Szimmetrikus struktúrák

Héger Tamás
matematikus

Témavezető: *Gács András*, docens
ELTE TTK Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
Budapest, 2007.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az extremális gráfelméletben nem ritka jelenség, hogy az extrém gráf véges geometriákhoz kapcsolódik. Általánosan ismert példa a C_4-mentes gráfok esete, ahol a kérdés az, hogy hány éle lehet egy n csúcsú, négy hosszú kört nem tartalmazó gráfnak. Nem nehéz bizonyítani egy felső becslést, amiről a projektív síkokból nyert polaritás-gráf konstrukció mutatja, hogy aszimptotikusan éles. Füredi azt is belátta, hogy ha egy négyszögmentes gráf csúcsszáma megegyezik egy q-adrendű projektív sík pontszámával, akkor legfeljebb annyi éle lehet, mint a projektív sík polaritás-gráfjának; mi több, egyenlőség esetén a gráf ténylegesen egy projektív sík polaritás-gráfja.

Lényegében ugyanennek a problémának egy változata Zarankiewicz egy dolgozatában is megtalálható. Ő azt kérdezte, hány egyes lehet egy $n \times n$-es $0 - 1$ márixban, ha nincs benne $t \times t$-es csupa egy részmátrix. A kérdés természetes átfogalmazása, hogy hány éle lehet egy $K_{t,t}$-t nem tartalmazó páros gráfnak, melynek mindkét csúcsosztályában n csúcs van. Ennek $t = 2$ esetében a projektív síkok illeszkedési gráfjai adják az extrém példát.

A $K_{s,t}$-mentes gráfok élszámát Kővári, T. Sós és Turán becsülték meg; az $s = t = 3$ esetben a becslés kitevője Brown véges affin terekre épülő konstrukciója alapján pontos. Kollár, Rónyai és Szabó, ha nem is véges geometriai, de véges testekre építő konstrukciója mutatja, hogy $s > t! + 1$ esetén a Kővári-T. Sós-Turán becslés aszimptotikusan éles.

Ebben a dolgozatban olyan reguláris gráfokat keresünk, melyek foka bősége előírt. Kárteszi vetette fel a problémát: legkevesebb hány csúcsa lehet egy k-reguláris, g bőségű gráfnak? Ő vette észre, hogy a hat bőségű esetben a lehető legkevesebb csúcsú gráfok pontosan a projektív síkok illeszkedési gráfjai; általában a $g = 2n$ esetre a legkisebb példát az általánosított n-szögek adják. Nem ismert viszont, hogy mi az igazság akkor, ha nincs projektív sík vagy általánosított n-szög. Jó általános felső becslést adni $c(k, g)$-re nagyon nehéz. A dolgozatban először áttekintjük az ismert alsó és felső becsléseket, kis kitekintéssel a Moore gráfok kérdéskörére, majd külön foglalkozunk néhány speciális esettel. Az általánosított n-szögek segítségével adunk ismert és új konstrukciókat, melyekből erős, aszimptotikusan pontos felső becslések nyerhetőek. Kiemelten foglalkozunk a projektív síkok részeként előálló konstrukciók vizsgálatával. A dolgozatban szereplő konstrukciók sok esetben az ismert – néha számítógéppel talált – legjobb példát adják.

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Gács Andrásnak sok fáradozását, ötleteit és bátorítását, valamint Szőnyi Tamásnak alkalmi hozzászólásait.

1. A (k, g)-gráfokról általánosan

(k, g)-*gráfnak* nevezünk egy k-reguláris, g bőségű (egy gráf *bősége* a benne található legrövidebb kör hossza) egyszerű gráfot. Észrevéve, hogy a legkisebb $(3, 5)$-gráf a Petersen gráf, Kárteszi Ferenc 1959-ben felvetette a kérdést, hogy legkevesebb hány csúcson adható (k, g)-gráf. Az sem nyilvánvaló, hogy egyáltalán létezik-e minden k, g számpárra (k, g)-gráf. Erre a válasz pozitív, konstrukciót először Erdős és Sachs adott [7]-ben.

1.1. Tétel. (Erdős-Sachs, 1963) *Tetszőleges k, g ($k \geq 2, g \geq 3$) számok esetén létezik (k, g)-gráf.*

BIZONYÍTÁS. Az egyértelmű $(2, g)$-gráf a g hosszúságú kör, C_g, továbbá a $k+1$ csúcsú teljes gráf szolgáltatja a legkisebb példát $(k, 3)$-gráfra. A bizonyításban kettős indukciót alkalmazunk g-re és k-ra. Egy (k, g)-gráf ($k \geq 3, g \geq 4$) konstruálásához tegyük fel tehát, hogy rendelkezésünkre áll egy n csúcsú G_1 $(k-1, g)$-gráf és egy G_2 $(n, g-1)$-gráf. Osszuk fel G_2 minden pontját n pontra úgy, hogy mindegyikből egy él induljon ki, majd minden felosztott v csúcsra a v-hez tartozó új, n darab csúcsot feleltessük meg a G_1 gráf n darab csúcsának. Az így kapott G gráf nyilvánvalóan k-reguláris. Vegyünk most egy C kört G-ben. Ha C teljesen a G_1-nek valamely példányában halad, akkor legalább g hosszú. Ha C csúcsai G_1-nek legalább kettő példányából kerülnek ki, húzzuk össze a G gráfot az eredeti G_2 gráffá. A C élhalmazából az összehúzás után megmaradó élek tartalmaznak kört, ami legalább $g-1$ hosszúságú, mivel G_2 bősége $g-1$ volt. Másrészt C éleiből legalább egyet ponttá zsugorítottunk az összehúzáskor, hiszen C a G_1-nek legalább két példányán áthalad, viszont ha belép G_1 egyik példányából egy másikba, onnan kizárólag G_1-beli élen tud továbbhaladni. Végül is az derült ki, hogy C-nek legalább g éle van, ennélfogva G egy (k, g)-gráf. ∎

Miután a létezés bizonyítást nyert, minden (k, g) párra értelmes cél a legkisebb (k, g)-gráf csúcsszámának meghatározása. Jelölje $c(k, g)$ a lehető legkevesebb csúcsú (k,g)-gráf pontjainak számát. A $c(k,g)$ csúcsszámú (k,g)-gráfokat *cage*-eknek nevezzük. Az előző tételből adódik egy felső becslés $c(k,g)$-re, de túl nagy, hiszen például már $(3,4)$-re 20 pontú gráfot ad, pedig $c(3,4) = 6$ (a $K_{3,3}$ teljes páros gráf $3+3$ csúcson adja a példát). Mielőtt a felső becslések tárgyalásába kezdenénk, bizonyítunk egy egyszerű alsó becslést $c(k,g)$-re.

1.2. Tétel. (Moore-korlát)

$$c(k,g) \geq \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{\frac{g-1}{2}-1}, & \textit{ha } g \textit{ páratlan} \\ 2(1 + (k-1) + (k-1)^2 + \cdots + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}), & \textit{ha } g \textit{ páros.} \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. Legyen először g páratlan. Vegyünk egy tetszőleges v csúcsot. Jelölje a v-től i távolságra levő pontok halmazát V_i. Ha $i \leq \frac{g-1}{2}$, semely két $u \neq v$, $u,v \in V_{i-1}$ pont nem szomszédos, se nem lehet közös szomszédja V_i-ben, máskülönben volna a gráfban legfeljebb $2i \leq g-1$ hosszúságú kör. Ebből és a regularitásból látható, hogy $1 \leq i \leq \frac{g-1}{2}$ -re $|V_i| = k(k-1)^{i-1}$, amiből az állított becslést nyerjük.

Legyen most g páros. Vegyünk két szomszédos csúcsot, u-t és v-t. Jelölje V_i a v-től i, u-tól pedig $i+1$ távolságra elhelyezkedő pontok halmazát; definiáljuk U_i-t hasonlóképpen u és v szerepének felcserélésével. A páratlan eset gondolatmenetét követve azt kapjuk, hogy $1 \leq i,j \leq \frac{g}{2}-1$ esetén $|V_i| = |U_i| = (k-1)^i$, és az U_i, V_j halmazok páronként diszjunktak. Ebből a kívánt egyenlőtlenség adódik. ■

Jelölje $c_0(k,g)$ a most bizonyított alsó becslés értékét. Természeteses felvetődő kérdés, hogy mindig elérhető-e a Moore-korlát: vajon teljesül-e minden esetben $c(k,g) = c_0(k,g)$? Hoffman és Singleton megmutatták, hogy $g = 5$-re csak $k = 2,3,7,57$ esetén érhető el a Moore-korlát. Az első három esetben van konstrukció is: a $(2,5)$-cage az ötszög, a $(3,5)$-cage a Petersen-gráf 10 ponton, a $(7,5)$-cage pedig a Hoffman-Singleton gráf 50 ponton, tehát ezek mindegyike $c_0(k,g)$ csúcsú. A $k = 57$ eset máig tisztázatlan. A $c_0(k,g)$ Moore-korláttal egyező csúcsszámú (k,g)-gráfokat nevezzük *Moore gráfnak*. (Megjegyzem, nem teljesen egységes a szakirodalom: némely cikkek csak a páratlan bőségű esetben beszélnek Moore gráfról.) Hoffman és Singleton belátták azt is, hogy a $(2, 5)$, a $(3, 5)$ és a $(7, 5)$-cage egyértelmű, továbbá igazolták, hogy hét hosszúságú körön kívül nincs más hét bőségű Moore gráf. Damerell, és tőle fügetlenül Bannai és Ito 1973-ban bizonyították, hogy páratlan bőségű Moore gráf csak $g = 3$, illetve $g = 5$ esetén létezhet; e kérdéskörben tehát csak a 3250 csúcsú, 57-reguláris, 5 bőségű gráf létezése nyitott.

Vizsgáljuk meg a páros bőségű esetet. Tételezzük fel, hogy létezik $g = 2n$ bőségű, k-reguláris Moore gráf. Világos, hogy ha két pont távolsága $m < n$, akkor csak egy m hosszúságú út van közöttük, mert nincs a gráfban g-nél rövidebb kör. Bármely két pont távolsága legfeljebb n, mert ha az egyik pont v, legyen u egy tetszőleges szomszédja, és rajzoljuk fel a gráfot az u és a v csúcsokból indulva úgy, mint a Moore-korlát bizonyításánál. Ugyanazt az ábrát kell kapjuk, csak az U_{n-1} és V_{n-1} közti élek mibenléte nem tisztázott, de az most érdektelen. Jól látható, hogy v-től bármely csúcs legfeljebb n távolságra helyezkedik el. Látható továbbá az is, hogy van v-től n távolságra levő csúcs, nevezetesen U_{n-1} elemei.

A csúcsokat felváltva két színnel színezve egy páros gráfot kapunk; nevezzük ki a v színosztályát csúcsoknak, az u színosztályát egyeneseknek. Mondjuk azt, hogy egy P pont illeszkedik egy e egyenesre, ha a gráfban P és e szomszédosak. Így kaphatunk páros gráfból illeszkedési struktúrát, és fordítva: ha $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ egy tetszőleges illeszkedési struktúra, $\mathcal{S}$ *illeszkedési gráfján* azt a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, E)$ páros gráfot értjük, melyben $(p, l) \in E \iff p\,\mathcal{I}\,l$. A $2n$ bőségű Moore gráfok tehát speciális illeszkedési struktúrák gráfjainak felelnek meg; ezek az illeszkedési struktúrák az *általánosított n-szögek* közé tartoznak.

1.3. Definíció. *Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ illeszkedési struktúrában x és y* távolsága *az a legkisebb n, melyre létezik $x = x_0\,\mathcal{I}\,x_1\,\mathcal{I}\,\ldots\,\mathcal{I}\,x_{n-1}\,\mathcal{I}\,x_n = y$ lánc. A távolság jele szokásos módon $d(x, y)$. Ez a távolság ugyanaz, mint a struktúra illeszkedési* *gráfjában a megfelelő csúcsok távolsága.*

1.4. Definíció. *Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ illeszkedési struktúra* általánosított n-szög*, ha az alábbi három axióma teljesül benne:*

1. *$\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ bármely két elemének távolsága legfeljebb n.*
2. *$\forall x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}\ \exists y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}\colon d(x, y) = n$.*
3. *$\forall x, y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L},\ d(x, y) = m < n$ esetén csak egy darab m hosszú lánc vezet x és y között.*

Azt láttuk tehát, hogy a k-reguláris, $2n$ bőségű Moore gráfok olyan speciális általánosított n-szögek, melyekben minden pontra k egyenes, és minden egyenesre k pont illeszkedik. Minden „hagyományos” n-szög persze általánosított n-szög is, azonban Feit és Higman 1964-es tétele alapján csak $n = 2, 3, 4, 6, 8$ esetén lehetséges más példát adni; továbbá általánosított nyolcszög illeszkedési mátrixa nem lehet reguláris, tehát nincsen r-reguláris, 16 bőségű Moore gráf, ha $r \geq 3$.

