. Ezután könnyen megadhatunk egy olyan függvényt amely minden halmazból kiválaszt egy elemet: legyen $f(i)$ az A halmaz (nemüres) A_i részhalmazának $<$ szerinti legkisebb eleme. $\square$

A jólrendezési tétel fontos következménye a számosságösszehasonlítás trichotómiája.

55. Tétel. *Ha a és b számosságok, akkor $a < b$, $a = b$ vagy $b < a$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A számossága a, B-é pedig b. A jólrendezési tétel szerint mindkettőt jólrendezhetjük, mondjuk $\langle A, <\rangle$ és $\langle B, <\rangle$ egy-egy jólrendezésük. A rendszámösszehasonlítás trichotómiája miatt ezek izomorfak, vagy valamelyik a másik egy elem általi kezdőszeletével izomorf. Mindkét esetben (valamelyik irányú) injekciót kapunk A és B között. $\square$

17 Minden vektortérnek van bázisa

56. Tétel. *Minden vektortérnek van bázisa.*

Bizonyítás. Legyen V vektortér (tetszőleges test fölött). A jólrendezési tétel szerint van bijekció, valamelyik α rendszámra, V és $\tilde{\alpha}$ között. Az egyszerűség és az áttekinthetőség kedvéért használjuk az index-jelölést: $V = \{v_\beta : \beta < \alpha\}$. Definiáljuk $B \subseteq V$-t a következőképpen. $v_\beta \in B$ pontosan akkor, ha v_β nem áll elő $\{v_\gamma : \gamma < \beta\}$ véges sok elemének lineáris kombinációjaként. Belátjuk, hogy B a V vektortérnek bázisa.

Ahhoz, hogy B lineárisan független, tegyük fel indirekten, hogy $v_{\beta_1}, \ldots, v_{\beta_n} \in B$, és

$$\lambda_1 v_{\beta_1} + \cdots + \lambda_n v_{\beta_n} = 0.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ és $\lambda_n \neq 0$. Ekkor,

$$v_{\beta_n} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) v_{\beta_1} + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right) v_{\beta_2} + \cdots + \left(-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) v_{\beta_{n-1}},$$

korábbi elemek lineáris kombinációja, így nem választottuk be B-be, ami ellentmondás.

Annak megmutatásához, hogy B generátorrendszer, tegyük fel, hogy vannak olyan vektorok, melyeket B nem generál. Ezeknek a vektoroknak a halmaza legyen $\{v_\beta : \beta \in D\}$. Ekkor D nemüres részhalmaza a jólrendezett $\tilde{\alpha}$-nak. Legyen β a legkisebb elem D-ben. Mivel v_β-t nem generálja B, speciálisan $v_\beta \notin B$, úgyhogy (B definíciója miatt) vannak rendszámok $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n < \beta$ hogy $v_\beta = \lambda_1 v_{\beta_1} + \cdots + \lambda_n v_{\beta_n}$. β minimális választása miatt, a $v_{\beta_1}, \ldots, v_{\beta_n}$ elemeket B mindet generálja, így ezek lineáris kombinációját, v_β-t is, ami ismét ellentmondás. $\square$

E Tétel legfontosabb és legérdekesebb alkalmazásait úgy kapjuk, hogy egy olyan vektortérre alkalmazzuk, amelyről nem világos, hogy van bázisa. Ez pedig $\mathbf{R}$, a valós számok, mint $\mathbf{Q}$, a racionális számok teste feletti vektortér. Ennek a vektortérnek a bázisait *Hamel-bázis*nak nevezzük. A kiválasztási axióma nékül nem is lehet bizonyítani Hamel bázis létezését.

Első ilyen alkalmazásunk a Cauchy-féle függvényegyenlet.

A Cauchy-féle függvényegyenlet.

$$\boxed{\text{f(x+y)=f(x)+f(y)}}$$

Itt a függvényegyenlet szó azt jelenti, hogy egyenletünk megoldása nem valós vagy más szám, hanem függvény, másszóval az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ tulajdonságú valós függvényeket keressük. Ezeket nevezzük Cauchy-függvényeknek. Könnyű ilyeneket megadni, például az $f(x) = 0$ azonosan nulla függvény, az $f(x) = x$ identikus függvény, általában minden $f(x) = cx$ alakú függvény nyilvánvalóan ilyen. A nagy kérdés az, van-e másfajta is.

Mielőtt ezt a kérdést megválaszolnánk, felsoroljuk a Cauchy-függvények néhány tulajdonságát.

57. Tétel. *Legyen f Cauchy-függvény. Ekkor*

(a) $f(nx) = nf(x)$, *ha* $n = 1, 2, \ldots$,

(b) $f(0) = 0$,

(c) $f(nx) = nf(x)$, *ha* $n = -1, -2, \ldots$,

(d) $f(rx) = rf(x)$, *ha* r *racionális szám*,

(e) $f(x) = cx$ *alakú, ha folytonos.*

Bizonyítás.

(a) n-re indukcióval, a képletet használva.

(b) Mivel $f(0) + f(x) = f(x)$.

(c) Az előző tulajdonságot használva, $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$-ból.

(d) Legyen $r = \frac{p}{q}$ ahol p egész, q pozitív egész. Felszorozva, a kívánt egyenlőséget $qf\left(\frac{p}{q}x\right) = pf(x)$ alakba hozhatjuk. Az előzőek ((a) illetve (c)) szerint mindkét oldal $f(px)$-szel egyenlő.

(e) Legyen $c = f(1)$! (d) szerint $f(x) = cx$ teljesül minden racionális x-re. Ha pedig x irracionális, akkor racionális számokkal konvergálhatunk hozzá: $x = \lim r_n$, $f(x) = \lim f(r_n) = \lim cr_n = cx$. □

Ezután mély tételünk, az 55. Tétel következményeként megmutatjuk, hogy (ha igaz a kiválasztási axióma, akkor) létezik a Cauchy-féle függvényegyenletnek nem $f(x) = cx$ alakú megoldása.

58. Tétel. *A Cauchy-féle függvényegyenletnek van nem* $f(x) = cx$ *alakú megoldása.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $B = \{b_i : i \in I\}$ Hamel-bázis. Ekkor $\mathbf{R}$ minden elеme egyértelműen felírható B véges sok elemének racionális együtthatós lineáris kombinációjaként. A továbbiak megértéséhez hasznosabb, ha azt mondjuk, hogy minden x valós szám egyértelműen állítható elő

$$x = \sum_{i \in} \lambda_i b_i$$

alakban, ahol minden λ_i racionális szám, és közülük csak véges sok nem 0. Az eltérés a kétféle koncepció között az, hogy itt a nulla tagokat is kiírjuk. Ez hasznosabb, ha például nyomon akarjuk követni, hogyan alakulnak a koordináták két valós szám összeadásakor. Valóban, ha még

$$y = \sum_{i \in} \lambda_i' b_i$$

akkor $(x + y)$ (egyértelmű) felírása

$$x + y = \sum_{i \in} (\lambda_i + \lambda_i') b_i$$

lesz.

Válasszunk ki egy $b_{i_0} \in B$ elemet ! Definiáljuk az $f(x)$ függvényt a következőképpen. Ha $x \in \mathbf{R}$, emeljük ki fenti felírásából a $\lambda_{i_0} b_{i_0}$ tagot, s annak λ_{i_0} együtthatója legyen $f(x)$ értéke. Az összeadásra vonatkozó fenti megjegyzésből azonnal következik, hogy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ mindig teljesülni fog. Be kell látnunk, hogy függvényünk nem írható $f(x) = cx$ alakban. Ezt úgy igazoljuk, hogy különböző x értékek behelyettesítésével megpróbáljuk eldönteni, mi lehet a c értéke. Helyettesítsünk be először $x = b_{i_0}$-t. Ekkor $f(b_{i_0}) = 1$, tehát c értéke csak $\frac{1}{b_{i_0}}$ lehet (ami nem nulla). Válasszunk most egy másik $b_{i_1} \in B$ báziselemet. Ennek felírását is ismerjük: b_{i_1} együtthatója 1, minden más együttható 0. Ezért $f(b_{i_1}) = 0$ és így c értéke csak 0 lehetne, s ezzel ellentmondásra jutottunk. □

Következő alkalmazásképpen belátjuk azt a meglepő tényt, hogy az identitásfüggvény két periodikus függvény összege (persze, ilyenkor a periódusok nem összemérhetőek).

