

Nemfolytonos Galjorkin - módszerekre vonatkozó hibabecslések elliptikus feladatok esetén

Izsák Ferenc

Tanszéki szeminárium, ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2011. február 28.

Outline

- Motiváció nemfolytonos függvényekkel való közelítésre.
- DG - módszerek levezetése.
- DG - módszerek hibaanalízise.
- Egy új megközelítés, a módszer és a konvergencia 1 dimenzióban.

Motiváció

- Nagyon körülményes (de gyakran szükséges) a hp -finomítás végeelem módszerek esetében.
 - ◇ Nem tudjuk a közelítő polinomok fokszámát a tartományokon akárhogy előírni.
 - ◇ A bázisfüggvényeken elemhatárokon definiáljuk, összetett ebből a tömegmátrix kiszámítása (több idő, mint a kapott lin. rendszert megoldani).

A vizsgált modellfeladat

azaz

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla u(x) = \psi(x) & x \in \Omega \\ \nabla \cdot \psi(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Itt $f \in L_2(\Omega)$ adott, ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ korlátos poliéder, amelynek egy partícióját tekintjük:

$$\bar{\Omega} = \bigcup \bar{K}_j \quad \text{és} \quad \Gamma = \bigcup \partial K_j, \Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$$

valamint $\boldsymbol{\nu}_j$ a K_j -ről kifelé mutató normális.

Eszközök I: Függvényterek a közelítéshez

- Résztartományonként

$$H_h = \{u \in L_2(\Omega) : u|_{K_j} \in \mathbb{P}^{k_j}\},$$

ahol \mathbb{P}^{k_j} a legfeljebb k_j -edrendű polinomok vektortere. Ezzel valami olyan $a_{\text{DG}} : H_h \times H_h$ bilineáris formát akarunk felírni, hogy az eredeti feladat megoldását jól lehessen közelíteni azon $u_h \in H_h$ elemmel, amelyre minden $v_h \in H_h$ esetén

$$a_{\text{DG}}(u_h, v_h) = (f, v_h).$$

Eszközök II: Ugrások, átlagok elemhatárokon

- Átlag egy elemhatár-darabon:

$$\{\{u_h\}\}|_{K_j \cap K_k} = \frac{1}{2} \left(\lim_{K_j \rightarrow} u_h + \lim_{K_k \rightarrow} u_h \right).$$

- Ugrás egy elemhatár-darabon:

- ▷ $u_h \in H_h$ esetén:

$$[[u_h]]|_{K_j \cap K_k} = \lim_{K_j \rightarrow} u_h \nu_{K_j} + \lim_{K_k \rightarrow} u_h \nu_{K_k},$$

- ▷ $u_h \in [H_h]^3$ esetén:

$$[[u_h]]|_{K_j \cap K_k} = \lim_{K_j \rightarrow} u_h \cdot \nu_{K_j} + \lim_{K_k \rightarrow} u_h \cdot \nu_{K_k}.$$

Eszközök III: A Gauss-tétel egy kiterjesztése

- Tetszőleges $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $v \in [C^1(\bar{\Omega})]^3$ esetén

$$(\nabla u, v)_\Omega = \sum_j -(u, \nabla \cdot v)_{K_j} + \sum_j (\nu_j u, v)_{\partial K_j} = -(u, \nabla \cdot v)_\Omega + (\nu_j u, v)_{\partial \Omega}.$$

Ha pedig $u \in H_h$, $v \in [H_h]^3$, akkor valamilyen $\mathcal{F} : H_h \rightarrow H_h|_{\cup_j \partial K_j}$ és $\underline{\mathcal{F}} : [H_h]^3 \rightarrow [H_h]_{\cup_j \partial K_j}^3$ lineáris függvényekre

$$(\nabla u, v)_\Omega = (u, \nabla_h \cdot v)_\Omega + \sum_j (\nu_j \mathcal{F}(u), v)_{\partial K_j},$$

és ugyanilyen elven minden $\psi \in [H_h]^3$ és minden $w \in H_h$ esetén

$$(\nabla \cdot \psi, w)_\Omega = -(\psi, \nabla_h w)_\Omega + \sum_j (\nu_j \cdot \underline{\mathcal{F}}(u), v)_{\partial K_j},$$

ahol a ∇_h és $\nabla_h \cdot$ operátorokat a résztartományok unióján értelmezzük.