Az általánosított kétszögek a teljes páros gráfok, hiszen egy pont és egy egyenes távolsága mindenképpen páratlan, de három nem lehet (első axióma), tehát egy kell legyen; magyarán szólva bármely pont illeszkedik bármely egyenesre. A reguláris általánosított kétszögek, azaz a négy bőségű Moore gráfok a $K_{k,k}$ teljes páros gráfok.

Az általánosított háromszögekre a 3. axióma azt mondja ki, hogy bármely két különböző pontnak létezik egyértelmű összekötő egyenese, mivel távolságuk kettő (mert páros, nemnulla és legfeljebb három). Ugyanígy, bármely két egyenesnek létezik egyértelmű metszéspontja. Végeredményben azt kaptuk, hogy az általánosított háromszögek – esetleg elfajuló – projektív síkok. Ismeretes, hogy minden q prímhatványra létezik q rendű projektív sík, a $PG(2, q)$; a prímhatványsejtés pedig azt mondja ki, hogy *csak* prímhatvány rendű projektív síkok léteznek, de ez a kérdés jelenleg még nem dőlt el. Mindenesetre azt elmondhatjuk, hogy ha q prímhatvány, akkor a $(q+1, 6)$ cage-ek Moore gráfok. Ismert továbbá, hogy prímhatvány q-ra léteznek olyan általánosított négy- és hatszögek, melyek illeszkedési gráfja $(q+1)$-reguláris, és így Moore gráf; vagyis $c(q+1, g) = c_0(q+1, g)$, ha $g = 6, 8, 12$.

A cage-ek meghatározása tehát a hat bőségű esetben eldöntené a prímhatványsejtést, de ezen felül is érdeklődés mutatkozik $c(k, g)$ meghatározására, azaz a legkisebb (k, g) gráf(ok) megtalálására. A felső korlátok áttekintése előtt összehasonlításképpen idézzük fel a Moore-korlátot zárt alakban:

$$c(k,g) \geq c_0(k,g) = \begin{cases} \frac{k(k-1)^{\frac{g-1}{2}}-2}{k-2}, & \text{ha } g \text{ páratlan} \\ \\ \frac{2(k-1)^{\frac{g}{2}}-2}{k-2}, & \text{ha } g \text{ páros.} \end{cases}$$

Wong 1982-es [11] összefoglaló cikke a cage-ekről az alábbi általános felső becslést ismerteti, mint az akkori legjobbat:

1.5. Tétel. (Sauer, 1967)

- *Ha g páratlan, $k \geq 4$ esetén $c(k, g) \leq 2(k-1)^{g-2}$, és $c(3, g) \leq \frac{29}{12} 2^{g-2} + \frac{4}{3}$.*
- *Ha g páros, $k \geq 4$ esetén $c(k, g) \leq 4(k-1)^{g-3}$, és $c(3, g) \leq \frac{29}{12} 2^{g-2} + \frac{2}{3}$.*

Ez a felső becslés a Moore-korlátnak durván a négyzete. Ennél jobbat ad a következő eredmény a [9] cikkből:

1.6. Tétel. (Lazebnik-Ustimenko-Woldar, 1997) *Legyen $k \geq 2$, $g \geq 5$ és $q \geq k$ páratlan prímhatvány. Ekkor*

$$c(k, g) \leq 2kq^{\frac{3}{4}g-a},$$

ahol $a = 4, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}$ rendre attól függően, hogy $g \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$.

Ez körülbelül az alsó becslés $\frac{3}{2}$-ik hatványa (nagy g-re), figyelembe véve azt a közismert tényt, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra elegendően nagy k esetén van prím k és $(1+\varepsilon)k$ között, prímhatvány pláne. A szerzők ezt az eredményt egy véges testek segítségével konstruált gráf részgráfjait vizsgálva kapták, nem konstruktív módon. Adtak explicit konstrukciókat is (k, g)-gráfokra. Ezek csúcsszáma nagyobb a bizonyítottnál, de az 1.5. tételben adott felső korlát alatt marad. A továbbiakban néhány esettel fogunk külön foglalkozni.

2. A hat bőségű eset

Speciálisan $(k, 6)$-gráfokra az 1.6. tétel a $c(k, 6) \leq 2kq$ becslést adja, ahol $q \geq k$ páratlan prímhatvány, amiből – a Moore-korlát figyelembe vételével – $c(k, 6) \sim 2k^2$ kapható. Ez azonban nem új eredmény: Brown már 1967-ben tetszőleges $q \geq k$ prímhatványra konstruált $2kq$ méretű $(k, 6)$ gráfot a q-adrendű projektív sík illeszkedési gráfjából (ld. [6]). Tovább finomítja a $c(k, 6)$-ra vonatkozó becsléseket a 2006-os [1] cikk, melyben a szerzők véges testek segítségével minden k-ra konstruáltak $2kq$ csúcsú $(k, 6)$-gráfot, $k = q$-ra $2(q^2 - 1)$ csúcsú $(q, 6)$-gráfot ($q \geq k$ prímhatvány mindenhol); továbbá egy $(15, 6)$-gráfot 462, és egy $(16, 6)$-gráfot 504 csúcson. Egy sejtésük következménye volna, hogy általában $q \geq k$ négyzetszám esetén adható legfeljebb $2\left(kq - (q-k)\left(\sqrt{q}+1\right) - \sqrt{q}\right)$ csúcsú $(k, 6)$-gráf, ám csak $q = 4, 9, 16$-ra ellenőrizték és találták igaznak a sejtést, feltehetően számítógépek segítségével; ebből $q = 16$-ra és $k = 15, 16$-ra alkalmazva kapjuk az utóbbi két gráfot. A következőekben véges geometriai konstrukciókat adunk $(k, 6)$ gráfokra, és ezzel általánosan igazoljuk az előző becsléseket, az utolsót az említett sejtés mellőzésével; továbbá a vonatkozó véges projektív geometriai kérdést taglaljuk.

2.1. Konstrukciók projektív síkból

Mint láttuk, a q-adrendű projektív sík illeszkedési gráfja Moore gráf. Ennek a gráfnak a reguláris részgráfjait szeretnénk megvizsgálni. Ezek természetesen páros, legalább hat bőségű gráfok lesznek. Általában nem haszontalan megvizsgálni az ismert Moore gráfok reguláris részgráfjait, hiszen például a $g = 5$ esetben az 50 csúcsú $(7, 5)$-cage (a Hoffman-Singleton gráf, ami Moore gráf) részgráfjaként kapható meg mind a $(6, 5)$-cage 40 csúcson, mind egy $(5, 5)$-cage 30 csúcson [11]. A q szám mostantól tetszőleges, egynél nagyobb természetes számot jelöl, kivéve, ha a szövegkörnyezetében $PG(2, q)$ szerepel; ekkor q alatt prímhatványt értünk.

Vegyünk egy tetszőleges q-adrendű projektív síkot, jelölje $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$ a pont-, illetve egyeneshalmazát. Az illeszkedési gráfjának egy $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$ pontok által feszített részgráfja pontosan akkor lesz $(q+1-t)$-reguláris, ha a $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_1$ jelöléssel $\mathcal{P}_1$ minden pontján át pontosan t darab egyenes halad $\mathcal{L}_0$-ból, és $\mathcal{L}_1$ minden egyenesére pontosan t darab pont illeszkedik $\mathcal{P}_0$-ból.

2.1. Definíció. *A fenti tulajdonságú* $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ *párokat nevezzük* t-jó *struktúrának.*

Minden t-jó $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ pár esetén $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0|$, hiszen komplementereik, $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{P}_1$ reguláris páros gráfot feszítenek, ezért $|\mathcal{P}_0| = q^2+q+1-|\mathcal{P}_1| = q^2+q+1-|\mathcal{L}_1| = |\mathcal{L}_0|$. Így a projektív sík illeszkedési gráfjából egy t-jó $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ pár elhagyásával $k = q + 1 - t$ fokszámú, $2(q^2 + q + 1 - |\mathcal{P}_0|)$ csúcsú gráfot kapunk. Ettől motiválva t-jó $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ párokat szeretnénk konstruálni. Eme halmazok elemeire a „dobjuk ki”, komplementereikre pedig a „bennmarad” kifejezéssel és szinonimáival fogunk hivatkozni.

Legyen P tetszőleges pont. A P-re illeszkedő egyenesek egyrétűen fedik a sík P-től különböző pontjait, magyarán őket elhagyva P kivételével minden pontról egy egyenest hagytunk el. Hasonlóan, egy l egyenes pontjai minden l-től különböző egyenest pontosan egy pontban metszenek, amiből látható, hogy $\mathcal{P}_0 = \{Q \in \mathcal{P} \colon Q \in l\} \cup \{P\}$, $\mathcal{L}_0 = \{e \in \mathcal{L} \colon P \in e\} \cup \{l\}$ 1-jó rendszert alkot. Vegyük észre, hogy itt két esetet különböztethetünk meg attól függően, hogy $P \in l$ vagy $P \notin l$. Az első esetben $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0| = q + 1$, a másodikban $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0| = q + 2$.

Ezt a gondolatmenetet általánosítandó, vegyünk $\mathcal{P}_A = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ alappontokat és $\mathcal{L}_A = \{l_1, l_2, \ldots, l_t\}$ alapegyeneseket, és vizsgáljuk meg, hogy az alapegyenesek és az alappontokra illeszkedő egyenesek, illetve az alappontok és az alapegyenesekre illeszkedő pontok mikor alkotnak t-jó struktúrát. Legyen P bennaradó pont. Róla a $PP_i (1 \leq i \leq t)$ összekötő egyeneseket hagytuk el. Ez pontosan akkor jelenti t darab egyenes elhagyását, ha $P \notin P_iP_j (1 \leq i < j \leq t)$, azaz az alappontokat összekötő egyenesek összes pontját el kellett hagynunk. Ez $t < \frac{q+1}{2}$ esetén kizárólag úgy lehetséges, ha a P_iP_j összekötő egyenes az alapegyenesek valamelyike, ugyanis egy $e \notin \mathcal{L}_A$ egyenesről legfeljebb $2t$ pontot hagyhattunk el, $\mathcal{P}_A$ pontjait és e-nek az $\mathcal{L}_A$ egyeneseivel vett metszéspontjait. Ugyanígy, az alapegyenesek metszéspontjainak az alappontok közül kell kikerülniük. Egy szó, mint száz, $(\mathcal{P}_A, \mathcal{L}_A)$ az örökölt illeszkedéssel olyan illeszkedési struktúra, melyben bármely két pontnak létezik egyértelmű összekötő egyenese, és bármely két egyenesnek létezik egyértelmű metszéspontja. Megkülönböztetünk három esetet.

1. Nincs három általános helyzetű pont $\mathcal{P}_A$-ban. Ekkor az alappontok mindegyike egy rögzített alapegyenesre esik, az alapegyenesek mindegyike áthalad egy rögzített alapponton.

2. Van három, de nincs négy általános helyzetű pont $\mathcal{P}_A$-ban. Ekkor az illeszkedési struktúránk degenerált lineáris tér.

3. Van négy általános helyzetű pont $\mathcal{P}_A$-ban. Ekkor $(\mathcal{P}_A, \mathcal{L}_A)$ projektív sík, az eredeti sík részsíkja.

Ebből kiindulva konstruálunk néhány t-jó struktúrát, majd megadunk további konstrukciókat is.

1. konstrukció. *Legyen l_1 egyenes és P_1 rá illeszkedő pont, $P_2, \ldots, P_t$ $t-1$ darab P_1-től különböző pont l_1-en, $l_2, \ldots, l_t$ $t-1$ darab l_1-től különböző egyenes P_1-en át. Dobjuk ki az l_i egyenesek összes pontját és a P_i pontokra illeszkedő összes egyenest* $(1 \leq i \leq t)$.