59. Tétel. *Az $F(x) = x$ függvény előáll két periodikus függvény összegeként.*

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan járunk el. Válasszunk ki két elemet B-ből, b_{i_0}-t és b_{i_1}-et. Adott $x \in \mathbf{R}$-re legyen $f(x)$ értéke x felírásában a $\lambda_{i_0} b_{i_0}$ tag, $g(x)$-et pedig így definiáljuk: $g(x) = x - f(x)$ (tehát a többi tag összege).

Azt fogjuk belátni, hogy $f(x)$ periodikus b_{i_1} periódussal, $g(x)$ pedig periodikus b_{i_0} periódussal (nem tévedés, a szerepek felcserélődnek). Ehhez először vizsgáljuk meg, hogy hogyan függ össze x és $x + b_{i_1}$ bázisbeli felírása. Egyetlen tagban különböznek, ez éppen a b_{i_1}-es tag, itt ugyanis az együttható 1-gyel nagyobb $x + b_{i_1}$ esetében. Tehát az összes többi tag, így az $f(x)$-nek választott b_{i_0}-s tag is változatlan marad, és éppen ezt akartuk belátni. Hasonlóképpen látható, hogy ha egy tetszőleges x-et $x + b_{i_0}$-ra növelünk, egyetlen tag változik, a b_{i_0}-s, a többi tag, amelyek összege éppen $g(x)$, ugyanaz marad. □

60. Tétel. *Az $F(x) = x^2$ függvény nem áll elő két periodikus függvény összegeként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F(x) = f(x) + g(x)$ ahol $f(x)$ α szerint, $g(x)$ pedig β szerint periodikus. Feltehetjük, hogy $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Azt állítjuk, hogy ekkor

$$F(x + \alpha + \beta) - F(x + \alpha) - F(x + \beta) + F(x) = 0$$

azonosan teljesül. A szereplő F értékeket felbontva $f + g$-re, majd csoportosítva látható, hogy elég a fenti azonosságot külön f-re és g-re belátni. Azokra pedig igaz, hiszen (a tagokat megfelelően csoportosítva)

$$\big[f(x + \alpha + \beta) - f(x + \beta)\big] + \big[-f(x + \alpha) + f(x)\big] = 0$$

és hasonlóan

$$\big[g(x + \alpha + \beta) - g(x + \alpha)\big] + \big[-g(x + \beta) + g(x)\big] = 0.$$

Ez viszont $F(x) = x^2$-re nem teljesül, hiszen

$$(x + \alpha + \beta)^2 - (x + \alpha)^2 - (x + \beta)^2 + x^2 = 2\alpha\beta,$$

ami nem az azonosan 0 függvény. □

Belátható, hogy az x^2 függvény előáll három periodikus függvény összegeként. Az x^3 függvény nem, de előáll négy összegeként, stb.

Feladatok. 1. Lássuk be, hogy ha egy Cauchy-függvény monoton, akkor cx alakú!
2. Előáll-e az $F(x) = x$ függvény két *folytonos* periodikus függvény összegeként?
3. Bizonyítsuk be, hogy egy függvény, amelynek pontosan egy szakadási pontja van (amely tehát egy pont kivételével mindenütt folytonos) nem állhat elő két periodikus függvény összegeként.

18 A Zorn-lemma

Az algebrában akiválsztási axióma helyett többnyire annak egy (első pillantásra bonyolultan megfogalmazott) ekvivalensét használják.

Egy $(P, <)$ rendezett párt *részben rendezett halmaz*nak nevezünk, ha $<$ olyan reláció P-n, amely a trichotómia kivételével a rendezés tulajdonságait kielégíti. Azaz: $x < x$ sosem teljesülhet, és $x < y, y < z$ esetén $x < z$ mindig igaz. Részben rendezett halmazra példa a pozitív természetes számok halmaza, ha $a < b$-t akkor írunk, ha a valódi osztója b-nek. vagy vehetjük a komplex számsík pontjait és $x < y$-t úgy definiáljuk, hogy x balra áll y-tól (tehát ugyanazon a ,,vízszintes" egyenesen). De érdekes módon bármilyen P halmaz részben rendezett halmazzá tehető, ha semelyik két elemét nem hasonlítjuk össze, azaz $x < y$ sosem teljesül (teljesen rendezetlen halmaz). Használni fogjuk az $x \leq y$ jelölést is, ez természetesen azt jelenti, hogy $x < y$ vagy $x = y$ teljesül.

Egy $(P, <)$ részben rendezett halmaz esetén az $L \subseteq P$ részhalmazt *lánc*nak nevezzük, ha L bármely két eleme összehasonlítható, azaz $x, y \in L$ esetén $x = y$ vagy $x < y$ vagy $y < x$ teljesül. Fenti első példánkban 2 hatványai láncot alkotnak. A másodikban a vízszintes egyenesek (és azok részhalmazai) a láncok, a harmadikban pedig csak az egypontú halmazok (és az üres halmaz).

Ha $(P, <)$ részben rendezett halmaz és L benne lánc, akkor azt mondjuk, hogy a $z \in P$ elem *felső korlát* L számára, ha $x \leq z$ teljesül minden $x \in L$-re.

Ha $(P, <)$ részben rendezett halmaz, akkor $x \in P$ eleme *maximális*, ha nincs nála nagyobb elem, azaz olyan $y \in P$, amelyre $x < y$ teljesül. Vigyázat ! Nem azt követeltük meg, hogy $y \leq x$ teljesüljön minden $y \in P$ elemre. Ez utóbbi tulajdonságú elemet, a megkülönböztetés kedvéért, *legnagyobb* elemnek nevezzük. Könnyen létható,hogy legnagyobb elem mindig maximális. Fenti harmadik példánkban minden elem maximális, de nincs legnagyobb elem. Az első két példában egyik tulajdonságú elem sincs. Ha az első példában az összes természetes számot vettük volna, akkor 0 maximális, de nem legnagyobb lenne. Láthatjuk, hogy legnagyobb elem (ha van) csak egy lehet, míg maximális elem lehet több is, akkor viszont nincs legnagyobb elem.

61. Tétel. (Zorn-lemma) *Tegyük fel, hogy a $(P, <)$ részben rendezett halmazban minden láncnak van felső korlátja. Akkor $(P, <)$-ben van maximális elem.*

Bizonyítás. A jólrendezési tétel szerint P-nek van jólrendezése. Az 56. Tétel bizonyításához hasonlóan ezt így fogalmazzuk: $P = \{p_\alpha : \alpha < \varphi\}$ alakban írható egy alkalmas φ rendszámra.

A stratégiánk az, hogy csinálunk egy $L \subseteq P$ láncot, aminek meglesz az a tulajdonsága, hogy ha egy p elem a lánc felső korlátja, akkor p maximális P-ben.

Egymás után minden $\alpha < \varphi$-re eldöntjük, hogy $p_\alpha \in L$ legyen-e vagy sem. Ez tulajdonképpen transzfinit rekurziós eljárás: minden $\alpha < \varphi$-re csinálunk valamit és amikor egy adott $\alpha < \varphi$-vel foglalkozunk, már tudjuk és felhasználjuk a korábbi lépések eredményét.

