Interpolációációs operátorok Szoboljev-terekben

Izsák Ferenc

2007. szeptember 17.

Vázlat

- Bevezetés: motiváció, végeselem módszerek.
- Pldk, eredmnyek az irodalomban.
- ◇ Az interpolációs operátor konstrukciója.
- ◇ Az optimális kzelítés igazolsa.

Motivci: végeselem-közelítés

- Az alábbi PDE-t

$$\mathcal{L}u = f, \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset H = [L_2(\Omega)]^k, f \in H$$

variációs (gyenge) alakba írva

$$(\mathcal{L}u, v) = B(u, v) = (f, v), \quad \text{ahol} \quad \mathcal{D}(B) = V \times V \subset H \times H \qquad (1)$$

olyan $u \in V$ függvényt keresünk (gyenge megoldás), amelyre minden $v \in V$ esetén (1) teljesül.

- Végeseselem - közelítés: Olyan $u_h \in V_h \subset V$ függvényt keresünk, amelyre

$$B(u_h, v_h) = (f, v_h) \; \forall v \in V_h.$$

Motivci: végeselem-közelítés (folytats)

- A szmols sorn (f, v_h) helyett (f_h, v_h), ahol $f_h \in V_h$. Hogy vlasszuk f_h-t?
- Idfgg feladatok FE megoldsa:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = Au(t,x) \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

  Idbeli diszkretizci utn: $u(t_n, \cdot) \in V_h$.

- Mi legyen a kezdeti felttelnek megfelel elem V_h-ban?
- ltalnosan: adott egy $V_h \subset V$ vges dimenzis altr. Definiljunk egy "knnyen kiszmthat" $\Pi : V \to V_h$ interpolcis opertort.

Pldk vgeselem-interpolcira I.

- Lagrange-bzisfggvnyek egy dimenziban.
  - ▷ $\Omega = (0,1)$
  - ▷ $V = H_0^1(\Omega)$
  - ▷ $$V_h = \{f \in C_0[0,1] : f|_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} \text{ lineris } k = 0,1,\dots n-1\}.$$
  - ▷ Egy bzis: $\{f_k\}_{k=1}^{n-1}$ "kalapfggvnyek".
  - ▷ Egy dulis bzis: $\{\Delta_k\}$ Dirac-disztribcik, amelyekre
    - $\Delta_k(g) = g(\frac{k}{n})$
    - $\Delta_i(f_j) = \delta_{ij}$.
  - Interpolci:

$$\Pi(\phi) = \sum_{j=0}^{n} \Delta_j(\phi) f_j = \sum_{k=0}^{n} \phi(\frac{k}{n}) f_k.$$

- Ez valban projekci, mert $f = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k$ esetn

$$\Pi(\phi) = \sum_{j=0}^{n} \Delta_j(\sum_{k=0}^{n} a_k f_k) f_j = \sum_{j=0}^{n} a_j \Delta_j(f_j) f_j = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j.$$

Pldk vgeselem-interpolcira I.

- Magasabbrend Lagrange-bzisfggvnyek egy dimenziban.
  - ▷ $\Omega = (0,1)$
  - ▷ $V = H_0^1(\Omega)$
  - ▷ $$V_h = \{f \in C_0^1[0,1] : f|_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]} \text{ lineris } k = 0,1,\dots n-1\}.$$
  - ▷ Egy bzis: $\{f_{(j,k)}\}, j = 0,1$ fggvnyek (ksbb definiljuk ezeket).
  - ▷ Egy dulis bzis: $\{\Delta_{(j,k)}\}, j = 0,1$ Dirac-disztribcik, amelyekre
    - $\Delta_{(j,k)}(g) = g^{(j)}(\frac{k}{n})$
    - $\Delta_{(j,k)}(f_{(i,l)}) = \delta_{(j,k),(i,l)}$.
- Interpolci:

$$\Pi(\phi) = \sum_{j,k} \Delta_{(j,k)}(\phi) f_{(j,k)} \sum_{(j,k)} \phi^{(j)}(\frac{k}{n}) f_{(j,k)}.$$

- Ez is projekci lesz, fent csak azt hasznltuk, hogy a bzis az eredetinek dulisa.