Vegyünk egy $e \in \mathcal{L}_1$ egyenest. e metszi mindegyik l_i egyenest 1-1 pontban, tehát pontosan t pontot dobtunk ki róla. Ha pedig $P \in \mathcal{P}_1$, akkor a rá illeszkedő egyenesek közül az őt P_i-vel összekötő egyeneseket dobtuk ki, szintén pontosan t darabot. Így $\mathcal{P}_0$ és $\mathcal{L}_0$ teljesítik a feltételeket, és mivel $|\mathcal{P}_0| = tq + 1$, a maradék struktúra illeszkedési gráfja $(q + 1 - t)$-reguláris $2\,(q^2 - (t-1)q)$ ponton. Ez a konstrukció található meg Brown cikkében ([6]).

Vegyük észre, hogy a konstrukció úgy is megfogalmazható, hogy egy affin síkból kidobunk egyeneseknek t párhuzamossági osztályát, valamint az egyik osztályból $t-1$ darab teljes egyenest.

2. konstrukció. *Legyen l egyenes és $P_1 \notin l$, $P_2, \ldots, P_t \in l$. Dobjuk ki l összes pontját és az összes P-re illeszkedő egyenest, továbbá a P_i pontokra illeszkedő egyeneseket, és a P-t P_i-vel összekötő egyenesek pontjait* $(2 \leq i \leq t)$.

A megmaradt egyenesek semelyik P_i-t nem tartalmazzák, de egy-egy pontban metszik l-et és a P_1P_i összekötő egyeneseket $(2 \leq i \leq t)$, míg a megmaradt pontokról t (az őket valamely P_i-vel $(1 \leq i \leq t)$ összekötő) egyenest dobtunk ki. $|\mathcal{P}_0| = 1 + (q + 1) + (t-1)(q-1) = tq - t + 3$, így a kapott gráf $(q + 1 - t)$-reguláris $2(q^2 + q + 1 - t(q-1) - 3)$ ponton.

Vegyük észre, hogy a konstrukció úgy is megfogalmazható, hogy egy affin síkból kidobjuk egy pontját és az arra illeszkedő összes egyenest, valamint kijelöljük az egyeneseknek t párhuzamossági osztályát, és kihajítjuk az azokhoz tartozó összes egyenest, illetve a kijelölt ponton áthaladó egyeneseiknek összes pontját.

Megjegyzés. Ha $t = 2$, az 1. és a 2. konstrukció egybeesik.

3. konstrukció. *Vegyünk egy s rendű $\mathcal{S}$ részsíkot. Dobjuk ki az $\mathcal{S}$ pontjaira illeszkedő összes egyenest, valamint az $\mathcal{S}$ egyeneseire illeszkedő pontokat a nagy síkból.*

Egy bennmaradt P ponton áthaladó egyenesek 0 vagy 1 pontban metszik $\mathcal{S}$-et, ezért P-ről $s^2 + s + 1$ egyenest dobtunk ki, a P-t az $\mathcal{S}$ pontjaival összekötő egyeneseket. Egy bennmaradt l egyenes elkerüli $\mathcal{S}$-et, és $\mathcal{S}$ egyenesei különböző pontokban metszik l-et, hiszen $\mathcal{S}$ egyenesei $\mathcal{S}$-en belül metszik egymást, tehát l-ről $s^2 + s + 1$ pontot dobtunk ki, így egy $(s^2 + s + 1)$-jó struktúrát nyertünk. Összességében a részsík s^2+s+1 pontját, továbbá a részsík egyeneseire illeszkedő $(s^2 + s + 1)(q + 1 - (s + 1))$ darab $\mathcal{S}$-en kívüli pontot hagytuk el, azaz $|\mathcal{P}_0| = (q - s + 1)(s^2 + s + 1) = q(s^2 + s + 1) - (s - 1)(s^2 + s + 1)$. A kapott gráf $q - s(s + 1)$-reguláris és $2(q^2 - s(s + 1)q + s^3)$ pontja van.

A fenti számolás ellentmondásosnak tűnik, ha $s = \sqrt{q}$ (ami Baer-részsík esetén előfordulhat), hiszen akkor egy nulla pontú, de $\sqrt{q}$-reguláris gráfot kéne kapnunk, ami persze lehetetlen. Az ellentmondás abból fakad, hogy feltételeztük, hogy van bennmaradó pont. A számolás korrekt, amennyiben van bennmaradó pont, és ekkor $t = s^2 + s + 1 \leq q + 1$ miatt $s^2 + s \leq q$. Általában $q^2 - s(s + 1)q + s^3 \geq 0$ kell legyen, s ezért $s \leq \sqrt{q}$; de $s^2 + s > q$ csak úgy lehet, ha nincsen bennmaradó pont, azaz $s = \sqrt{q}$. Ez utóbbi esetben minden egyenest kidobtunk, azaz a részsík minden egyenest metsz, vagyis lefogó. Azt kaptuk tehát, hogy egy q-adrendű projektív sík s-edrendű $\mathcal{S}$ részsíkjára $s \leq \sqrt{q}$, és ha $s = \sqrt{q}$, akkor $\mathcal{S}$ lefogó; továbbá, ha $s < \sqrt{q}$, akkor $s^2 + s \leq q$, és $\mathcal{S}$ nem lefogó. Ez Bruck tétele. Gráfkonstrukció szempontjából mind az $s = \sqrt{q}$, mind az $s^2 + s = q$ eset érdektelen. Ismeretes, hogy $q = p^\alpha$ esetén minden $\beta \mid \alpha$-ra van $PG(2, q)$-nak p^β rendű részsíkja, minek segítségével konkrét gráfokat nyerhetünk.

Megjegyzés. Ha az $\mathcal{S}$ projektív sík degenerált, akkor a 3. és a 2. konstrukciók ugyan azt adják.

4. konstrukció. (q páratlan) *Legyen $t = \frac{q+1}{2}$, legyenek $P_1, \ldots, P_t$ különböző pontok valamely l egyenesen. Legyen P_0 egy l-re nem illeszkedő pont. Dobjuk ki a $P_i\,(0 \leq i \leq t)$ pontokra illeszkedő egyeneseket, l pontjait, valamint azon P_0-n áthaladó egyenesek pontjait, melyek l-et P_i-től különböző ponban metszik $(1 \leq i \leq t)$,*

Egy bennmaradt e egyenes l-et P_i-től különböző pontban metszi $(1 \leq i \leq t)$ és elkerüli P-t, tehát róla $t = \frac{q+1}{2}$ pontot hagytunk el. Egy bennmaradt Q pontról a P_iQ összekötő egyeneseket dobtuk ki $(1 \leq i \leq t)$, ami t darabot tesz ki. Összeszámolva $|\mathcal{P}_0| = \frac{q+1}{2} + \frac{q+1}{2}q + 1 = tq + t + 1 = \frac{q^2+2q+3}{2}$, tehát az ily módon nyert gráf $\left(\frac{q+1}{2}\right)$-reguláris és $q^2 - 1$ pontja van.

5. konstrukció. (q négyzetszám) *Ismeretes, hogy ha q négyzetszám, akkor $PG(2,q)$ felbomlik $q - \sqrt{q} + 1$ darab diszjunkt Baer-részsík $\left(\sqrt{q}\right.$ rendű részsík$\left.\right)$ uniójára. Vegyük ezt a Baer-részsík felbontást, és dobjuk ki t darab (diszjunkt) Baer-részsík összes pontját, valamint az ezen t Baer-részsíkhoz tartozó egyeneseket.*

Egy tetszőleges egyenes egy Baer-részsíkot $\sqrt{q} + 1$ pontban metsz, a többit érinti, hiszen ha egy l egyenes egy Baer-részsíkot legalább kettő, akkor $\sqrt{q} + 1$ pontban metsz, továbbá minden Baer-részsík lefogó; tehát ha l k darab Baer-részsíkot metsz $\sqrt{q}+1$ pontban, akkor l pontjainak száma: $q+1 = k\left(\sqrt{q}+1\right) + (q - \sqrt{q} + 1 - k) = (k-1)\sqrt{q} + q + 1$, tehát $k = 1$. Egy $\mathcal{B}$ Baer-részsíkoz tatozó egyeneseken az őt $\sqrt{q} + 1$ pontban metsző egyeneseket értjük. A bennmaradt egyenesek minden részsíkot pontosan egy pontban metszenek, így róluk t pontot dobtunk ki. Egy tetszőleges $\mathcal{B}$ Baer-részsíkhoz tartozó egyenesek a síknak a részsíkon kívül eső pontjait egyrétűen fedik, hiszen minden pontot legfeljebb egyszer fedhetnek le (mert két $\mathcal{B}$-hez tartozó egyenes $\mathcal{B}$-n belül metszi egymást), ennélfogva $(q+\sqrt{q}+1)(q-\sqrt{q}) = q^2-\sqrt{q} = q^2+q+1-|\mathcal{B}|$ fedett pont van a részsíkon kívül, azaz minden pontot lefedtünk. Ezek szerint a t Baer-részsík egyenesei a megmaradó pontokat t-rétűen fedik. Itt $|\mathcal{P}_0| = t(q+\sqrt{q}+1)$, így a kapott gráf $(q+1-t)$-reguláris $2(q^2+q+1-t(q+\sqrt{q}+1))$ ponton.

Megjegyzés. Az 1. és 2. példában látott gráfra található más, bár – amennyiben a projektív sík véges testre épített – lényegében a fentiekkel ekvivalens konstrukció az [1] cikkben; ott a szerzők a gráfok incidenciamátrixát konstruálják meg mátrix-felfújós technikával. Megfogalmaznak egy sejtést is, melynek felhasználásával az 5. konstrukcióban látottal azonos méretű és fokszámú gráfot konstruálnak, azonban a sejtést csak $q = 4, 9, 16$ esetre ellenőrizték.

6. a) konstrukció. (q páratlan) *Hagyjuk meg a sík egy oválisának belső pontjait és elkerülő egyeneseit.*

6. b) konstrukció. (q páratlan) *Hagyjuk meg a sík egy oválisának külső pontjait és szelő egyeneseit.*

Páratlan rendű projektív síkon egy oválisnak $\frac{q(q+1)}{2}$ külső pontja és szelője, illetve $\frac{q(q-1)}{2}$ belső pontja és elkerülő egyenese van. Egy elkerülő egyenesen $\frac{q+1}{2}$, szelőn pedig $\frac{q-1}{2}$ belső és külső pont található. Ezek figyelembe vételével azt kapjuk, hogy a 6. a) konstrukcióból kapott gráf $\left(\frac{q+1}{2}\right)$-reguláris és $q\,(q-1)$ pontja van, a 6. b) konstrukcióból nyert gráf pedig $\left(\frac{q-1}{2}\right)$-reguláris és $q\,(q+1)$ pontja van.

7. konstrukció. (*q* négyzetszám) *Legyen $q = p^{2k}$, ahol p páratlan prím. Ekkor $PG\,(2,q)$-ban létezik maximális $\left(k,\sqrt{q}\right)$-ív (lásd pl. [8]). Dobjuk ki az ív pontjait és az ívet elkerülő egyeneseket.*

Maximális $\left(k, \sqrt{q}\right)$-ívnek $k = 1+(q+1)\left(\sqrt{q}-1\right) = \sqrt{q}\left(q-\sqrt{q}+1\right)$ pontja van. Mivel az ívet minden egyenes 0 vagy $\sqrt{q}$ pontban metszi, egy nem-ív ponton át $q-\sqrt{q}+1$ darab $\sqrt{q}$-szelő, és ennélfogva $\sqrt{q}$ elkerülő egyenes halad. Összegezve, a bennmaradt (szelő) egyenesekről $\sqrt{q}$ pontot hagytunk el, a bennmaradt (nem-ív) pontokról $\sqrt{q}$ egyenest dobtunk ki, azaz $\left(q-\sqrt{q}+1\right)$-reguláris, $2\left(q^2+q+1-\sqrt{q}\left(q-\sqrt{q}+1\right)\right)$ pontú gráfot nyertünk.

8. konstrukció. (q négyzetszám) *Legyen $q = p^{2k}$, ahol p páratlan prím. Ekkor $PG\left(2, q\right)$-ban létezik unitál, azaz olyan ponthalmaz, mely minden egyenest 1 vagy $\sqrt{q}+1$ pontban metsz. Hagyjuk el az unitál pontjait és érintőit.*

Az unitálnak $q\sqrt{q}+1$ pontja van. Ha P nincs az unitálon, rajta $k = \sqrt{q}+1$ érintő halad át, hiszen a rajta áthaladó egyenesek szerint számolva az unitál pontjait, a $k+(q+1-k)\left(\sqrt{q}+1\right) = q\sqrt{q}+1$ összefüggéshez jutunk. Egy megmaradt egyenesről az unitálba eső $\sqrt{q}+1$ pontját hagytuk el. A kapott gráf tehát $\left(q-\sqrt{q}\right)$-reguláris $2\left(q^2+q+1-\left(q\sqrt{q}+1\right)\right)$ ponton.