Először is, legyen $p_0 \in L$. Tegyük fel, hogy a transzfinit rekurzió során elérkeztünk az α-adik lépésig, azaz el kell döntenünk betegyük-e p_α-t L-be, de minden $\beta < \alpha$-ra tudjuk, hogy $p_\beta \in L$ teljesül-e.

Legyen eljárásunk a következő: tegyük p_α-t L-be pontosan akkor, ha p_α nagyobb az összes L-be választott p_β-nál ($\beta < \alpha$-ra).

Ily módon minden $\alpha < \varphi$-re eldöntöttük, hogy $p_\alpha \in L$ igaz-e, másszóval definiáltuk az $L \subseteq P$ részhalmazt. Először belátjuk, hogy L valóban lánc. Valóban, ha $\beta < \alpha$ és $p_\beta, p_\alpha \in L$, akkor p_α-t szabályunk szerint csak úgy választhattuk L-be, ha $p_\beta < p_\alpha$, azaz L bármely két eleme közül az egyik nagyobb a másiknál, L tehát lánc.

Ezért alkalmazhatjuk a tétel feltételét, van L elemeinek felső korlátja. Ez persze p_α alakú, valamilyen $\alpha < \varphi$ rendszámra. Azt kell belátnunk, hogy p_α maximális elem. Tételezzük fel, indirekten, hogy nem az, valamelyik $\gamma < \varphi$ indexre $p_\gamma > p_\alpha$. Gondoljuk át, hogy mit csináltunk, amikor p_γ-hoz értünk. Pontosan akkor választottuk p_γ-t L-be, ha nagyobb minden olyan p_β-nál, ahol $\beta < \gamma$ és $p_\beta \in L$. p_γ-ra viszont ez a követelmńy teljesül, ugyanis a fenti p_β-ra $p_\beta \leq p_\alpha$ (mivel p_α felső korlát L elemeire), továbbá $p_\alpha < p_\gamma$ feltevéseink szerint, azaz $p_\beta < p_\gamma$. Ezért p_γ beválasztottuk L-be. Ezzel viszont megkaptuk a kívánt ellentmondást, hiszen egyrészt $p_\alpha < p_\gamma$ másrészt $p_\gamma \leq p_\alpha$ (mivel p_α felső korlát L elemeire). □

A Zorn-lemmát elsősorban az algebrában alkalmazzák. Segítségével sokszor elkerülhető a transzfinit rekurzió használata. Például könnyen bizonyítható az 56. Tétel. Legyen ugyanis V egy valamilyen test feletti vektortér. Álljon a P részben rendezett halmaz V azon (véges vagy végtelen) A részhalmazaiból, amelyeknek minden véges része lineárisan független, röviden tehát: *A lineárisan független.* A részben rendezést a következőképpen adjuk meg: ha $A, B \in P$, $A \neq B$, akkor legyen $A < B$ ha $A \subseteq B$. Először belátjuk, hogy teljesül a Zorn-lemma feltétele. Valóban, legyen $L \subseteq P$ (nemüres) lánc. Találunk egy olyan $B \in P$ elemet, amelyre $A \leq B$ teljesül minden $A \in L$ esetén. Legyen B az összes L-beli elem (amelyek tehát V részhalmazai) egyesítése. Ekkor persze $B \subseteq V$ is teljesül és nyilvánvalóan $A \subseteq B$ minden $A \in L$-re. Ezért, ha belátjuk, hogy $B \in P$, akkor $A \leq B$ minden $A \in L$-re teljesülni fog; B felső korlát L-re. Be kell tehát látnunk, hogy B lineárisan független. Tegyük fel, hogy nem az, ekkor vannak $v_1, \ldots, v_n \in B$ elemek és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nemnulla testbeli elemek, hogy $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ teljesül. Mivel B-t az L-beli halmazok egyesítéseként kaptuk, vannak $A_1, \ldots, A_n \in L$ halmazok, hogy $v_1 \in A_1, \ldots, v_n \in A_n$. Mivel L lánc, az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok egymást tartalmazzák, azaz $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ teljesül, esetleg nem ebben a sorrendben. De ekkor $v_1, \ldots, v_n$ benne lesz valamelyik A_i-ben és ekkor A_i sem lehet lineárisan független, ami ellentmondás.

Teljesül tehát a Zorn-lemma feltétele a $(P, <)$ részben rendezett halmazra, ezért van benne maximális elem, legyen ilyen, mondjuk B. Azt állítjuk, hogy B bázisa V-nek. Valóban, ha ez nem igaz, akkor B nem generátorrendszer, így van olyan $v \in V$ vektor ami nem áll elő B-beli elemek lineáris kombinációjaként. Azt állítjuk, hogy a $B \cup \{v\}$ halmaz P-nek olyan eleme, amely szigorúan nagyobb B-nél (és ezzel meglesz az ellentmondás). Az biztos, hogy v nem eleme B-nek, ezért $B \cup \{v\}$ szigorúan bővebb halmaz B-nél, így csak azt kell bebizonyítanunk, hogy a $B \cup \{v\}$ halmaz P-ben van, azaz lineárisan független. Ez pedig egy lineáris algebrából ismert okoskodás miatt igaz: ha lenne $\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n + \lambda v = 0$ alakú kombináció, akkor nyilván $\lambda \neq 0$ (hiszen B lineárisan független) így átosztással v-t ki tudnánk fejezni a B-beli $v_1, \ldots, v_n$ vektorokkal:

$$v = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \cdots + \left(\frac{-\lambda_n}{\lambda}\right) v_n.$$

19 $\aleph_1$

Eddig számos példát láttunk rendszámokra (ω, ω^2, ω^{10}, stb), de ezek mind megszámlálható halmazok rendszámai voltak. Értelemszerűen vetődik fel a kérdés, hogy lehet-e nagyobb számosságú rendszámokat készíteni. Mielőtt ezt megválaszolnánk, először is jegyezzük meg, hogy értelmes dolog rendszám számosságáról beszélni: adott rendszámú jólrendezett halmazok számossága ugyanaz, hiszen nemcsak hogy van közöttük bijekció, de speciális (nevezetesen rendezéstartó) bijekció is. A konkrétság kedvéért definiálhatnánk az α rendszám számosságát, mint kedvenc α rendszámú mintahalmazunk, $\tilde{\alpha}$ számosságát. Jegyezzük meg, hogy nagyobb rendszám számossága is nagyobb, vagy egyenlő, hiszen $\alpha < \beta$ esetén $\tilde{\alpha} \subseteq \tilde{\beta}$ így $|\tilde{\alpha}| \leq |\tilde{\beta}|$.

Ezután az idézett kérdés így szól: létezik-e megszámlálhatónál nagyobb rendszám ?

Az „igen" választ kétféleképpen igazoljuk. Adunk egy rövid bizonyítást a jólrendezési tétel (tehát a kiválasztási axióma) segítségével, majd adunk egy hosszabbat, elkerülve annak használatát.

Ha igaz a jólrendezési tétel, azaz minden halmaz ellátható jólrendezéssel, akkor a rendszámok számosságai, azaz a jólrendezett halmazok számosságai azonosak a halmazok számosságaival. Így abban a pillanatban beláttuk nem megszámlálható rendszám létezését, amikor mutatunk egy nem megszámlálható halmazt, ilyenre példa $\mathbf{R}$.

Most egy olyan bizonyítást adunk, amely nem használja a kiválasztási axiómát.

62. Tétel. *Van nem megszámlálható rendszám.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, minden rendszám megszámlálható. Legyen α rendszám, $\langle A, < \rangle$ pedig α rendszámú jólrendezett halmaz. A feltevés szerint $|A| \leq \aleph_0$, így van $f\colon A \to \mathbf{N}$ injekció ($\mathbf{N}$ a természetes számok halmaza). f bijekció A és $\mathbf{N}$ valamelyik (esetleg valódi) B részhalmaza között. A szokott módon f-et izomorfizmussá szervezhetjük ha B-n a $<$ rendezést megfelelően definiáljuk: legyen $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$. De ekkor a $(B, <)$ jólrendezett halmaz rendszáma is α.