Az eredeti feladat gyenge(variációs) alakja $H_h \times [H_h]^3$ -ban

- Keresünk olyan $(u_h, \psi_h) \in H_h \times [H_h]^3$ függvényeket, hogy minden $(v_h, w_h) \in H_h \times [H_h]^3$ esetén

$$\begin{cases} (\nabla u_h, v_h)_\Omega = -(u_h, \nabla_h \cdot v_h)_\Omega + \sum_j (\nu_j \mathcal{F}(u_h), v_h)_{\partial K_j} = (\psi_h, v_h)_\Omega \\ (\nabla \cdot \psi_h, w_h) = -(\psi_h, \nabla_h w_h)_\Omega + \sum_j (\nu_j \cdot \mathcal{F}(u_h), w_h)_{\partial K_j} = -(f, w_h)_\Omega \end{cases} \quad (1)$$

- Ehelyett olyat szeretnénk, ami csak u_h -t tartalmazza ismeretlenként. Ehhez egy elemi azonosság:

Minden $(q, r) \in \left(\prod_j C(\bar{K}_j) \times \prod_j [C(\bar{K}_j)]^3 \right)$ függvénypárra

$$\sum_j (q_{K_j}, \nu_j \cdot r_{K_j})_{\partial K_j} = ([q], \{\{r\}\})_\Gamma + (\{\{q\}\}, [r])_{\Gamma_0}. \quad (2)$$

Az eredeti feladat gyenge(variációs) alakja II.

- Terv: (1) első egyenletében a ψ függvényt u -val kifejezzük, ezt a másodikba beírjuk.
- A (2) formulát (1) első egyenletébe beírva, majd a Gauss-tételt elemenként, végül újra az (2) formulát alkalmazva

$$\begin{aligned}
 (\psi_h, v_h)_\Omega &= -(\mathbf{u}_h, \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega + (\llbracket \mathcal{F}(\mathbf{u}_h) \rrbracket, \{\{v_h\}\})_\Gamma + (\{\{\mathcal{F}(\mathbf{u}_h)\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_{\Gamma_0} \\
 &= (\nabla_h \mathbf{u}_h, v_h)_\Omega - \sum_j (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_j \cdot v_h)_{\partial K_j} + (\llbracket \mathcal{F}(\mathbf{u}_h) \rrbracket, \{\{v_h\}\})_\Gamma + (\{\{\mathcal{F}(\mathbf{u}_h)\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_{\Gamma_0} \\
 &= (\nabla_h \mathbf{u}_h, v_h)_\Omega - (\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket, \{\{v_h\}\})_\Gamma - (\{\{\mathbf{u}_h\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_{\Gamma_0} \\
 &\quad + (\llbracket \mathcal{F}(\mathbf{u}_h) \rrbracket, \{\{v_h\}\})_\Gamma + (\{\{\mathcal{F}(\mathbf{u}_h)\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_{\Gamma_0} \\
 &= (\nabla_h \mathbf{u}_h, v_h)_\Omega - (\llbracket \mathbf{u}_h - \mathcal{F}(\mathbf{u}_h) \rrbracket, \{\{v_h\}\})_\Gamma - (\{\{\mathbf{u}_h - \mathcal{F}(\mathbf{u}_h)\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_{\Gamma_0}.
 \end{aligned}$$

Ezt beírva a

$$\begin{aligned} -(f, w_h) &= -(\psi_h, \nabla_h w_h)_\Omega + \sum_j (\boldsymbol{\nu}_j \cdot \underline{\mathcal{F}}(u_h), w_h)_{\partial K_j} \\ &= -(\psi_h, \nabla_h w_h)_\Omega + (\{\{\underline{\mathcal{F}}(u_h)\}\}, \llbracket w_h \rrbracket)_\Gamma + (\llbracket \underline{\mathcal{F}}(u_h) \rrbracket, \{\{w_h\}\})_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

formulába (legyen $\nabla_h w_h = v_h$), kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (f, w_h) &= (\nabla_h u_h, \nabla_h w_h)_\Omega \\ &\quad + (\llbracket u_h - \mathcal{F}(u_h) \rrbracket, \{\{\nabla_h w_h\}\})_\Gamma + (\{\{u_h - \mathcal{F}(u_h)\}\}, \llbracket \nabla_h w_h \rrbracket)_{\Gamma_0} \\ &\quad + (\{\{\underline{\mathcal{F}}(u_h)\}\}, \llbracket w_h \rrbracket)_\Gamma + (\llbracket \underline{\mathcal{F}}(u_h) \rrbracket, \{\{w_h\}\})_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

Egy eszköz DG bilineáris formák felírásához

- Átviteli operátor: $r : [L_2(\Gamma)]^n \rightarrow H_h$, ahol $r(u_h) \in H_h$ az az elem, amelyre

$$\forall w \in H_h : \int_{\Omega} r(u_h)w = - \int u_h \{\{w\}\}.$$

DG bilineáris formák levezetése

- Konkrét módszerek - $\mathcal{F}(u_h)$ és $\mathcal{F}(\nabla u_h)$ megválasztása. Példák:

- ▶ $\mathcal{F}(u_h) = \{\{u_h\}\}$, $\underline{\mathcal{F}}(u_h) = \{\{\nabla_h u_h\}\}$ - Bassi & Rebay..
Ekkor (... számolás ...)