A konstrukciókból kapott becsléseket átfogalmazzuk a bevezetésben szereplő becslések nyelvére, hogy láthatóbb legyen, mit is kaptunk. Minden esetben a felhasznált projektív sík a $PG(2, q)$, tehát q prímhatvány és $q \geq k$. Felidézzük, hogy $\mathcal{L}_1$ a konstruált páros gráf egyik csúcsosztálya.

1. $k = q+1-t$. Itt $|\mathcal{L}_1| = q^2-(t-1)q = q(q+1-t) = kq$, tehát $c(k, 6) \leq 2kq$.

2. $k = q+1-t$. $|\mathcal{L}_1| = q^2+q+1-t(q-1)-3 = q(q+1-t)+t-2 = kq+q-k-1$, tehát $c(k, 6) \leq 2(kq+q-k-1)$.

3. $q = p^\alpha$, $\beta \mid \alpha$, $k = q-p^\beta(p^\beta+1)$. $|\mathcal{L}_1| = q^2-p^\beta(p^\beta+1)q+\left(p^\beta\right)^3 = kq+p^{3\beta}$, tehát $c(k, 6) \leq 2\left(kq+p^{3\beta}\right)$.

4. q páratlan, $k = \frac{q+1}{2}$. Közvetlenül kiolvasható, hogy $c\left(\frac{q+1}{2}, 6\right) \leq q^2 - 1 = 2(kq - k) = 4k(k-1)$.

5. $q = p^{2\alpha} \geq k = q + 1 - t$. $|\mathcal{L}_1| = \left(q^2 + q + 1 - t(q + \sqrt{q} + 1)\right) = (q + \sqrt{q} + 1)(q - \sqrt{q} + 1 - t) = (q + \sqrt{q} + 1)(k - \sqrt{q}) = \left(kq - (q-k)(\sqrt{q}+1) - \sqrt{q}\right)$, tehát $c(k, 6) \leq 2\left(kq - (q-k)(\sqrt{q}+1) - \sqrt{q}\right)$.

6. a) q páratlan, $k = \frac{q+1}{2}$. Közvetlenül kiolvasható, hogy $c\left(\frac{q+1}{2}, 6\right) \leq q^2 - q = 2(kq - 2k + 1) = 2(2k^2 - 3k + 1)$.

6. b) q páratlan, $k = \frac{q-1}{2}$. Közvetlenül kiolvasható, hogy $c\left(\frac{q-1}{2}, 6\right) \leq q^2 + q = 2(kq + 2k + 1) = 2(2k^2 + 3k + 1)$.

7. $q = p^{2\alpha},\ k = q - \sqrt{q} + 1$. Közvetlenül kiolvasható, hogy $c\left(q - \sqrt{q} + 1, 6\right) \leq 2(q^2 + q + 1 - \sqrt{q}(q - \sqrt{q} + 1)) = 2(kq + k)$.

8. $q = p^{2\alpha},\ k = q - \sqrt{q}$. Közvetlenül kiolvasható, hogy $c\left(q - \sqrt{q}, 6\right) \leq 2\left(q^2 - q\sqrt{q} + q\right) = 2(kq + q)$.

A felsorolásból látható, hogy kis csúcsszámú gráfra törekedve csak az 1., 2., 4., 5., 6. a) konstrukciók lehetnek érdekesek, hiszen a többi esetben $2kq$-nál nagyobb gráfokat kapunk. A 4. és 6. a) példánál $q \geq 2k - 1$, tehát közelítőleg $4k^2$ méretű a gráf, míg például az 1. konstrukciónál tetszőleges $q \geq k$ prímhatvány megfelelő, amit tipikusan találunk jóval $2k$ alatt (nagy k-ra $(1+\varepsilon)k$ alatt is), így pedig kisebb gráfot nyerhetünk. A $c(k, 6)$ felső becsléséhez tehát csak az 1., 2., 5. konstrukciók hasznosak, de 2. is csak $k = q$ esetén, mert egyébként $1.$ jobbat ad. A legjobb becslés az 5., Baer-részsíkos konstrukcióból jön, azonban az csak akkor működik, ha van k-nál kicsit nagyobb q, ami prímhatvány négyzete. Összefoglalásképpen kimondjuk az eredményeket és néhány speciális esetet egy tételben.

2.2. Tétel. *Legyen q a legkisebb prímhatvány, melyre $q \geq k$. Ekkor*

$$c(k,6) \leq \begin{cases} 2kq < 2(1+\varepsilon)k^2 & \textit{minden esetben,} \\ 2(k^2-1), & \textit{ha } k = q\textit{,} \\ 2\left(kq - (q-k)\left(\sqrt{q}+1\right) - \sqrt{q}\right), & \textit{ha } q \textit{ négyzetszám.} \end{cases}$$

Speciálisan, ha $k = q$ négyzetszám, $c(k,6) \leq 2(k^2 - \sqrt{k})$. Az első becslésben ε tetszőlegesen kicsi lehet, ha k elég nagy, de mindenképpen $\varepsilon \leq 1$.

A tételben szereplő első két becslés szerepel a szakirodalomban (ld. pl. [1], [6], [9], [11]), a harmadikról nincs tudomásom. Elvben előfordulhatna $k \leq q < r$ esetén, hogy $c(k,6)$-ra a harmadik becslés r-rel jobb eredményt ad, mint az első, ha r prímhatvány négyzete. Ez azonban nem várható, mert legjobb esetben is $r = q+2$, és ha $q - k = t$, akkor $k(q+2) - (q+2-k)\left(\sqrt{q+2}+1\right) - \sqrt{q+2} = k(k+t+2) - (t+2)\left(\sqrt{k+t+2}+1\right) - \sqrt{k+t+2} \leq kq = k(k+t)$ körülbelül akkor teljesül, ha $t \geq 2\sqrt{k}$; azonban egy szám és a legkisebb nála nagyobb prímhatvány különbsége – nem túl precízen fogalmazva – ennél kisebb szokott lenni, egy sejtés szerint legalábbis elég nagy k-ra van prím k és $k + \sqrt{k}$ között.

2.2. Az optimalitás vizsgálata

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy projektív síkból kapható-e jobb konstrukció, melyből kisebb csúcsszámú $(q+1-t,6)$-gráfot kaphatunk, magyarán szólva adott t mellett t-jó $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ párokat vizsgálva mi a legnagyobb elérhető $|\mathcal{P}_0|$.

2.3. Tétel. *Tetszőleges q-adrendű projektív síkon $t \leq 2\sqrt{q}$ esetén minden t-jó struktúrára $|\mathcal{P}_0| \leq t(q + \sqrt{q} + 1)$ teljesül.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyításhoz legyen $n_i = \mathcal{P}_0$ i-szelőinek száma, $n_i^0 = \mathcal{P}_0$ $\mathcal{L}_0$-beli i-szelőinek száma, $n_0^1 = \mathcal{P}_0$ $\mathcal{L}_1$-beli i-szelőinek száma. Nyilvánvaló, hogy

$n_i = n_i^0 + n_i^1$, továbbá a t-jóságból

$$n_i^1 = \begin{cases} q^2 + q + 1 - |\mathcal{L}_0|, & \text{ha } i = t \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Írjuk fel a standard egyenletek megfelelőit a $\mathcal{P}_0$ ponthalmazra az $\mathcal{L}_0$ egyeneseivel, felhasználva a $\mathcal{P}_0$-ra vonatkozó egyenleteket:

$$\sum_{i=0}^{q+1} n_i^0 = |\mathcal{L}_0| \tag{1}$$

$$|\mathcal{P}_0|(q+1) = \sum_{i=0}^{q+1} i n_i = \sum_{i=0}^{q+1} i n_i^0 + \sum_{i=0}^{q+1} i n_i^1 = \sum_{i=0}^{q+1} i n_i^0 + t n_t^1,$$

amiből $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0|$ felhasználásával és n_t^1 értékét behelyettesítve

$$\sum_{i=0}^{q+1} i n_i^0 = |\mathcal{L}_0|(q+1+t) - t(q^2+q+1) \tag{2}$$

adódik. Hasonlóan,

$$|\mathcal{P}_0|(|\mathcal{P}_0| - 1) = \sum_{i=0}^{q+1} i(i-1) n_i = \sum_{i=0}^{q+1} i(i-1) n_i^0 + t(t-1)(q^2+q+1-|\mathcal{L}_0|),$$

amit átrendezve az alábbit kapjuk:

$$\sum_{i=0}^{q+1} i(i-1) n_i^0 = |\mathcal{L}_0|^2 + |\mathcal{L}_0|(t^2 - t - 1) - t(t-1)(q^2+q+1). \tag{3}$$

(1), (2), (3) segítségével számolunk kicsit:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i=0}^{q+1} (i - (\sqrt{q} + t))^2 n_i^0 = \\
= \sum_{i=0}^{q+1} i(i-1) n_i^0 - \sum_{i=0}^{q+1} (2(\sqrt{q}+t) - 1) i n_i^0 + \sum_{i=0}^{q+1} (\sqrt{q}+t)^2 n_i^0 = \\
= |\mathcal{L}_0|^2 + |\mathcal{L}_0| \left[t^2 - t - 1 - (2(\sqrt{q}+t) - 1)(q+1+t) + (\sqrt{q}+t)^2\right] + \\
+ (q^2+q+1)\left[(2t(\sqrt{q}+t) - t) - t(t-1)\right] = \\
= |\mathcal{L}_0|^2 - 2\left[(q+1)t + \sqrt{q}(q - \sqrt{q} + 1)\right]|\mathcal{L}_0| + (q^2+q+1)(2t\sqrt{q} + t^2) = \\
= \left(|\mathcal{L}_0| - t(q + \sqrt{q} + 1)\right)\left(|\mathcal{L}_0| - (t + 2\sqrt{q})(q - \sqrt{q} + 1)\right),
\end{aligned}$$

következésképp vagy $|\mathcal{L}_0| \leq t(q+\sqrt{q}+1)$, vagy $|\mathcal{L}_0| \geq (t+2\sqrt{q})(q-\sqrt{q}+1)$. (Ha $t \leq q-\sqrt{q}+1$, akkor $t\left(q+\sqrt{q}+1\right) \leq \left(t+2\sqrt{q}\right)\left(q-\sqrt{q}+1\right)$, egyébként pedig a tételben szereplő becslés amúgy is túllő a célon). Feltéve, hogy $0 \leq t \leq 2\sqrt{q}$ és $|\mathcal{L}_0| \geq (t+2\sqrt{q})(q-\sqrt{q}+1)$, a kapott $(q+1-t)$-reguláris gráf egyik osztályának csúcsszáma

$$|\mathcal{L}_1| \leq q^2+q+1-(t+2\sqrt{q})\,(q-\sqrt{q}+1) < q^2+q+1-t(2q-t+1) = \\ = (q-t)^2+(q-t)+1$$

volna, ellentmondásban a Moore-korláttal (1.2. tétel). ∎

A tétel szerint tehát adott fokszám mellett az 5., Baer-részsíkos konstrukcióból kapottnál kisebb gráfot nem nyerhetünk projektív sík részgráfjaként (legalábbis aránylag kis t-re); ilyen értelemben ez a konstrukció optimális. $PG(2,q)$-ban [5] alapján többet is mondhatunk.

2.4. Tétel. (Blokhuis-Storme-Szőnyi) *$PG(2,q)$-ban $t < \frac{\sqrt[4]{q}}{2}$ esetén t-szeresen lefogó ponthalmaznak legalább $t\left(q+\sqrt{q}+1\right)$ pontja van, és egyenlőség esetén a ponthalmaz t darab diszjunkt Baer-részsík uniója.*

2.5. Következmény. *Ha $t < \frac{\sqrt[4]{q}}{2}$ és $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ t-jó rendszer $PG(2,q)$-ban, továbbá $|\mathcal{P}_0| = t\left(q+\sqrt{q}+1\right)$, akkor $\mathcal{P}_0$ t darab diszjunkt Baer-részsík pontjaiból áll, $\mathcal{L}_0$ pedig az ezekhez tartozó egyenesekből.*

BIZONYÍTÁS. A 2.3. tételben pontosan akkor áll egyenlőség, ha $n_i^0 \neq 0 \iff i = \sqrt{q}+t$, azaz minden $l \in \mathcal{L}_0$ egyenes $\sqrt{q}+t$ pontban metszi $\mathcal{P}_0$-t. $\mathcal{L}_1$ egyenesei a t-jóság miatt t pontban metszik $\mathcal{P}_0$-t, tehát $\mathcal{P}_0$ t-szeresen lefogó ponthalmaz, amire alkalmazható a 2.4. tétel. ∎

Továbbra is kérdés viszont, hogy mi történik akkor, ha q nem négyzetszám. A t-jó struktúrák alábbi vizsgálata részleges eredményekkel szolgál.