Kaptuk tehát, hogy minden α rendszámhoz van α rendszámú $(B, <)$ jólrendezett halmaz, ahol B részhalmaza $\mathbf{N}$-nek.

Legyen

$$U = \big\{\langle B, < \rangle : B \subseteq \mathbf{N},\ \langle B, < \rangle \text{ jólrendezett}\big\}.$$

Lássuk be, hogy U halmaz! A szokásos módon, ehhez elég találni egy U_1 halmazt, ami tartalmazza U minden elemét, hiszen ekkor a részhalmaz axiómát alkalmazva kapjuk, hogy U is halmaz. U elemei rendezett párok, az első elem mindig egy $B \subseteq \mathbf{N}$ részhalmaz, a másik (visszaemlékezve a rendezés axiomatikus halmazelméleti definíciójára) $B \times B$ egy részhalmaza. Tehát $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$-nak is részhalmaza, így az $U_1 = P(\mathbf{N}) \times P(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ választás megfelelő.

Ezután vegyük azt az $\mathcal{F}$ operációt, amely minden $\langle B, < \rangle \in U$ elemhez hozzárendeli annak rendszámát. Indirekt feltevésünk szerint így megkapjuk valamennyi rendszámot. Másrészt, a pótlás axiómája miatt,

$$\{\mathcal{F}(\langle B, < \rangle) : \langle B, < \rangle \in U\},$$

ami pedig az összes rendszámokkal egyenlő, halmaz, ami ellentmondás. $\square$

A rendszámtulajdonságok minimalitásának elve miatt igaz, hogy van legkisebb nem megszámlálható rendszám, ezt nevezzük el ω_1-nek, számosságát pedig $\aleph_1$-nek. Tehát tudjuk, hogy $\aleph_0 < \aleph_1$, minden $\alpha < \omega_1$ rendszám megszámlálható (véges, vagy végtelen) sőt még pontosabban: ha $\alpha < \omega$ akkor α véges, és ha $\omega \leq \alpha < \omega_1$, akkor α számossága $\aleph_0$. Persze, ha $\alpha \geq \omega_1$, akkor számossága legalább $\aleph_1$.

63. Tétel. *Ha a számosság és $a \leq \aleph_1$ akkor a véges, vagy $a = \aleph_0$, vagy $a = \aleph_1$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $\aleph_1$ számosságú halmazt, mondjuk $\widetilde{\omega_1}$-ot. Ha $a \leq \aleph_1$ akkor van a számosságú $A \subseteq \widetilde{\omega_1}$ részhalmaz, de a 47.Tétel miatt tudjuk, hogy A rendszáma egy valamilyen $\alpha \leq \omega_1$ rendszám lesz, ezek számosságait pedig az imént felsoroltuk: lehet véges, $\aleph_0$ vagy $\aleph_1$. $\square$

Az eddigiekben tehát két különböző módon definiáltunk egy-egy megszámlálhatónál nagyobb számosságot: c-t és $\aleph_1$-et. A fenti tétel érdekessége az, hogy megmutatja, hogy $\aleph_1$ az $\aleph_0$-t szorosan követő számosság, míg a kontinuumról nem tudjuk ugyanezt. Mindenesetre $\aleph_1 \leq c$, de hogy itt egyenlőség áll-e, nem tudjuk eldönteni.

A következő tétel a kontinuum számosság egy másik tulajdonságát viszi át $\aleph_1$-re.

64. Tétel. $\aleph_1^2 = \aleph_1$.

Bizonyítás. Megint persze $\aleph_1^2 \geq \aleph_1$triviális, így $\aleph_1^2 \leq \aleph_1$-t kell belátni. Ehhez, mivel $\aleph_1$ számosságú mintahalmazunk $\widetilde{\omega_1}$, elég egy $\widetilde{\omega_1} \times \widetilde{\omega_1} \to \widetilde{\omega_1}$ injekciót találni. Ehelyett azt csináljuk — és ez elég — hogy jólrendezzük $B = \widetilde{\omega_1} \times \widetilde{\omega_1}$-t és bebizonyítjuk, hogy rendszáma legfeljebb ω_1.

Készítsük el a következő felbontást:

$$B = \widetilde{\omega_1} \times \widetilde{\omega_1} = \bigcup_{\gamma < \omega_1} B_\gamma$$

ahol $B_\gamma = \{\langle x, y \rangle : \max(x, y) = \gamma\}$. Tehát $\gamma < \omega_1$-re B_γ-ban vannak a $\langle \gamma, x \rangle$ alakú párok, ahol $x \leq \gamma$ és az $\langle x, \gamma \rangle$ alakú párok, ahol $x \leq \gamma$. Ez nyilvánvalóan az alaphalmaz diszjunkt halmazokra való felbontása (tehát partíciója).

B-t a következőképpen rendezzük jól: minden B_γ-t tetszőlegesen[4] jólrendezünk, egymás közt pedig növőleg rendezzük őket:

$$B_0 < B_1 < \cdots < B_\gamma < \cdots.$$

[4]Például a lexikografikus rendezés szerint: két pár közül azt tekintjük kisebbnek amelyik első koordinátája kisebb, ha pedig egyenlőek, a második koordinátákat hasonlítjuk össze.

Erről a jólrendezett halmazról kell bebizonyítani, hogy rendszáma legfeljebb ω_1. Ehelyett azt az ekvivalens állítást bizonyítjuk be, hogy a rendszámánál kisebb rendszámok megszámlálhatóak, azaz az elem által alkotott szeletek megszámlálhatóak.

Vegyük tehát B-nek egy elemét ! Ez tehát $\langle x, y\rangle \in B$ alakú és x, y is megszámlálható rendszám. $\langle x, y\rangle \in B_\gamma$, ahol $\gamma = \max(x, y)$. Az $\langle x, y\rangle$ által meghatározott kezdőszelet áll egyrészt a B_γ-t megelőző B_ξ-kből, másrészt magának B_γ-nak egy részéből (B_γ belső rendezésének $\langle x, y\rangle$-t megelőző részéből). Ezt a halmazt csak növeljük, ha a teljes B_γ-t beleteszük. Így elég annyit belátni, hogy

$$\bigcup_{\xi\leq\gamma} B_\xi$$

megszámlálható.

Ez a halmaz egyszerűbb, mint amilyennek látszik. Az elemei azok az $\langle x, y\rangle$ párok, amelyekre $\max(x, y)$ legfeljebb γ, azaz x és y is legfeljebb γ, azaz

$$\{x : x \leq \gamma\} \times \{y : y \leq \gamma\},$$

formálisan még úgy is felírhatjuk, hogy $\big(\widetilde{\gamma} \cup \{\gamma\}\big) \times \big(\widetilde{\gamma} \cup \{\gamma\}\big)$. Ez valóban megszámlálható: a feltevés szerint $\widetilde{\gamma}$ megszámlálható, ehhez hozzádtunk egy pontot (γ-t) és az így keletkezett, megszámlálható halmaz Descartes-négyzetét képeztük, ami $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ miatt szintén megszámlálható. $\square$

20 Az alefek

Hogyan közöljem másokkal ezt a végtelen Alefet,
melyet csak alig fog fel félénk emlékezetem ?
(Jorge Luis Borges: Az Alef[5])

Az előzőekben elkészítettük a legkisebb $\aleph_0$-nál nagyob számosságot, és $\aleph_1$-nek neveztük. Okoskodásunkat elismételhetjük $\aleph_1$-re. Indirekt úton belátjuk, hogy van rendszám, aminek a számossága nagyobb, mint $\aleph_1$, hiszen különben minden rendszám reprezentálható lenne olyan halmazon, amely része $\widetilde{\omega_1}$-nak, de akkor a rendszámok halmazt alkotnának. Van tehát $\aleph_1$-nél nagyobb számosságú rendszám, van legkisebb ilyen, s ezt elnevezhetjük ω_2-nek. A számosságát pedig $\aleph_2$-nek hívjuk. Ekkor tehát tudjuk, hogy az α rendszám számossága

véges, ha $\alpha < \omega$;
$\aleph_0$, ha $\omega \leq \alpha < \omega_1$;
$\aleph_1$, ha $\omega_1 \leq \alpha < \omega_2$;
$\aleph_2$, ha $\alpha = \omega_2$.