Pldk vgeselem-interpolcira III.

- $V_h = H_0^h(\mathrm{curl}, \Omega)$ az *első rendű* Nédélec-féle végeselem-tér:

▷ a $\mathcal{T}_h$-val jelölt *nem-degenerált* tetraéder-felosztáson definiált,

▷ az egységszimplexen az alábbi bázisfüggvényekkel (ξ, ζ, η jelöli a koordinátákat):

$$(1-\eta-\zeta, \xi, \xi)^T, \ (\eta, 1-\xi-\zeta, \eta)^T, \ (\zeta, \zeta, 1-\xi-\eta)^T$$
$$\sqrt{2}(-\eta, \xi, 0)^T, \sqrt{2}(\zeta, 0, -\xi)^T, \sqrt{2}(0, -\zeta, \eta)^T.$$

▷ Tetszőleges tetraéderen: affin transzformációval definiáljuk.

▷ $V_h = H_0^h$: Az egyes tetraédereken a fenti, a közs lapokon az érintő irányú komponens folytonos, $\partial\Omega$-n az érintő irányú komponens nulla.

Folytats - Dulis bzis megadsa

- Jellje $\{e_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ az lek halmazt, s ezek rintvektorait $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$. Ekkor igazolhat, hogy egy dulis bzis:

$$\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}, \text{ ahol } \langle E_j, \phi\rangle = \int_{e_j} \boldsymbol{e}_j \cdot \phi$$

Milyen legyen az interpolcis opertor?

- Legyen projekci a V_h altrre (azaz $\Pi|_{V_h} = I$).
- rizze meg a peremfeltteleket.
  - Plda: Ha $V = H^1(\Omega)$ s $f \in H_0^1(\Omega)$, akkor legyen $\Pi(f) \in H_0^1(\Omega)$.
- Legyen alkalmazhat akrmilyen $f \in W_p^s(\Omega)$ fggvnyre, ahol $s \geq 0, p \geq 1$. Az eljrs ne is fggjn az s s p rtkektl.
- Legyen alkalmazhat akkor is, ha az egyes rsztartomnyokon klnbz rend bzisfggvnyek adottak.
- Legyen a diszkrt de Rham diagram kommutatv.
- Legyen az interpolci kvzi optimlis.

Nhny korbbi eredmny

◇ [1] Scott s Zhang 1990. [2] Bernardi s Girault 1998. [3] Demkowicz 2005 s 2007. [4] Schberl 2005 s 2008.

	[?]	[?]	[?]	[?]
projekci	+	-	+	-
de Rham diagram kommutatv	-	-	+	+
peremfelttelek megrzse	+	-	+	-
alkalmazhat minden (s,p)-re	-	+	-	+
klnbz rend bzisfggvnyek	-	-	+	-

Az interpolcis eljrs

- Cl: $V_h = \mathrm{span}\,\{\phi_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ esetn a $\Pi\phi = \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\phi_j$ kpletben szerepl a_i meghatrozsa.
- Alapgondolat [1]: interpolljunk rsztartomnyonknt, talljunk minden ϕ_j bzisfggvnyhez egy megfelel M_j (altrtopolgiban nylt) interpolcis tartomnyt.
- Az a_j egytthatt az $\phi|_{M_j}$ alapjn hatrozzuk meg.

Feltételek M_j s a “dulis bzis” $\{\psi_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ kivlasztshoz

- $\overline{M_j}$ (egy sszefgg sokasg) a vgeselem-feloszts rsztartomnyaibl ll.
- Minden $\Phi = \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\phi_j$ esetn az a_j egytthatt egyrtelmen meghatrozza az $\phi|_{M_j}$ nyom, amely rtelmes.
- supp $\psi_j \subset M_j$ minden $j \in \mathcal{J}$ esetn.
- $\langle \phi_i|_{M_j}, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$ minden $i, j \in \mathcal{J}$ esetn.