2.3. A t-jó struktúrák vizsgálata

2.6. Állítás. *Minden t-jó struktúra esetén $|\mathcal{P}_0| \geq tq - t(t-1)$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $t = \sqrt{q}$, $\mathcal{P}_0$ egy maximális $\sqrt{q}$-ív pontjaiból, $\mathcal{L}_0$ pedig az ív kitérő egyeneseiből áll.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $P \in \mathcal{P}_1$ tetszőleges. P-n át megy $q+1-t$ darab bennmaradó egyenes, melyeken egyenként van t darab kidobott pont, tehát $|\mathcal{P}_0| \geq (q+1-t)t = tq - t(t-1)$.

Ha egy t-jó struktúrára $|\mathcal{P}_0| = tq - t(t-1)$, akkor a bizonyításból látható, hogy $\mathcal{P}_0$ minden egyenest pontosan 0 vagy t pontban metsz, azaz $\mathcal{P}_0$ maxmális t-ív (és persze $\mathcal{L}_0$ az ív kitérő egyenesei). Másfelől egy $P \in \mathcal{P}_0$ ponton áthaladó egyenesek szerint számlálva $\mathcal{P}_0$ pontjait (ezek az egyenesek mind pontosan t pontban kell messék $\mathcal{P}_0$-t), a maximális ívekre ismert $|\mathcal{P}_0| = 1 + (q+1)(t-1) = tq - q + t$ egyenlőséghez jutunk. A kettőt összevetve $q - t = t(t-1)$, végeredményben $t = \sqrt{q}$ adódik. ∎

2.7. Állítás. *Ha $t < \sqrt{q}$, akkor minden t-jó rendszerben $\mathcal{P}_0$ lefogó ponthalmaz, $\mathcal{L}_0$ pedig fedő egyeneshalmaz. Ha $t \geq 2$ és $|\mathcal{P}_0| \geq tq + 2$, akkor $\mathcal{P}_0$ kétszeresen lefogó, $\mathcal{L}_0$ pedig kétszeresen fedő halmaz.*

BIZONYÍTÁS. A dualitás elve miatt elegendő csak $\mathcal{P}_0$ állított tulajdonságait igazolni. Tegyük fel, hogy van olyan l egyenes, melyet $\mathcal{P}_0$ nem fog le. Ekkor persze $l \in \mathcal{L}_0$. l minden pontja $\mathcal{P}_1$-ben van, így minden pontján át van pontosan $t-1$ l-től különböző kidobott egyenes, következésképpen $|\mathcal{L}_0| = 1 + (q+1)(t-1)$. Másrészt 2.6. állítás szerint $|\mathcal{P}_0| \geq tq - t(t-1) = t(q+1) - t^2$. Ebből $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0|$ miatt $(t-1)(q+1)+1 \geq t(q+1) - t^2$ adódik, azaz $t^2+1 \geq q+1$, ami ellentmond $t < \sqrt{q}$-nak.

Most tegyük fel, hogy $t \geq 2$, és $\mathcal{P}_0$ nem kétszeresen lefogó. Ekkor van olyan $l \in \mathcal{L}_0$, melyen $k = 0$ vagy 1 kidobott pont van. l többi pontján át pontosan $t-1$ darab l-től különböző kidobott egyenes megy, így $|\mathcal{L}_0| \leq 1 + kq + (q+1-k)(t-1) = (t-1+k)q + (1-k)(t-1) + 1 \leq tq + 1$ (mivel $t \leq q+1$). ∎

Megjegyzés. Az állítás első felének bizonyításánál a $t = \sqrt{q}$ esetben is ellentmondásra jutunk, ha van olyan kidobott egyenes, mely metszi $\mathcal{P}_0$-t, hiszen akkor egy bennmaradó pontból számolva $|\mathcal{P}_0| \geq (q+1-t)t+1$-et kapunk. Előfordulhat azonban, hogy $\mathcal{P}_0$ minden l egyenest 0 vagy $\sqrt{q}$ pontban metsz aszerint, hogy $l \in \mathcal{L}_0$ vagy $l \in \mathcal{L}_1$. Ekkor $\mathcal{P}_0$ egy maximális $\sqrt{q}$-ív; erre láttunk példát a 7. konstrukcióban.

Ha a projektív sík $PG(2,q)$, [3] alapján csak páros q esetén létezik maximális ív, tehát páratlan q-ra ez nem fordulhat elő.

2.8. Következmény. *$t < \sqrt{q}$ esetén $|\mathcal{P}_0| \geq tq - t(t-1) + t$. Sőt, ez $t = \sqrt{q}$ esetén is fennáll, kivéve, ha $\mathcal{P}_0$ maximális $\sqrt{q}$-ív. Páratlan q esetén $PG(2,q)$-ban $t = \sqrt{q}$-ra is mindig igaz a becslés.*

BIZONYÍTÁS. Ha $t < \sqrt{q}$, legyen $P \in \mathcal{P}_1$ egy tetszőleges bennmaradt pont. P-n át van t darab kidobott, és $q+1-t$ darab bennmaradt egyenes. A bennmaradt egyeneseken $\mathcal{P}_0$-nak t, a kidobottakon legalább 1 pontja van (mert mint láttuk, $\mathcal{P}_0$ lefogó), így $|\mathcal{P}_0| \geq (q+1-t)t + t = tq - t(t-1) + t$. A $t = \sqrt{q}$ esetet az előző megjegyzésben tárgyaltuk. ∎

$\mathcal{P}_0$ pontjait tetszőleges $P \in \mathcal{P}_1$ pontból számolhatjuk, ezért minden $P \in \mathcal{P}_1$-ből $|\mathcal{P}_0| - (tq - t(t-1))$ darab kidobott pontot látunk a P-n áthaladó kidobott egyeneseken. Jelölje ezt a számot $c(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$, vagy rögzített t-jó struktúra esetén a rövidség kedvéért c. A következmény azt mondja tehát, hogy $t < \sqrt{q}$ esetén $c \geq t$.

2.9. Tétel. *Ha $t \leq \sqrt{q}$, $c = t$ esetén $t = 1$, $c = t+1$ esetén $t \leq 2$.*

BIZONYÍTÁS. A $c = t$ esetben $\mathcal{P}_0$ minden $\mathcal{L}_0$-beli (kidobott) szelője érintő vagy $q+1$-szelő (azaz a teljes egyenes $\mathcal{P}_0$-ban halad), ugyanis a tetszőleges $P \in \mathcal{P}_1$ bennmaradt ponton áthaladó t darab kidobott egyenes mindegyike $\mathcal{P}_0$ érintője, mert mindegyiken van legalább egy kidobott pont, mivel $\mathcal{P}_0$ lefogó (2.7. állítás miatt, mivel $\mathcal{P}_0$ nem maxmális ív $c = t$ esetén); de pontosan egy kell legyen mindegyiken, hiszen összesen $c = t$ pontot számolunk ezen a t kidobott egyenesen. $\mathcal{P}_0$-ban nem lehet kettő teljes egyenes, mert ekkor $t \geq 2$ volna, és a két teljes egyenes a P ponton áthaladó kidobott egyeneseket legfeljebb egy kivétellel kettő pontban metszenék, ami nem lehetséges. Megmutatjuk, hogy $t \geq 2$ esetén volna legalább kettő teljes egyenes $\mathcal{P}_0$-ban. Kettős leszámlálással kapható, hogy

$$|\mathcal{P}_1|\, t = |\{(P, l) : P \in \mathcal{P}_1,\, l \in \mathcal{L}_0,\, l \text{ 1-szelő}\}| = n_1^0 q.$$

Felhasználva, hogy $|\mathcal{P}_1| = q^2 + q + 1 - |\mathcal{P}_0| = q^2 + q + 1 - (tq - t(t-1) + t)$,

$$n_1^0 = \frac{t\left(q^2 + q + 1 - (tq - t(t-1) + t)\right)}{q} = tq - t(t-1) + \frac{t\,(t-1)^2}{q}.$$

$$tq - t(t-1) + t = |\mathcal{L}_0| = n_1^0 + n_{q+1}^0 = tq - t(t-1) + \frac{t\,(t-1)^2}{q} + n_{q+1}^0,$$

tehát $n_{q+1}^0 = t - \frac{t(t-1)^2}{q}$, másrészt $2 \leq t \leq \sqrt{q}$, következésképp $t(t-1) < q$ és $\frac{t(t-1)^2}{q} < t - 1$, végre is $n_{q+1}^0 > 1$.

A $c = t+1$ eset vizsgálatához tegyük fel, hogy $t \geq 2$. Minden bennmaradt ponton át halad $\mathcal{P}_0$-nak $(t-1)$ darab érintője és egy 2-szelője $\mathcal{L}_0$-ból, így megintcsak kettős leszámlálással

$$|\mathcal{P}_1|\,(t-1) = |\{(P, l) : P \in \mathcal{P}_1,\, l \in \mathcal{L}_0,\, l \text{ 1-szelő}\}| = n_1^0 q, \quad \text{és}$$

$$|\mathcal{P}_1| = |\{(P, l) : P \in \mathcal{P}_1,\, l \in \mathcal{L}_0,\, l \text{ 2-szelő}\}| = n_2^0 (q-1)$$

nyerhető, amiből a $d = (t-1, q)$ jelöléssel $\frac{q(q-1)}{d} \mid |\mathcal{P}_1|$ adódik, átfogalmazva $|\mathcal{P}_1| = \frac{k}{d} q\,(q-1)\,,\ k \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Ha $k = d$, $|\mathcal{P}_0| = q^2 + q + 1 - (q^2 - q) = 2q + 1$, ami csak $t = 2$ esetén fordulhat elő. Ha $k \leq d - 1$, akkor a 2.3. tétel felhasználásával

$$q^2 + q + 1 - t(q + \sqrt{q} + 1) \leq |\mathcal{P}_1| \leq \frac{d-1}{d} q\,(q-1) = q^2 - q - \frac{q\,(q-1)}{d},$$

vagyis $\frac{q(q-1)}{d} \leq t(q + \sqrt{q} + 1) - 2q - 1$. Szélső esetben $t = \sqrt{q}$, $d = \sqrt{q} - 1$, azonban $q(\sqrt{q} + 1) \leq \sqrt{q}(q + \sqrt{q} + 1) - 2q - 1 \iff q \leq -q + \sqrt{q} - 1$ ilyenkor sem teljesülhet. ■

2.10. Következmény. *Ha* $3 \leq t < \sqrt{q}$*, akkor* $|\mathcal{P}_0| \geq tq - t(t-1) + t + 2$.

Megjegyzés. Az előző állításban láttuk, hogy $t \leq \sqrt{q}$ és $c = t$ esetén csak $t = 1$ lehetséges; $t = \sqrt{q} + 1$ esetén azonban előfordulhat $c(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0) = t$. Erre szolgáltat példát a 8., unitálos konstrukció. Ott $t = \sqrt{q} + 1$, és $|\mathcal{P}_0| = q\sqrt{q} + 1 = = \left(\sqrt{q} + 1\right) q - \left(\sqrt{q} + 1\right) \sqrt{q} + \sqrt{q} + 1 = tq - t(t-1) + t$.

2.11. Tétel. *Tetszőleges projektív síkon minden 1-jó* $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ *pár az 1., 2., 5. konstrukciók valamelyike, és legutóbbi csak akkor lehet, ha a sík rendje négyzetszám.*

BIZONYÍTÁS. Mivel $\mathcal{L}_1$-beli egyenesekről csak egy pontot hagyhattunk el, a $\mathcal{P}_0$ két pontját összekötő egyenesek $\mathcal{L}_0$-ban vannak, és duálisan, bármely két $\mathcal{L}_0$-beli egyenes metszéspontja $\mathcal{P}_0$-ban van. Ha $\mathcal{P}_0$-ban nincs 3 általános helyzetű pont, akkor $\mathcal{P}_0$ része egy l egyenesnek. Ekkor $\mathcal{L}_0$-ban sem lehet három általános helyzetű egyenes, hiszen metszéspontjaik három általános helyzetű kidobott pontot adnának. Tehát $\forall e \in \mathcal{L}_0$ l-nek egy P pontján megy át. P-ről viszont minden egyenest ki kellett dobnunk, hiszen a bennmaradt, l-en kívüli pontokat egyrétűen kell fedniük a kidobott egyeneseknek. Hasonlóan látható, hogy l minden pontját kidobtuk, tehát ez az 1. konstrukció $t = 1$-re.