[5]Benyhe János fordítása. *Jorge Luis Borges válogatott művei. A halál és az iránytű. Elbeszélések.* Európa Könyvkiadó, Budapest, 1999

Ezután azt is be tudjuk látni, hogy ha a számosság és $a \leq \aleph_2$, akkor a véges, vagy $a = \aleph_0$, vagy $a = \aleph_1$, vagy $a = \aleph_2$. Tehát sikerült a közvetlenül következő számosságot megcsinálni.

Innen továbbléphetünk és elkészíthetjük ω_3-at, aminek a számosságát $\aleph_3$-nak nevezzük, és így tovább, definiáljuk $\aleph_4$, $\aleph_5 \ldots$-t, és a hozzájuk tartozó ω_4, $\omega_5, \ldots$-t. Rögtön felvetődik a kérdés, van-e végtelen számosság $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ után.

Ehhez először is belátjuk, hogy van olyan α rendszám, amelyre $\alpha \geq \omega_n$ teljesül $n = 1, 2, \ldots$-re. Ha ugyanis ilyen rendszám ne létezne, akkor (tagadva az előző állítást) minden α rendszámra $\alpha < \omega_n$ teljesülne valamelyik n-re. Azaz

$$\mathrm{RSZ} = \widetilde{\omega_1} \cup \widetilde{\omega_2} \cdots$$

lenne, így a rendszámok halmazt alkotnának, ami nem igaz.

Nevezzük tehát ω_ω-nak a ***legkisebb*** rendszámot, ami minden ω_n-nél ($n = 1, 2, \ldots$) nagyobb, vagy egyenlő. Ennek számossága ezek mindegyikénél nagyobb, hisz $\widetilde{\omega_n} \subseteq \widetilde{\omega_{n+1}} \subseteq \widetilde{\omega_\omega}$ miatt $\aleph_n < |\widetilde{\omega_\omega}|$. Nevezzük a számosságát $\aleph_\omega$-nak. Ekkor viszont tudjuk, hogy ha az a végtelen számosságra $a \leq \aleph_\omega$, akkor a csak a felsorolt számosságok valamelyike lehet: $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega$. Valóban a csak valamilyen $\alpha \leq \omega_\omega$ rendszám számossága lehet és ha $\alpha < \omega_\omega$, akkor $\alpha < \omega_n$ teljesül valamelyik n-re, az ilyen rendszámok számosságait pedig ismerjük.

Az eddigi lépések mutatják, hogyan konstruáljuk meg, transzfinit indukcióval, minden α rendszámra az $\aleph_\alpha$ számosságot és az ω_α rendszámot.

$\aleph_0$-t már ismerjük, és legyen $\omega_0 = \omega$. Ha α rákövetkező rendszám, tehát $\alpha = \beta + 1$ alakú, és $\aleph_\beta$-t, ω_β-t ismerjük, akkor legyen ω_α a legkisebb, $\aleph_\beta$-nál nagyobb számosságú rendszám (ilyen van, a 60. Tételben szereplőhöz hasonló okoskodás szerint). Legyen továbbá $\aleph_\alpha = |\omega_\alpha|$, tehát a megkonstruált rendszám számossága. Marad az az eset, amikor α limesz rendszám. Ekkor az indukciós hipotézis szerint feltehetjük, hogy $\aleph_\beta$-t és ω_β-t már ismerjük minden $\beta < \alpha$ rendszámra. Az előző bekezdésbelihez hasonló okoskodással belátjuk, hogy van legkisebb olyan rendszám, amely minden ω_β-nál nagyobb (ha $\beta < \alpha$), legyen ez ω_α, számossága $\aleph_\alpha$. Ismét az előzőekhez hasonlóan láthatjuk be, hogy ha α valamilyen rendszám és $a \leq \aleph_\alpha$ végtelen számosság, akkor a csak az $\aleph_0, \ldots, \aleph_\beta, \ldots$ ($\beta \leq \alpha$) számosságok valamelyike lehet.

Fontos, itt nem bizonyítandó tétel azt mondja ki, hogy ha feltesszük a kiválasztási axiómát, akkor minden végtelen számosság $\aleph_\alpha$ alakú, tehát ez a ,,sorozat" pontosan a végtelen számosságokat sorolja fel.

65. Tétel. $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

Bizonyítás. α-ra vonatkozó transzfinit indukcióval. A 63. Tételben tulajdonképpen a $\theta \nrightarrow 1$ esetet láttuk be, most azt az okoskodást ismételjük meg az általános esetre.

$\aleph_\alpha^2 \geq \aleph_\alpha$ nyilvánvaló a szorzás monotonitásából, így $\aleph_\alpha^2 \leq \aleph_\alpha$-t kell belátni. Ehhez, mivel $\aleph_\alpha$ számosságú mintahalmazunk $\widetilde{\omega_\alpha}$, elég egy $\widetilde{\omega_\alpha} \times \widetilde{\omega_\alpha} \to \widetilde{\omega_\alpha}$ injekciót találni. Ehhez jólrendezzük $B = \widetilde{\omega_\alpha} \times \widetilde{\omega_\alpha}$-t és bebizonyítjuk, hogy rendszáma legfeljebb ω_α.

Készítsük el a következő felbontást:

$$B = \widetilde{\omega_\alpha} \times \widetilde{\omega_\alpha} = \bigcup_{\gamma<\omega_\alpha} B_\gamma$$

ahol $B_\gamma = \{\langle x, y\rangle : \max(x, y) = \gamma\}$. Tehát $\gamma < \omega_\alpha$-re B_γ-ban vannak a $\langle \gamma, x\rangle$ alakú párok, ahol $x \leq \gamma$ és az $\langle x, \gamma\rangle$ alakú párok, ahol $x \leq \gamma$. Ez az alaphalmaz diszjunkt halmazokra való felbontása.

B-t a következőképpen rendezzük jól: minden B_γ-t tetszőlegesen jólrendezünk, egymás közt pedig növőleg rendezzük őket:

$$B_0 < B_1 < \cdots < B_\gamma < \cdots.$$

Erről a jólrendezett halmazról kell bebizonyítani, hogy rendszáma legfeljebb ω_α. Ehelyett azt az ekvivalens állítást bizonyítjuk be, hogy a rendszámánál kisebb rendszámok kisebbek ω_α-nál, azaz az elem által alkotott szeletek számosságai $\aleph_\alpha$-nál kisebbek.

Vegyük tehát B-nek egy elemét ! Ez tehát $\langle x, y\rangle \in B$ alakú ahol x és y ω_α-nál kisebb rendszám. $\langle x, y\rangle \in B_\gamma$, ahol $\gamma = \max(x, y)$. Az $\langle x, y\rangle$ által meghatározott kezdőszelet áll egyrészt a B_γ-t megelőző B_ξ-kből, másrészt magának B_γ-nak egy részéből (B_γ belső rendezésének $\langle x, y\rangle$-t megelőző részéből). Ezt a halmazt csak növeljük, ha a teljes B_γ-t beleteszük. Így elég annyit belátni, hogy

$$\bigcup_{\xi\leq\gamma} B_\xi$$

számossága kisebb, mint $\aleph_\alpha$.