$$a_{\text{DG}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h)_\Omega + (r(\llbracket u_h \rrbracket), r(\llbracket v_h \rrbracket))_\Omega \\ - (\{\{\nabla_h u_h\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_\Gamma - (\{\{\nabla_h v_h\}\}, \llbracket u_h \rrbracket)_\Gamma.$$

- ▶ $\mathcal{F}(u_h) = \{\{u_h\}\}$, $\underline{\mathcal{F}}(u_h) = \{\{\nabla_h u_h\}\} - ch_e^{-1} \llbracket u_h \rrbracket$ - IP (interior penalty) DG módszer.
Ekkor (... számolás ...)

$$a_{\text{DG}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h)_\Omega - (\{\{\nabla_h u_h\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_\Gamma - (\{\{\nabla_h v_h\}\}, \llbracket u_h \rrbracket)_\Gamma \\ + \sum_j h_{\gamma_j}^{-1} (\llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket)_{\gamma_j}.$$

DG bilineáris formák tulajdonságai

- A hibaanalízishez: $a_{\text{DG}} : (H + H_h) \times H + H_h \rightarrow \mathbf{R}$.
- Mit tudjon egy ilyen a_{DG} bilineáris forma?
 - ▶ Teljesüljön a Galjorkin-ortogonalitás: Ha u_h a DG-közelítés, akkor minden $v_h \in H_h$ esetén

$$a_{\text{DG}}(u - u_h, v_h) = 0.$$

Megjegyzés: Ha teljesül, hogy minden $u \in H^1(\Omega)$ esetén $\mathcal{F}(u) = u$, emellett minden $u \in H^2(\Omega)$ esetén $\underline{\mathcal{F}}(u) = \nabla u$ (azaz a módszer *konzisztens*), akkor a fenti feltétel teljesül.

- ▶ a_{DG} legyen stabil, azaz valamilyen $c_0 > 0$ esetén minden $u_h \in H_h + H$ esetén

$$a_{\text{DG}}(u_h, u_h) \geq c_0 \|u_h\|_{\text{DG}}^2.$$

- ▶ a_{DG} legyen korlátos, azaz valamilyen $c_0 > 0$ esetén minden $u_h, v_h \in H_h + H$ esetén

$$a_{\text{DG}}(u_h, v_h) \leq c_0 \|u_h\|_{\text{DG}} \|v_h\|_{\text{DG}},$$

ahol minden esetben $\|\cdot\|_{\text{DG}}$ egy "alkalmasan definiált" norma:

$$\triangleright \|\mathbf{u}_{\text{DG}}\|^2 = \|\nabla_h \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_j h_{\gamma_j}^{-1} \|[[\mathbf{u}]]\|_{L_2(\gamma_j)}^2 + \sum_j h_{K_j}^2 |\mathbf{u}|_{H^2(K_j)}^2,$$

$$\triangleright \|\mathbf{u}_{\text{DG}}\|^2 = \|\nabla_h \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_j h_{\gamma_j}^{-1} \|[[\mathbf{u}]]\|_{L_2(\gamma_j)}^2.$$

A megoldások létezése és konvergenciája

- Ha az a_{DG} bilineáris formára a Galjorkin-ortogonalitás, a stabilitás és a korlátosság feltétele teljesül, akkor az

$$\exists u_h \in H_h : \forall v_h \in H_h : a_{\text{DG}}(u_h, v_h) = (f, v_h).$$

feladatnak létezik egyértelmű megoldása, és az kvázi-optimalisan konvergál a $\|\cdot\|_{\text{DG}}$ normában az igazihoz:

$$\|u - u_h\|_{\text{DG}} \leq \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_{\text{DG}}.$$

Vigyázat, ez nem $H_0^1(\Omega)$ -beli konvergencia!

- Nem fontos \mathcal{F} konzisztenciája, ekkor is legalább $u_h \rightarrow u$, $\nabla_h u_h \rightarrow \nabla u$ igaz $L_2(\Omega)$ -ban (A. Ern & D. De Pietro, Math. Comp. 2010).

- Hogy kapunk u_h -ből legalább folytonos megoldást?
Rekonstrukciós operátorral: $Q_h : H_h \rightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$, amelyre minden -
résztartományonként legf. k -adrendű - u esetén tetszőleges $p, q \geq 1$ esetén

$$\|u - Q_h u\|_{L_p(\Omega)} \leq C_0 h^{\frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1} \|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$$

$$\|\nabla Q_h u\|_{L_p(\Omega)} \leq C_0 \|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$$

(A. Buffa & C. Ortner, IMA J. Num. Anal. 2009) - ezzel az $u - u_h$ hibát nem tudjuk becsülni, mert az nem H_h -beli.

Lehet-e valahogy mégis $H_0^1(\Omega)$ -beli konvergenciát kapni?