Ha van $\mathcal{P}_0$-ban három általános helyzetű pont, akkor az

$$\mathcal{L}_0^* = \{l \in \mathcal{L}_0 : |l \cap \mathcal{P}_0| \geq 2\}$$

jelölés mellett $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0^*)$ lineáris teret alkot. Az Erdős-De-Bruijn tétel alapján $|\mathcal{L}_0| \geq |\mathcal{L}_0^*| \geq |\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0|$, így mindenhol egyenlőség áll fenn, vagyis $\mathcal{L}_0^* = \mathcal{L}_0$, és így $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ - esetleg degenerált - projektív sík és lefogó, ilyenformán vagy a 2. konstrukció, vagy egy Baer-részsík, azaz az 5. konstrukció. ■

2.12. Tétel. $PG(2,q)$*-ban minden 2-jó struktúra az ismertetett 1. konstrukció (ami egybeesik a 2. konstrukcióval), ha* q *nem négyzet. Ha* $q > 256$ *négyzet, ezen kívül csak két diszjunkt Baer-részsík uniója lehet (v.ö. 5. konstrukció).*

BIZONYÍTÁS. A 2.9. állítás értelmében $|\mathcal{P}_0| \geq 2q+1$. Ha egyenlőség áll fenn, a bizonyításból $n_1^0 = q-1$, $n_2^0 = q$, és ezekől $n_{q+1}^0 = 2$ olvasható ki. A két teljes egyenes éppen $2q+1$ pontot fed le, tehát $\mathcal{P}_0$ pontjai pontosan ezeknek az egyeneseknek a pontjai. $\mathcal{P}_0$ $\mathcal{L}_0$-beli érintői át kell menjenek a két teljes kidobott egyenes metszéspontján, így a metszéspontot teljesen fedik a kidobott 1-, illetve $q+1$-szelők. Ennélfogva a 2-szelők metszéspontján át legalább 3 kidobott egyenes halad, így $\mathcal{P}_0$-ban metszik egymást, ergo ez az 1. konstrukció.

Ha $|\mathcal{P}_0| \geq 2q+2$, a 2.7. állítás szerint $\mathcal{P}_0$ kétszeresen lefogó ponthalmaz, és ezért [2] alapján legalább, másrészt a 2.3. tétel szerint legfeljebb $2(q+\sqrt{q}+1)$ pontja van, ami pedig az 2.5. következmény értelmében $q > 256$ esetén csak két diszjunkt Baer-részsík esetén lehetséges. ■

Megjegyzés. A $q > 256$ feltételt csak $\mathcal{P}_0$ struktúrájának meghatározásához használtuk, méretéhez nem. Általában tetszőleges projektív sík 2-lefogó halmazának mérete legalább $2q+\sqrt{2q}+2$, amiből 2-jó struktúrákra $|\mathcal{P}_0| \geq 2q+2 \Rightarrow |\mathcal{P}_0| \geq 2q+\sqrt{2q}+2$ adódik.

2.4. Nemlétezési tételek

A $c(k,6) \geq c_0(k,6) = 2(k^2-k+1)$ Moore-korlát pontosan akkor éles, ha van $k-1$ rendű projektív sík. Mint említettük, ezidáig csak prímhatvány q-ra ismert q rendű projektív sík, és nem tisztázott, hogy általában más esetben mi az igazság. Vannak azonban nemlétezési tételek, melyekkel tehát bizonyos esetekben javítható a becslés. Az első ilyen tétel projektív síkok, és általánosabban, négyzetes $2-(v,k,\lambda)$ blokkrendszerek létezését köti feltételhez.

2.13. Definíció. *Egy $(\mathcal{P},\mathcal{B})$ illeszkedési struktúra négyzetes (vagy szimmetrikus) $2-(v,k,\lambda)$ blokkrendszer, ha*

1. $|\mathcal{P}| = |\mathcal{B}| = v$,
2. *bármely $B \in \mathcal{B}$ blokkra k pont illeszkedik,*

3. *bármely két különböző pont pontosan λ darab blokkban szerepel,*
4. *bármely két különböző blokk közös pontjainak száma λ.*

2.14. Tétel. (Bruck-Ryser-Chowla) *Ha van négyzetes $2-(v,k,\lambda)$ blokkrendszer, akkor*

- *ha $2 \mid v$, akkor $n = k - \lambda$ négyzetszám;*
- *ha $2 \nmid v$, akkor a $Z^2 = nX^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda Y^2$ egyenletnek van nemtriviális egész megoldása.*

A q-adrendű projektív síkok és a négyzetes $2-(q^2+q+1, q+1, 1)$ blokkrendszerek egybeesnek, így a Bruck-Ryser-Chowla tétel alkalmazható projektív síkokra, és a következő feltételhez vezet:

2.15. Tétel. *Ha $q \equiv 1, 2 \pmod 4$ és létezik q-adrendű projektív sík, akkor $q = a^2 + b^2$ megoldható az egész számok körében.*

Ez kizárja például hatodrendű projektív sík létezését, ezért $c(7,6) \neq c_0(7,6) = 86$, tehát $c(7,6) \geq 88$ (a csúcsszám mindenképpen páros, hiszen a fokszám páratlan). További finomításra ad lehetőséget az alábbi két tétel [4].

2.16. Definíció. *Egy n csúcsú G (k,g)-gráf* többlete $e_G = n - c_0(k,g)$.

2.17. Tétel. (Biggs-Ito, 1980) *Tegyük fel, hogy G egy (k,g)-gráf, $g = 2r \geq 6$ és $e_G \leq k-2$. Ekkor G páros, és átmérője $r+1$.*

2.18. Tétel. (Biggs-Ito, 1980) *Tegyük fel, hogy G egy $(k,6)$-gráf, melyre $e_G = 2$. Ekkor $k \not\equiv 5, 7 \pmod 8$, és létezik szimmetrikus $2-\left(\frac{k^2-k+2}{2}, k, 2\right)$ blokkrendszer (ún. bisík).*

BIZONYÍTÁS. A 2.17. tétel szerint G páros gráf. Legyen G két csúcsosztálya $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$, melyekre $e_G = 2$ miatt $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = k^2 - k + 2$. G-re tekinthetünk úgy, mint egy $\mathcal{P}$ ponthalmazú és $\mathcal{L}$ egyeneshalmazú parciális lineáris tér illeszkedési gráfjára; tekintsük hát a G-ből származó parciális lineáris teret, melyben minden egyenesre k pont illeszkedik, és minden ponton át k egyenes halad. Tetszőleges $P \in \mathcal{P}$ pont esetén a vele kollineáris Q pontok száma (P-t is beleértve) $1 + k(k-1) = k^2 - k + 1$, azaz $\forall P \in \mathcal{P}\ \exists! P^* \in \mathcal{P}$, melyre $PP^* \notin \mathcal{L}$; ugyanez elmondható duálisan egyenesekre. Nyilván $(P^*)^* = P$. Készítsünk egy új $\mathcal{S}$ struktúrát, melynek pontjai és blokkjai rendre a $\widehat{P} = \{P, P^*\}, \widehat{l} = \{l, l^*\}$ rendezetlen pont-, illetve egyenespárok, és $\widehat{P}\, \mathcal{I}_\mathcal{S}\, \widehat{l}$ definíció szerint pontosan akkor, ha G-ben P, P^*, l, l^* két élet feszít (többet nem tud, * definíciója miatt). Ha $P\, \mathcal{I}\, l$, akkor a P^*-ra illeszkedő k darab egyenes l-et egymástól és P-től különböző pontokban kell messék, tehát csak $k-1$ metszheti közülük l-et; magyarán $P^*\, \mathcal{I}\, l^*$. Emiatt egyrészt $\widehat{P}$ foka k, másrészt $(PQ)^* = P^*Q^*$ és ebből $(P^*Q)^* = PQ^*$; így a $\widehat{P}, \widehat{Q}$ $\mathcal{S}$-beli pontokat tartalmazó blokkok $\widehat{PQ}$ és $\widehat{P^*Q}$. Ugyanez duálisan is elmondható, tehát $\mathcal{S}$ valóban egy szimmetrikus $2 - \left(\frac{k^2-k+2}{2}, k, 2\right)$ blokkrendszer.

Rögzítsük tetszőleges módon, hogy egy P, P^*, illetve egy l, l^* pár mely elemét jelöljük *-gal. Mondjuk azt, hogy $\widehat{P}\, \mathcal{I}_\mathcal{S}\, \widehat{l}$ él keresztező, ha $P\, \mathcal{I}\, l^*$ és $P^*\, \mathcal{I}\, l$. Ha egy négy hosszúságú $\widehat{P}, \widehat{l}, \widehat{Q}, \widehat{e}$ kör $\mathcal{S}$-ben páros sok keresztező élet tartalmazna, akkor G-ben a megfelelő élek két négy hosszúságú kört alkotnának, ami nem lehet, hiszen G hat bőségű. (A $P\, \mathcal{I}\, l^?\, \mathcal{I}\, Q^?\, \mathcal{I}\, e^?\, \mathcal{I}\, P^?$ sorozatba a kérdőjelek helyére kell *-ot vagy semmit írni úgy, hogy a * – semmi váltások, azaz a keresztező élek száma páros legyen. Ehhez minden * után valamikor kell jönnie egy semminek is, tehát a végén P áll, azaz zárul a kör.) Jelölje x a keresztező élek számát, C_i az i keresztező élet tartalmazó körök számát $\mathcal{S}$-ben ($i = 1, 3$). Bármely két $\widehat{P} \neq \widehat{Q}$ ponton át pontosan egy négy hosszú kör halad $\mathcal{S}$-ben, így $v = \frac{k^2-k+2}{2}$-vel $C_1 + C_3 = \frac{v(v-1)}{2}$. Egy blokk két pontját pontosan egy további blokk tartalmazza, ezért egy $\widehat{P}\, \mathcal{I}_\mathcal{S}\, \widehat{l}$ élen át $k-1$ négy hosszúságú kör halad, amiből kettős leszámlálással $C_1 + 3C_3 = (k-1)x$. E kettőből $2C_3 = (k-1)x - \frac{v(v-1)}{2}$ adódik, ami $k \equiv 5, 7 \pmod 8$ esetén ellentmondás, hiszen a jobb oldal páratlan. ■

Megjegyzés. Ha $k \equiv 7 \pmod 8$, akkor kettő hiányú $(k, 6)$-gráf létezését pusztán a bisík alapján cáfolhatjuk: ekkor $\frac{k^2-k+2}{2}$ páros, és a Bruck-Ryser-Chowla tétel szerint $k-2$ négyzetszám, azonban ez $k-2 \equiv 5 \pmod 8$ miatt lehetetlen. A $k \equiv 5 \pmod 8$ eset így nem zárható ki, hiszen $k=5$ és $k=13$ esetén is létezik bisík. Egy sejtés szerint csak véges sok bisík van (jelenleg $k = 3, 4, 5, 6, 9, 11, 13$-ra ismert példa, $k \leq 13$ esetén máskor nem is lehet), ami tovább növelné a tétel erejét. A tétel jelzi azt is, hogy a (k, g)-gráfok csúcsszámsorozata lehet lukas: például $c(5, 6) = c_0(5, 6) = 42$, hiszen van negyedrendű projektív sík, de a tétel szerint nincs $(5, 6)$-gráf 44 ponton.

A $(7, 6)$ esetre alkalmazva a tételt, $c(7, 6) \neq 88$ adódik, tehát $c(7, 6) \geq 90$; ennyi ponton azonban van egy Bakertől származó konstrukció, vagyis $c(7, 6) = 90$. A hetedrendű projektív sík hét-reguláris részgráfjaként kapható legjobb konstrukció 96 pontú, ezért ez a konstrukció nem ágyazható be hetedrendű projektív sík illeszkedési gráfjába; valószínűleg nagyobba se.