E halmaz elemei azok az $\langle x, y\rangle$ párok, amelyekre $\max(x, y)$ legfeljebb γ, azaz x és y is legfeljebb γ, azaz

$$\{x : x \leq \gamma\} \times \{y : y \leq \gamma\},$$

formálisan még úgy is felírhatjuk, hogy $\left(\widetilde{\gamma} \cup \{\gamma\}\right) \times \left(\widetilde{\gamma} \cup \{\gamma\}\right)$.

Ha γ véges, akkor ez a halmaz véges, tehát $\aleph_\alpha$-nál kisebb számosságú. Ha γ végtelen, akkor $|\widetilde{\gamma}| = \aleph_\beta$ valamilyen $0 \leq \beta < \alpha$-ra. Ekkor $\left(\widetilde{\gamma} \cup \{\gamma\}\right)$ számossága $\aleph_\beta + 1$, de ez a 24. Tétel utáni megjegyzés miatt $\aleph_\beta$-val egyenlő. A Descartes-szorzat számosságára azt kapjuk, hogy: $\left|\left(\widetilde{\gamma} \cup \{\gamma\}\right) \times \left(\widetilde{\gamma} \cup \{\gamma\}\right)\right| = \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$ (itt használtuk fel az indukciót) és ez valóban kisebb $\aleph_\alpha$-nál. $\square$

Tételünknek nagyon fontos következménye azt mondja ki, hogy végtelen számosságokra az összeadás és a szorzás olyan egyszerű, amilyen egyszerű csak lehet.

66. Tétel. *Ha a és b végtelen számosságok, akkor $a + b = ab = \max(a, b)$.*

Bizonyítás. Minden végtelen számosság $\aleph_\alpha$ alakban írható, így $a = \aleph_\alpha$, $b = \aleph_\beta$ alkalmas α, β rendszámokra. Tegyük fel, hogy például $\beta \leq \alpha$. Ekkor $b \leq a$, azaz $a = \max(a, b)$. A kívánt öszeg, illetve szorzat:

$$a = \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq 2\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha\aleph_\alpha = \aleph_\alpha = a,$$

$$a = \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha\aleph_\alpha = \aleph_\alpha = a,$$

a műveletek szokásos monotonitását, illetve $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$-et használva. $\square$

Persze, most már *tetszőleges* két számosság összegét és szorzatát tudjuk, hiszen, ha a végtelen, n véges, akkor a 24. Tétel után kiszámoltuk, hogy $a + n = a$, a szorzatra pedig azt mondhatjuk, hogy $n = 0$-ra an értéke nyilván 0, egyébként pedig a fentihez hasonlóan $a \leq an \leq a^2 = a$.

21 A kontinuumhipotézis

Nem tudjuk és Gödel és Cohen eredményei alapján tudjuk, hogy nem is tudhatjuk, hogy igaz-e a kontinuumhipotézis, azaz $c = \aleph_1$. De feltehetjük, mint új axiómát és segítségével tételeket bizonyíthatunk be. Egy ilyen tétel a következő.

67. Tétel. (Sierpiński) *Ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor a sík felbontható két részre úgy, hogy az egyiknek minden függőleges, a másiknak minden vízszintes egyenessel való metszete megszámlálható.*

Bizonyítás. A $c = \aleph_1$ feltevés szerint van bijekció a megszámlálható rendszámok $\tilde{\omega}_1$ halmaza és a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza között. A függvényjelölés helyett indexjelölést használunk, tehát azt írjuk, hogy $\mathbf{R} = \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Ezekután az $\mathbf{R}^2 = A \cup B$ felbontást a következőképpen definiáljuk: ha $\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}^2$, írjuk x-et $x = r_\alpha$, y-t $y = r_\beta$ alakban. Ha $\alpha < \beta$ akkor $\langle x, y\rangle$-t A-ba, egyébként B-be tesszük.

Vegyünk ezekután egy vízszintes egyenest. Ez persze $L = \{\langle x, c\rangle : x \in \mathbf{R}\}$ alakban írható. Ha most $c = r_\beta$ valamilyen $\beta < \omega_1$ megszámlálható rendszámra, akkor $A \cap L$ elemei azok az $\langle x, c\rangle$ párok lesznek, ahol $x = r_\alpha$ valamilyen $\alpha < \beta$ rendszámra, és ilyen rendszám csak megszámlálható sok van, ezért $A \cap L$ megszámlálható. Hasonlóképpen kaphatjuk, hogy ha L függőleges egyenes, akkor $B \cap L$ megszámlálható. $\square$

Érdekes módon az utóbbi tétel megfordítható.

68. Tétel. *Ha a sík felbontható két részre úgy, hogy az egyiknek minden függőleges, a másiknak minden vízszintes egyenessel való metszete megszámlálható, akkor igaz a kontinuumhipotézis.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{R}^2 = A \cup B$, ahol A-nak minden vízszintes, B-nek minden függőleges egyenessel való metszete megszámlálhat; de a kontinuumhipotézis nem teljesül. Ekkor — mivel $\aleph_0$ nem lehet — a kontinuum értéke legalább $\aleph_2$. Legyen $\{L_i : i \in I\}$ $\aleph_2$ vízszintes és $\{M_j : j \in J\}$ $\aleph_1$ függőleges egyenes. Minden $i \in I$-re és $j \in J$-re az L_i és M_j egyenes egy pontban metszi egymást, nevezzük ezt p_{ij}-nek.

Vizsgáljunk először egyetlen L_i egyenest ! L_i-nek az $\aleph_1$ különböző függőleges egyenessel $\aleph_1$ p_{ij} metszéspontja van, a felbontásra tett kikötés szerint nem lehet mind A-beli. Van tehát olyan $j \in J$, amelyre $p_{ij} \in B$. Rendeljünk hozzá az $i \in I$ értékhez egy ilyen $j \in J$-t. Ezzel definiáltunk egy $f : I \to J$ függvényt. Emlékezzünk: $|I| = \aleph_2$, $|J| = \aleph_1$. Ha minden $j \in J$ érték teljes inverz képe megszámlálható lenne, akkor I, azaz az összes érték teljes inverz képének halmaza legfeljebb $\aleph_0\aleph_1 = \aleph_1$ számosságú, ami ellentmondás. Van tehát olyan $j \in J$ érték, amelyet f több mint $\aleph_0$-szor vesz fel. Ez azt jelenti, hogy van $\aleph_1$ olyan i, amelyre $p_{ij} \in B$, azaz az M_j (függőleges) egyenesen B-nek több, mint $\aleph_0$ pontja lenne, ami ellentmondás. □

22 Kőnig Gyula tétele

A jólrendezési tétel szerint a kontinuum számosság értéke $\aleph_\alpha$ valamilyen α rendszámra, de nem derült ki, melyik α-ra. Persze, Cantor tétele miatt, $\alpha = 0$ nem lehet. Mint láttuk, az $\alpha = 1$ kérdés, azaz a kontinuumprobléma, eldönthetetlen. Axiómarendszerünkben ezt az állítást nem tudjuk sem bizonyítani, sem cáfolni. Hasonló a helyzet az $\alpha = 2$ kérdéssel, tehát a $c = \aleph_2$ kérdés is eldönthetetlen axiómarendszerünkben. Van azonban olyan tétel, amely információt ad arra, hogy $c = \aleph_\alpha$ milyen α-ra teljesülhet.

69. Tétel. (Kőnig Gyula tétele) $c \neq \aleph_\omega$

Bizonyítás. Egy állításra van szükségünk.

Állítás. $\aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \cdots = \aleph_\omega$.

Bizonyítás. A monotonitás miatt

$$\aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \cdots \leq \aleph_\omega + \aleph_\omega + \aleph_\omega + \cdots = \aleph_0 \aleph_\omega = \aleph_o o$$

a 65. Tétel miatt. Beláttunk tehát annyit, hogy a baloldal kisebb vagy egyenlő a jobboldalnál.

A másik irányhoz gondoljuk át a következőket. Az $\aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \cdots$ összeg legalább akkora, mint bármelyik tagja (az összeadás monotonitása miatt) de mivel minden tagnál nagyobb a következő, ez az összeg minden tagjánál szigorúan nagyobb lesz. A legkisebb számosság, amely nagyobb, mint $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ éppen $\aleph_\omega$, tehát azt kaptuk, hogy $\aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \cdots \geq \aleph_\omega$. Az ekvivalencia tétel miatt, a két egyenlőtlenség (a már megszokott módon) adja az egyenlőséget. □

Visszatérve a tétel bizonyításához, azt fogjuk belátni, hogy $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. Ez elég, hiszen $c^{\aleph_0} = c$-t beláttuk (30. Tétel), így c nem lehet egyenlő $\aleph_\omega$-val.

Tegyük fel tehát, hogy $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$ és legyen A $\aleph_\omega$ számosságú halmaz ! Vegyük a $C = {}^{\mathbf{N}}A$ halmazt, tehát az $\mathbf{N}$-ből (a természetes számok halmazából) A-ba képező összes függvények halmazát. Ennek számossága $|A|^{|\mathbf{N}|} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$, azaz, indirekt feltevésünk szerint, ismét $\aleph_\omega$. Az Állítás szerint C felbontható, mint $C = C_0 \cup C_1 \cup C_1 \cup \cdots$, ahol C_n számossága éppen $\aleph_n$.

Belátjuk, hogy van olyan $g \in C$ elem, amelyik semelyik C_n-ben sincs benne. Ez természetesen ellentmondás lesz. A $g : \mathbf{N} \to A$ függvényt a következőképpen adjuk meg. Tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ természetes számra vegyük az $A_n = \{f(n) : n \in C_n\}$ halmazt. Mivel $|C_n| = \aleph_n$ és A_n tulajdonképpen egy C_n-en definiált leképezés képe, A_n számossága legfeljebb $\aleph_n$ (szürjektív függvény csak csökkentheti a számosságot). Ezért A_n nem lehet azonos az egész A halmazzal (hiszen A számossága $\aleph_\omega$, míg A_n-é legfeljebb $\aleph_n$). Van tehát A-beli elem, ami nincs benne A_n-ben, legyen $g(n)$ egy ilyen elem. Azt állítjuk, hogy az így definiált $g : \mathbf{N} \to A$ függvény benne van C-ben, de nincs benne $C_0 \cup C_1 \cup C_1 \cup \cdots$-ben. Az első állítás világos, a a második pedig onnan adódik, hogy bármelyik konkrét C_n-et is vesszük, $g \in C_n$ lehetetlen, hiszen $g(n)$-et úgy választottuk meg, hogy ez ne teljesülhessen (a g függvény n helyen felvett értéke nem olyan érték, amelyet C_n-beli függvény az n helyen felvesz). $\square$

Érdemes észrevenni, hogy bizonyításunk nagyon hasonlít egy másik bizonyításhoz; a valós számok halmaza nem megszámlálható voltát ugyanígy igazoltuk (végtelen sok lépéssel, átlózással, minden lépésben egy-egy feltételt kielégítve). Valójában a két állítás közös általánosítása könnyen megfogalmazható és hasonlóan bizonyítható: a kontinuum értéke nem lehet olyan számosság, amely előáll megszámlálható sok kisebb számosság összegeként.

A tétel másik érdekessége, hogy bebizonyítja ugyan $c \neq \aleph_\omega$-t, de nem ad útmutatást arra nézve, hogy c kisebb vagy nagyobb-e, mint $\aleph_\omega$. Okkal: az axiómarendszer ezt nem tudja eldönteni. Mint Solovay (nem sokkal Cohen felfedezése után) megmutatta, csakis a fenti tulajdonságú végtelen számosságokról, tehát $\aleph_0, \aleph_\omega, \aleph_{\omega 2}, \ldots$ lehet megmutatni, hogy nem lehet a kontinuum értéke, minden más végtelen számosság, tehát $\aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \ldots$ lehet c értéke.

23 Néhány halmaz definíciója

Ebben a fejezetben áttekintjük, hogyan illeszthetjük be axiomatikus tárgyalásmódunkba a matematika legfontosabb halmazait, azaz hogyan definiálhatjuk $\mathbf{N}$-et, $\mathbf{Z}$-t, $\mathbf{Q}$-t, $\mathbf{R}$-et, $\mathbf{C}$-t az üres halmazból az axiómák segítségével.

Komplex számok. $\mathbf{C}$ legyen egyszerűen $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (ellátva a megfelelő műveletekkel).

Egész számok. Hagyományosan az egész számok halmazát úgy definiáljuk, hogy végiggondoljuk, mit jelent egy félgyűrű kiterjesztése gyűrűvé, azaz összeadással és szorzással (és megfelelő azonosságokkal) rendelkező halmazt olyan bővítése, melyben kivonni is korlátlanul tudunk.

Ehhez az $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (azaz a természetes számokból álló rendezett párokból álló) halmazon vezessük be a következő ekvivalencia-relációt:

$$\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle,$$

ha $a - b = c - d$. Ezt azonban nem köthetjük ki feltételnek, hiszen éppen, hogy nincs definiálva például $1 - 2 = 2 - 3$, ezért így írjuk át a fenti azonosságot: $a + d = b + c$. Először be kell bizonyítani, hogy ez valóban ekvivalencia-reláció. Ezután az egész számokat, mint az ekvivalencia-osztályokat definiáljuk, megjegyezve, hogy az $\langle x, 0\rangle$ pár ekvivalencia-osztálya lesz „tulajdonképpen" az x természetes szám ($x = 0, 1, \ldots$-re). Végül definiáljuk az algebrailag érdekes műveleteket: ha $\langle a, b\rangle$ osztályát $\big[\langle a, b\rangle\big]$-vel jelöljük, akkor

$$\big[\langle a, b\rangle\big] + \big[\langle c, d\rangle\big] = \big[\langle a + c, b + d\rangle\big],$$

stb. Számos dolgot kell ellenőrizni, legelőször, hogy a művelet eredménye nem függ attól hogy az osztályt melyik elemével reprezentáltuk (ismerős!), egészen addig, hogy $x \neq y$ esetén az $\big[\langle x, 0\rangle\big]$ osztály nem esik egybe az $\big[\langle y, 0\rangle\big]$ osztállyal. (Az miért lenne baj?)

Racionális számok. A racionális számokat ehhez hasonlóan lehet definiálni: általános eljárást adva arra, hogyan lehet gyűrűt testbe ágyazni.

Egy $\sim$ ekvivalencia-relációt definiálunk a

$$\mathbf{Z} \times \big(\mathbf{Z} - \{0\}\big)$$

halmazon, tehát azon $\langle a, b\rangle$ párok halmazán, ahol a egész, b pedig 0-tól különböző egész. Persze, azt szeretnénk, ha akkor lenne $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$, ha

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

de mivel egyelőre nem használhatjuk az osztás fogalmát, ezt

$$ad = bc$$

alakban írjuk át.

Ezután a műveleteket a kézenfekvő módon definiáljuk: az $\langle a, b\rangle$-t tartalmazó és a $\langle c, d\rangle$-t tartalmazó osztályok összege legyen az $\langle ad + bc, bd\rangle$ párt tartalmazó osztály, stb.

Valós számok.

$\mathbf{R}$ (egyik) jólismert definíciója Dedekind szeleteket használ:

$$\mathbf{R} = \big\{\langle A, B\rangle : \langle A, B\rangle \text{ Dedekind szelet}\big\},$$

ahol az $\langle A, B\rangle$ pár Dedekind szelet, ha

1. A, $B \subseteq \mathbf{Q}$;
2. A, $B \neq \emptyset$;
3. A lefelé zárt, azaz $x < y \in A$ esetén $x \in A$;
4. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{Q}$;
5. A-nak nincs legnagyobb eleme.