3. Egy öt bőségű konstrukció

Az eddigiek után talán kicsit meglepően most egy öt bőségű gráf konstrukciója következik a projektív sík felhasználásával. Az ötlet Jason Willifordtól származik (forrás: [10]). Vegyük a $PG(2, q)$ projektív síkot, ahol q páratlan (és a szakaszban mindig prímhatvány), és egy Φ polaritást, azaz olyan illeszkedéstartó $\mathcal{P} \longleftrightarrow \mathcal{L}$ leképezést, melyre Φ^2 az identitás. A sík illeszkedési gráfjának két csúcsosztályát azonosíthatjuk Φ szerint. Az így kapott gráfot hívják a sík Φ szerinti *polaritás-gráfjának*. Másképpen szólva a polaritás-gráf ponthalmaza $\mathcal{P}$, és $x \neq y \in \mathcal{P}$ pontosan akkor szomszédosak (jelölésben $x \sim y$), ha $x \,\mathcal{I}\, \Phi(y) \Leftrightarrow \Phi(x) \,\mathcal{I}\, y$. A sík polaritás-gráfja C_4-mentes $\big($hiszen $x \sim u$, $x \sim v$, $y \sim u$, $x \sim v$ esetén az x, y pontokat $\Phi(u)$ és $\Phi(v)$ is összekötné$\big)$, azonban se nem reguláris, se nem öt bőségű, mivel az $x = \Phi(x)$, ún. *autokonjugált* pontok foka q, a többié $q + 1$, és bőven akadnak benne háromszögek. Az előzőekben tárgyaltakhoz hasonlóan most is egy alkalmas részgráfot keresünk, amely már reguláris és C_3-mentes lesz.

Ismert, hogy $PG(2,q)$ polaritásának $q+1$ vagy $q\sqrt{q}+1$ autokonjugált pontja van, melyek rendre oválist vagy unitált alkotnak. Ha a polaritás autokonjugált pontjai oválist határoznak meg, a belső pontok és polárisaik (az elkerülő egyenesek), illetve a külső pontok és polárisaik (a szelők) a 6. a) és 6. b) konstrukciók tanúsága szerint reguláris gráfot alkotnak. A fokok a polaritás szerinti azonosítás után is megmaradnak, hiszen egyikben sincs autokonjugált (azaz oválisra eső) pont; ráadásul, amint azt kiszámoljuk, a két konstrukció közül az egyik az azonosítás után nem tartalmaz háromszöget, tehát öt bőségű, reguláris gráfot ad.

$PG(2,q)$-t a szokásos módon $V = GF(q)^3$-ben tekintjük, tehát pontjai és egyenesei V egy, illetve két dimenziós lineáris alterei. Az egyeneseket egy irányvektoruk, a síkokat egy normálvektoruk reprezentálja homogén koordinátákkal. Az egyeneseket reprezentáló számhármasokat kerek, a síkokat reprezentálóakat szögletes zárójelbe írjuk. Ennek megfelelően $(a,b,c) \in [x,y,z] \iff ax+by+cz=0$. A számolás megkönnyítése végett kimondunk egy lemmát.

3.1. Lemma. *Legyen q páratlan prímhatvány, $\mathcal{O}$ egy ovális $PG(2,q)$-ban. Ekkor $\mathcal{O}$ stabilizátora $PGL(3,q)$-ban tranzitív $\mathcal{O}$ külső pontjain.*

BIZONYÍTÁS. Segre tétele, hogy $PG(2,q)$-ban minden ovális projektív ekvivalens, ezért feltehető, hogy $\mathcal{O} = \{(x,x^2,1) \mid x \in GF(q)\} \cup \{(0,1,0)\}$ az ovális. Elég megmutatni, hogy tetszőleges P külső pont elvihető $(1,0,0)$-ba. Legyen e és f a két érintő $\mathcal{O}$-hoz P-n át, az érintési pontok legyenek R és Q, és legyen T egy további pont az oválisról. Mivel $PGL(3,q)$ tranzitív az általános helyzetű pontnégyeseken, alkalmas $\mathcal{A}$ transzformációval elérhető, hogy $P' = \mathcal{A}(P) = (1,0,0)$, $R' = \mathcal{A}(R) = (0,1,0)$, $Q' = \mathcal{A}(Q) = (0,0,1)$ és $T' = \mathcal{A}(T) = (1,1,1)$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{O}' = \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Ismét Segre tételére hivatkozva $\mathcal{O}'$ pontjai egy alkalmas $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz=0$ egyenlet (x,y,z) megoldásai. $(0,1,0) \in \mathcal{O}'$ és $(0,0,1) \in \mathcal{O}'$ miatt $b=c=0$, de $(1,0,0) \notin \mathcal{O}'$ miatt $a \neq 0$. Feltehető tehát, hogy $a=1$, így az egyenlet $x^2+dxy+exz+fyz=0$ alakú (ahol d,e és f alkalmasint nem ugyanazokat a számokat jelölik, mint korábban). A $P'R' = [0,0,1]$ egyenes érinti $\mathcal{O}'$-t, ezért az $(s,1,0)$, $s \in GF(q)$ alakú pontok

($P'R'$ pontjai) közül csak $(0,1,0)$ van $\mathcal{O}'$-n, azaz $s^2+ds = s(s+d) = 0 \Leftrightarrow s = 0$, tehát $d = 0$. Hasonlóan, mivel a $P'Q' = [0,1,0]$ egyenes is érinti $\mathcal{O}'$-t, $e = 0$, így az egyenlet $x^2 + fyz = 0$ alakú. Ugyanakkor $T' = (1,1,1) \in \mathcal{O}'$ miatt $f = -1$ kell legyen, azaz $\mathcal{O}' = \{(x,y,z)\colon x^2 - yz = 0\} = \{(x,x^2,1) : x \in GF(q)\} \cup \{(0,1,0)\} = \mathcal{O}$. ∎

3.2. Következmény. *$\mathcal{O}$ stabilizátora $PGL(3,q)$-ban tranzitív $\mathcal{O}$ szelőin.*

BIZONYÍTÁS. Legyen e_1 szelő, és legyen e_2 az előírt képe. Ha $e_i \cap \mathcal{O} = \{P_i, Q_i\}$, és a P_i-n, illetve Q_i-n áthaladó egyértelmű érintők k_i és l_i $(i = 1,2)$, akkor alkalmas $\mathcal{O}$-t stabilizáló automorfizmussal vigyük a $k_1 \cap l_1$ külső pontot (e_1 polárisát) a $k_2 \cap l_2$ külső pontba (e_2 polárisa). Mivel kollineáció érintőt érintőbe, érintési pontot érintési pontba visz, e_1 képe e_2 lesz. ∎

3.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{O}$ ovális $PG(2,q)$-ban, Φ pedig a hozzá tartozó polaritás. A polaritás-gráfban a külső pontok által feszített részgráf pontosan akkor háromszögmentes, ha $q \equiv 3 \pmod 4$, a belső pontok által feszített részgráf pedig pontosan akkor háromszögmentes, ha $q \equiv 1 \pmod 4$.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során a $\square$ jel négyzetelemet jelöl $PG(2,q)$-ban, azaz olyan nemnulla elemet, mely előáll valaminek a négyzeteként, $\triangle$ pedig nemnégyzet-elemet. Feltehető, hogy $\mathcal{O} = \{(x,x^2,1) \mid x \in GF(q)\} \cup \{(0,1,0)\}$ az ovális. Az $\mathcal{O}$-t megadó polaritást a $\Phi\left((x,y,z)\right) = (x,y,z)\,A$ egyenlet írja le, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek megfelelően egy (x,y,z) pont poláris egyenese a $[2x,-z,-y]$ egyenes, $\mathcal{O}$ érintői így az ideális egyenes ($[0,0,1]$) és a $[2x,-1,-x^2]$ alakú egyenesek. Egy $(a,b,c) \notin \mathcal{O}$ pont pontosan akkor külső pont, ha rajta van egy érintőn. Feltehető, hogy a keresett érintő nem az ideális egyenes, hiszen minden külső pontra pontosan kettő érintő illeszkedik, azaz a $2ax - b - cx^2 = 0$ egyenlet megoldhatósága a kérdés. A megoldhatóság azzal ekvivalens, hogy $a^2 - bc = \square$. Ennek fényében egy $(a, b, c) \notin \mathcal{O}$ pont pontosan akkor belső pont, ha $a^2 - bc = \triangle$.

A P, Q és R pontok pontosan akkor alkotnak háromszöget a polaritás-gráfban, ha $P = \Phi(Q) \cap \Phi(R),\ Q = \Phi(R) \cap \Phi(P),\ R = \Phi(P) \cap \Phi(Q)$. Magyarán akkor van háromszög külső (avagy belső) pontokból, ha vannak olyan P és $R \in \Phi(P)$ külső (avagy belső) pontok, melyekre $Q = \Phi(P) \cap \Phi(R)$ is külső (avagy belső) pont.

Vizsgáljuk először a külső pontok esetét. Feltehető, hogy $P = (1, 0, 0)$. Ekkor $\Phi(P) = [1, 0, 0]$ (a függőleges egyenes). Ezen a külső pontok a $(0, x, 1)$ alakúak, ahol $-x = \square$. Legyen $R = (0, r, 1)$ egy külső pont, vagyis $-r = \square$. $\Phi(R) = [0, -1, -r]$, $Q = \Phi(R) \cap \Phi(P) = [1, 0, 0] \cap [0, -1, -r] = (0, -r, 1)$. Q pontosan akkor külső pont, ha $r = \square$, ez viszont $-r = \square$ miatt akkor és csak akkor tejesülhet, ha $-1 = \square$, azaz $q \equiv 1 \pmod 4$.

Vizsgáljuk most háromszögek létezését a belső pontok körében. Feltehető, hogy $P = (0, p, 1)$, ahol $-p = \triangle$. Ekkor $\Phi(P) = [0, -1, -p]$, melynek pontjai az $(x, -p, 1)$ alakúak és az $(1, 0, 0)$. Ezekből belső pontok az $(x, -p, 1),\ x^2 + p = \triangle$ alakú pontok. Legyen $R = (r, -p, 1)$ egy belső pont, ami annyit tesz, hogy $r^2 + p = \triangle$. $Q = \Phi(P) \cap \Phi(R) = [0, -1, -p] \cap [2r, -1, p] = [p, rp, -r]$. Q pontosan akkor belső pont, ha $p^2 + r^2 p = p(r^2 + p) = \triangle$, viszont $(r^2 + p) = \triangle$, tehát Q pontosan akkor belső pont, ha $p = \square$. Másrészt $-p = \triangle$, ilyenformán ez akkor és csak akkor teljesül, ha $-1 = \triangle$, azaz $q \equiv 3 \pmod 4$. ■

3.4. Következmény. *Ha $q \equiv -1 \pmod 4$, akkor létezik $\left(\binom{q-1}{2}, 5\right)$-gráf $\frac{q(q+1)}{2}$ ponton, ha $q \equiv 1 \pmod 4$, akkor létezik $\left(\binom{q+1}{2}, 5\right)$-gráf $\frac{q(q-1)}{2}$ ponton.*

3.5. Tétel. *Ha $q \equiv 3 \pmod 4$, akkor létezik $\left(\binom{q-3}{2}, 5\right)$-gráf $\frac{q(q-1)}{2}$ ponton.*

BIZONYÍTÁS. Vegyük $PG(2, q)$ egy Φ polaritás által meghatározott $\mathcal{O}$ oválisát, legyen $P \in \mathcal{O}$, e pedig $\mathcal{O}$ érintője P-ben. Legyen $\mathcal{L}_0$ a P-n áthaladó, e-től különböző egyenesek halmaza, $\mathcal{P}_0$ pedig e P-től különböző pontjainak halmaza. $\mathcal{L}_0$

egyenesei $\mathcal{O}$ szelői, $\mathcal{P}_0$ elemei pedig $\mathcal{O}$ külső pontjai. Mivel $\Phi(e) = P$, minden $Q \in e \setminus \{P\}$ pontra $\Phi(Q)$ P-n áthaladó szelő, és ezért Φ bijekció $\mathcal{P}_0$ és $\mathcal{L}_0$ között. Minden $l \notin \mathcal{L}_0$ szelő egy P-től eltérő pontban metszi e-t, és minden $Q \notin \mathcal{P}_0$ külső pont illeszkedik pontosan egy P-n áthaladó szelőre. Ezek szerint a polaritás-gráfban $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ minden pontjának pontosan egy szomszédja esik $\mathcal{P}_0$-ba, tehát a $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ által feszített részgráf $\frac{q-1}{2} - 1 = \frac{q-3}{2}$ fokú, és $\frac{q(q+1)}{2} - q = \frac{q(q-1)}{2}$ pontja van. ∎

4. Konstrukciók általánosított n-szögekből

Mint azt korábban említettük, a projektív sík és az általánosított háromszög fogalma ugyanaz. Ebből kiindulva néhány konstrukciót általánosított n-szögben is megfogalmazunk. Vegyük észre, hogy a projektív síkoknál látott 1. konstrukció $t = 1$ esetén – az 1.2. Moore-korlát jelöléseivel élve – megjelenik, ha kitöröljük a gráf közepét alkotó csúcsokat, azaz csak az U_{n-1} és a V_{n-1} által feszített gráfot tekintve. Ez tetszőleges Moore-gráf esetén kivitelezhető. Legyen most $n \geq 4$ páros, és vegyünk egy olyan általánosított n-szöget, melyben minden pontra $q+1$ egyenes, illetve minden egyenesre $q+1$ pont illeszkedik (sajnos ekkor $n = 4, 6$). Legyen P tetszőleges pont, e tetszőleges egyenes. Az illeszkedési gráfot szem előtt tartva vezessük be a $\Gamma(x) = \{y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \colon d(x, y) = 1\}$ jelölést $(x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L})$. A korábbi elnevezéseket, jelöléseket átvéve legyen

$$\mathcal{P}_0^P = \{Q \in \mathcal{P} \colon d(P, Q) \leq n-2\},\ \mathcal{P}_0^e = \{Q \in \mathcal{P} \colon d(e, Q) \leq n-2\},$$

$$\mathcal{L}_0^P = \{l \in \mathcal{L} \colon d(P, l) \leq n-2\},\ \mathcal{L}_0^e = \{l \in \mathcal{L} \colon d(e, l) \leq n-2\},$$

továbbá $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^P \cup \mathcal{P}_0^e$ és $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^P \cup \mathcal{L}_0^e$. Ha most $f \in \mathcal{P}_1$ egy bennmaradt egyenes, $n - 2 < d(e, f) \leq n$ és páros, tehát $d(e, f) = n$, ezért az f-re illeszkedő pontok nincsenek $\mathcal{P}_0^e$-ben. Viszont $n - 2 < d(f, P) \leq n$ és páratlan, tehát $d(f, P) = n - 1$. Mivel f és P között egyetlen $n-1$ hosszúságú út vezet, ebből $\left|\Gamma(f) \cap \mathcal{P}_0^P\right| = 1$ következik. Hasonlóan meggondolható, hogy minden pontról pontosan egy egyenest hagytunk el, tehát $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ egy 1-jó struktúra. Ez nem függ P és e választásától, $d = d(P, e)$ lehet $1, 3, \ldots, n-1$, és mindegyik esetben $\left|\mathcal{P}_0^P\right| = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2}$. Ha $d = 1$, minden $Q \in \mathcal{P}_0^e$-re $d(e, Q) \leq n-3$ (legfeljebb $n-2$, de páros nem lehet), ezért $d(P, Q) \leq d(e, Q) + d(e, P) \leq n-2$, következésképpen $\mathcal{P}_0^e \subset \mathcal{P}_0^P$, így $|\mathcal{P}_0| = \left|\mathcal{P}_0^P\right| = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2}$. Ha $d \geq 3$, $|\mathcal{P}_0|$ kiszámításához $|\mathcal{P}_0| = \left|\mathcal{P}_0^P\right| + \left|\mathcal{P}_0^e \setminus \mathcal{P}_0^P\right|$ alapján elég meghatározni $\left|\mathcal{P}_0^e \setminus \mathcal{P}_0^P\right|$-t; tegyük ezt külön $n = 4$ és $n = 6$ esetén.

Ha $n = 4, d = 3$, akkor $\mathcal{P}_0^e \setminus \mathcal{P}_0^P = \{Q \in \mathcal{P} \colon d(P, Q) = 4,\ d(e, Q) = 1\}$. Mivel a gráfban nincs nyolcnál rövidebb kör, egyetlen R pont van, melyre $d(R, Q) = 1,\ d(R, P) = 2$, ezért a kérdéses halmaz q elemű; így $|\mathcal{P}_0| = q^2 + 2q + 1$.

Ha $n = 6, d = 3$, akkor $\mathcal{H} = \mathcal{P}_0^e \setminus \mathcal{P}_0^P = \{Q \in \mathcal{P} \colon d(P, Q) = 6,\ d(e, Q) = 3\}$. Ha $X \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ és $d(P, X) \leq 5$, akkor X-nek csak egy szomszédja van X-nél közelebb P-hez, a többi q darab távolabb van tőle (szigorúan). $\mathcal{H}$ egy eleme e-ből három lépésben csak P-től szigorúan távolodva érhető el, és e-ből induló, P-től távolodó három hosszú út mindenképpen $\mathcal{H}$-ba fut be. Mindent egybevetve $|\mathcal{H}| = q^3$, tehát $|\mathcal{P}_0| = 1 + q + q^2 + 2q^3 + q^4$.

Ha $n = 6, d = 5$, akkor $\mathcal{H} = \mathcal{P}_0^e \setminus \mathcal{P}_0^P = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3$, ahol

$$\mathcal{H}_i = \{Q \in \mathcal{P} \colon d(P, Q) = 6,\ d(e, Q) = i\}\ (i = 1, 3).$$

Az előző meggondolások alapján $|\mathcal{H}_1| = q$. $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3^+ \dot{\cup} \mathcal{H}_3^-$, ahol

$$\mathcal{H}_3^+ = \{Q \in \mathcal{H}_3 \colon \exists X, f \colon e \sim X \sim f \sim Q,\ \text{és}\ d(P, X) = 6\},$$

$$\mathcal{H}_3^- = \{Q \in \mathcal{H}_3 \colon \exists X, f \colon e \sim X \sim f \sim Q,\ \text{és}\ d(P, X) = 4\}.$$

$\mathcal{H}_3^+$ elemeinél X-et q, X-hez f-et szintén q, utána Q-t $q-1$ különböző módon választhatjuk meg $\big(d(e, Q) = 3$ miatt $X \neq Q,\ e \neq f\big)$, ezért $\left|\mathcal{H}_3^+\right| = q^2(q-1)$. $\mathcal{H}_3^-$ esetében X egyértelmű, és X-hez f-et $q-1$, Q-t pedig q különböző módon választhatjuk meg, tehát $\left|\mathcal{H}_3^+\right| = q(q-1)$. Ezekből $|\mathcal{H}| = q + q^2(q-1) + q(q-1) = q^3$, minek következtében $|\mathcal{P}_0| = 1 + q + q^2 + 2q^3 + q^4$.

Mint a projektív síkok esetében, általános n-szögekre is lehetséges minden t-re t-jó struktúrát megadni (mely tehát olyan pont- és egyeneshalmaz, amit kidobva a gráfból a maradék $(q+1-t)$-reguláris). Legyen $n \geq 4$ páros. A projektív síkoknál látott 1. konstrukciót általánosítandó, legyen P_1 tetszőleges pont, $l_1, \ldots, l_t$ P_1-en áthaladó egyenesek, $P_2, \ldots, P_t$ pedig l_1-re illeszkedő pontok. Legyen

$$\mathcal{P}_0 = \{Q \in \mathcal{P} \colon \exists\, 1 \leq i \leq t \colon d(P_i, Q) \leq n-2\},$$

$$\mathcal{L}_0 = \{e \in \mathcal{P} \colon \exists\, 1 \leq i \leq t \colon d(l_i, e) \leq n-2\}.$$

Megjegyezzük, hogy ha például $d(l_i, Q) \leq n-2$, akkor $d(l_i, Q) \leq n-3$, és ezért $d(P_1, Q) \leq n-2$, tehát ez a konstrukció ugyanazt az elvet követi, mint a korábban látottak; nem jelent változtatást, hogy a kiválasztott egyenesektől legfeljebb $n-2$ távolságra levő pontok elhagyását nem követeljük meg külön, mint az előzőekben. $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ t-jó pár, hiszen ha Q tetszőleges bennmaradó pont, akkor minden $1 \leq i \leq t$-re $d(P_i, Q) = n$ és $d(l_i, Q) = n-1$, tehát a Q-ra illeszkedő egyenesek (a gráfban Q szomszédai) közül azokat a $e_1, \ldots, e_t$ egyeneseket hagytuk el, melyek a gráfban az l_i-t Q-val összekötő, egyértelmű, U_i-nek jelölt $n-1$ hosszúságú utakon szerepelnek. Minden $1 \leq i < j \leq t$-re $e_i \neq e_j$, máskülönben $d(l_i, l_j) = 2$ miatt volna a gráfban legfeljebb $2n-2$ hosszúságú kör, ami nem lehetséges. Duális gondolatmenettel látható, hogy minden bennmaradó egyenesről t darab pontot hagytunk el, vagyis $(\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ valóban t-jó. $|\mathcal{P}_0|$ összeszámlálásához tekintsük egyszer a P_1-től legfeljebb $n-2$ távolságra elhelyezkedő $1+q(q+1)+q^3(q+1)+\ldots+q^{n-3}(q+1)$ darab pontot, valamint a $P_2, \ldots, P_t$-től $n-2$, P_1-től n távolságra levő pontokat, melyek minden $2 \leq i \leq t$-re q^{n-2} darabot tesznek ki. Ezek a ponthalmazok mind diszjunktak egymástól, ilyenfomrán $|\mathcal{P}_0| = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-3}+tq^{n-2}$. Ezekből adódik a következő eredmény.

4.1. Tétel. *Legyen $k \leq q$, ahol q prímhatvány. Ekkor*

1. *ha $g = 2n = 8, 12$, akkor $c(k, 2n) \leq 2kq^{n-2}$,*
2. *$c(q, 8) \leq 2(q^3 - q)$,*
3. *$c(q, 12) \leq 2(q^5 - q^3)$.*

4.2. Következmény. *Ha* $n = 4, 6$*, akkor* $c(k, 2n) \sim 2k^{n-1}$.

BIZONYÍTÁS. Minden $\varepsilon > 0$ esetén elegendően nagy k-ra q választható $(1+\varepsilon)$-nál kisebbnek. Ezután az előző tételből és az 1.2. Moore-korlátból azonnal adódik az állítás. ∎

Megjegyzés. A 4.1. tétel első állításának $g = 8$ esete páratlan q-ra következik az 1.6. tételből, és persze emiatt a következmény vonatkozó állítása is, azonban $g = 12$-re az csak $c(k, 12) \le 2kq^5$-t ad.

Végezetül közlünk még egy nemlétezési eredményt [4]-ből.

4.3. Tétel. (Biggs-Ito, 1980) *Ha* $g = 2n \ge 8$*, akkor nincs kettő többletű* (k, g)*-gráf.*

Hivatkozások

[1] M. ABREU, M. FUNK, D. LABBATE, V. NAPOLITANO: *On (minimal) regular graphs of girth 6*. Australasian Journal of Combinatorics, **35** (2006), 119-132

[2] S. BALL, A. BLOKHUIS: *On the size of a double blocking set in $PG(2,q)$*. Finite Fields Appl., **2** (1996), 125-137

[3] S. BALL, A. BLOKHUIS, F. MAZZOCCA: *Maximal arcs in Desarguesian planes of odd order do not exist*. Combinatorica, **17** (1997), 31-41

[4] N. L. BIGGS, T. ITO: *Graphs with even girth and small excess*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **88** (1980), 1-10

[5] A. BLOKHUIS, L .STORME, T. SZŐNYI: *Lacunary polynomials, multiple blocking sets and Baer subplanes*. J. London Math. Soc., **60** (1999), 321-332

[6] W. G. BROWN: *On Hamiltonian regular graphs of girth six*. J. London Math. Soc., **42** (1967), 514-520

[7] P. ERDŐS, H. SACHS: *Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl*. Wiss. Z. Uni. Halle (Math. Nat.), **12** (1963), 251-257

[8] KISS GY., SZŐNYI T.: *Véges geometriák*. Polygon könyvtár (2001)

[9] F. LAZEBNIK, V. A. USTIMENKO, A. J. WOLDAR: *New Upper Bounds on the Order of Cages*. The Electronic Journal of Combinatorics, **4** (No. 2) (1997), #R13

[10] G. ROYLE: *Higher valency cages*. `http://www.csse.uwa.edu.au/~gordon/cages/allcages.html`

[11] P. K. WONG: *Cages – A Survey*. Journal of Graph Theory, **6** (1982), 1-22