A titkos gondolat persze az, hogy az $x \in \mathbf{R}$ valós számot $\langle A, B\rangle$-vel azonosítjuk, ahol A a nála kisebb racionális számok halmaza, $B = \mathbf{Q} - A$. Azt persze könnyű (de elengedhetetlen) belátni, hogy $\mathbf{R}$ halmaz: hiszen részhalmaza $P(\mathbf{Q}) \times P(\mathbf{Q})$-nak.

Természetes számok. $\mathbf{N}$ legyen ω. De ezt hogyan adjuk meg ?

Legyen $0 = \emptyset$. $1 = \{0\}$, azaz $1 = \{\emptyset\}$. Továbbá $2 = \{0, 1\}$, azaz $2 = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$, $3 = \{0, 1, 2\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\big\}$, stb. Ezekután legyen $\mathbf{N}$ ezen halmazok halmaza. De hogy adjuk meg ezt a halmazt axiomatikusan?

A következő a trükkje: nevezzünk induktívnak egy A halmazt, ha a következő két tulajdonság teljesül rá:

1. $\emptyset \in A$;
2. ha $x \in A$, akkor $\big(x \cup \{x\}\big) \in A$.

Látható, hogy $\mathbf{N}$ induktív, és $\mathbf{N} \subseteq A$ minden induktív A halmazra. Tehát:

$$\mathbf{N} = \bigcap_{A \text{ induktív}} A,$$

és valóban ez $\mathbf{N}$ definíciója. Itt persze osztálynyi sok halmaz metszetét kell képezni, de, mint láttuk, ezzel nincs gond. (Igaz, csak akkor, ha tudjuk, hogy van ilyen, tehát induktív halmaz. Rövid gondolkodás után érezzük, hogy ha valami, akkor a végtelen halmaz axiómája az ami segíthet, és valóban ezen axiómát hagyományosan úgy mondják ki, hogy létezik induktív halmaz.)

Egy végső kellemetlenség: az egyértelmű definíció kedvéért valamennyi lépésben a már addig definiált objektumokat be kell illeszteni az újabbak közé. Így például a komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$-ként van definiálva, de ebben szerepelnek a már megkonstruált valós számok is, ezeket be kell illesztenünk, azaz helyesen

$$\mathbf{C} = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) - (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup \mathbf{R}.$$

24 Neumann-rendszámok

Legsúlyosabb adósságunk a rendszám és a számosság definíciója.

Neumann Jánostól származik az a szép ötlet, hogy minden rendszámot azonosítsunk a nála kisebb rendszámok halmazával, azaz legyen

$$\alpha = \tilde{\alpha}$$

minden α rendszámra. Ezt számos konkrét példára meg is tettük (így definiáltuk a természetes számokat: $0, 1, 2, \ldots$, vagy például ω-t).

Látszólag a fenti definíció a transzfinit rekurzió tételével gondtalanul kivitelezhető:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\},$$

valójában ezt nem használhatjuk a rendszámok *definíció*jára, mert a transzfinit rekurzió tételének bizonyításához már felhasználtuk a rendszám, rendszámok halmaza, stb. fogalmát. Így hibás kör keletkezik.

A helyes eljárás az, hogy a rendszám fogalma nélkül definiáljuk a Neumann által elkészített halmazokat. Ez a definíció a következő: egy X halmazt nevezzünk *Neumann-rendszám*nak, ha

1. X tranzitív, azaz $x \in y \in X$ esetén $x \in X$;
2. $\langle X, E\rangle$ jólrendezett, ahol $x, y \in X$ esetén x, y az E relációban áll, ha $x \in y$.

A Neumann-rendszámok éppen azelőző értelemben definiált halmazok. Ahhoz, hogy belássuk, a Neumann-rendszámok valóban használhatók rendszámdefiníciónak, a következő nehéz tételt[6] kell bebizonyítani: ha az $\langle A, <\rangle$ halmaz jólrendezett, akkor létezik pontosan egy olyan X Neumann-rendszám, hogy $\langle A, <\rangle \simeq \langle X, E\rangle$.

Ezután egy jólrendezett halmaz rendszámát a következőképpen definiáljuk: $\langle A, <\rangle$ rendszáma legyen az az X (egyetlen) Neumann-rendszám, amelyre teljesül $\langle A, <\rangle \simeq \langle X, E\rangle$.

[6] Bizonyítását lásd az Irodalomjegyzékben megadott Hajnal-Hamburger-féle tankönyvben. E könyv egyébként, a mienkétől eltérően, a fent említett korrekt módon vezeti be a rendszám fogalmát.

A Neumann-féle rendszámdefiníció lehetővé teszi, hogy (végre) definiáljuk a számosságot. Ehhez a jólrendezési tételt használjuk fel. Annak értelmében minden A halmazhoz van legkisebb α rendszám, hogy A-nak van α rendszámú jólrendezése. Rendeljük hozzá A-hoz, mint számosságot, ezt az α rendszámot. Ez rendelkezik a számosságtól megkövetelt tulajdonsággal: ha $A \sim B$, akkor azonosak jólrendezéseik rendszámai, így a legkisebb is, és megfordítva, ha van azonos rendszámra történő jólrendezésük, akkor $A \sim B$. Tehát a definíció a következő:

$$|A| = X,$$

ahol X az egyetlen Neumann-rendszám, amelyre $A \sim X$, de $A \not\sim Y$, ha $Y \in X$.

Jegyezzük meg, hogy a számosság fenti definíciója olyan, hogy minden A halmazra annak $|A|$ számossága maga is $|A|$ számosságú halmaz. Ezt nem követeltük meg, amikor leszögeztük, hogy milyen tulajdonsággal kell rendelkezni a számosság-operációnak, ez többlet. Segítségével viszont rendbetehetjük a rendtípus definícióját is: ha $\langle A, < \rangle$ rendezett halmaz, legyen $\langle A, < \rangle$ rendtípusa az összes $\langle X, < \rangle$ rendezett halmazok halmaza, ahol az X Neumann-rendszám A számossága, és $\langle X, < \rangle \simeq \langle A, < \rangle$. Ez halmaz, mert része $\{X\} \times P(X \times X)$-nek, és valóban $\langle A, < \rangle$ és $\langle B, < \rangle$ esetén akkor és csak akkor azonos, ha a megfelelő X azonos (tehát $|A| = |B|$) és $\langle A, < \rangle \simeq \langle B, < \rangle$.

Egy utolsó simítás: mivel a rendszámokat már korábban definiáltuk, jólrendezett halmazok rendtípusát nem a fenti módon adjuk meg, hanem természetesen a hozzárendelt (Neumann-)rendszámmal.

25 A görög betűk

A, α	alfa
B, β	béta
Γ, γ	gamma
Δ, δ	delta
E, ε	epszilon
Z, ζ	zéta
H, η	éta
Θ, θ	theta
I, ι	iota
K, κ	kappa
Λ, λ	lambda
M, μ	mű
N, ν	nű
Ξ, ξ	kszi
O, o	omikron
Π, π	pi
P, ρ	ró
Σ, σ	szigma
T, τ	tau
Υ, υ	üpszilon
Φ, φ	fi
X, χ	khi
Ψ, ψ	pszi
Ω, ω	omega

26 Irodalomjegyzék

1. Hajnal András, Hamburger Péter: *Halmazelmélet*, Tankönyvkiadó, 1983.
2. Péter Rózsa: *Játék a végtelennel*, TypoTEX , Budapest, 1999.
3. Totik Vilmos: *Halmazelméleti feladatok és tételek*, Polygon, 1997.

Tartalomjegyzék