A bizonyítás egy része

- Az interpolci:

$$a_j = \langle \Phi|_{M_j}, \psi_j \rangle.$$

- Megjegyzsek:

1. Feltesszk, hogy az elzekben minden nyom s a bilineris formk is rtelmesek.
2. Az gy kapott interpolci a ψ_j vlasztsa miatt projekci lesz.
3. Ha az M_j halmazokat gy vlasztjuk, hogy $\cup_{j\in\mathcal{J}} M_j \supset \partial\Omega$, akkor a Π interpolci a $\partial\Omega$ halmazon a homogn peremfelttelt megrzi.

Plda egy dimenziban

- $\Omega = (0,1)$, a $\{(0,\frac{1}{4}),(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{3}{4}),(\frac{3}{4},1)\}$ felosztssal.
- $\{\phi_0,\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4\}$ az els pldban trgyalt "kalapfggvnyek", de most 0-ban s 1-ben is.
- $\{M_0,M_1,M_2,M_3,M_4\} = \{\{0\},(0,\frac{1}{4}),(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{3}{4}),\{1\}\}$
- $\{\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\} = \{\delta_0, 96x-8, 96(x-\frac{1}{4})-8, 96(x-\frac{1}{2})-8, (\frac{1}{2},\frac{3}{4}), \delta_1\}$
- Alkalmazs: $\phi = \chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}}$. Itt $\int_{M_2}\phi\psi_2 = 1$, egybknt $j \neq 2$-re $\int_{M_j}\phi\psi_j = 0$. Azaz $\Pi(\chi) = \phi_2$.

A kvzi-optimlis konvergencirl

- A stabilits (korltossg) igazolsa.

Tétel 1 *Legyenek* $s \geq 0$ *s* $p \geq 1$ *adottak, s tegyk fel az interpolci megadshoz szksges felttelek teljeslnek. Ekkor ltezik olyan, a feloszts finomsgt megad* h*-tl fggetlen* C *konstans, amellyel minden* $u \in W_p^s(\Omega)$ *esetn*

$$\|\Pi u\|_{s,p} \leq C\|u\|_{s,p}.$$

- Kvetkezmny: Kvzi-optimalits igazolsa.

Tétel 2 *Legyenek* $s \geq 0$ *s* $p \geq 1$ *adottak, s tegyk fel az interpolci megadshoz szksges felttelek teljeslnek. Ekkor ltezik olyan, a feloszts finomsgt megad* h*-tl fggetlen* C *konstans, amellyel minden* $u \in W_p^s(\Omega)$ *esetn*

$$\|u - \Pi u\|_{s,p} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{s,p}.$$

A kvzi-optimlis konvergencirl - folytats

- *Bizonyts:* A hromszg-egyenltlensg, a projekcis tulajdonsg s a stabilits alapjn kapjuk, hogy *minden* $v \in V_h$ esetn

$$
\begin{aligned}
\|u - \Pi_{\mathrm{SZ}} u\|_{s,p} &\leq \|u - v\|_{s,p} + \|v - \Pi_{\mathrm{SZ}} u\|_{s,p} \\
&= \|u - v\|_{s,p} + \|\Pi_{\mathrm{SZ}} v - \Pi_{\mathrm{SZ}} u\|_{s,p} \\
&\leq \|u - v\|_{s,p} + \|\Pi_{\mathrm{SZ}} v - \Pi_{\mathrm{SZ}} u\|_{s,p} \\
&\leq (1 + C)\|u - v\|_{s,p},
\end{aligned}
$$

ami igazolja az lltst. $\square$

A kvzi-optimlis konvergencirl - folytats

- Minden “fajta” M tartomnyon gy definiljuk a rajt rtelmezett bzist s dulis bzist, hogy az $\hat{M}$ referenciatartomnyon rtelmezett bzisfggvnyeket transzformljuk: Ha

$$D_M : \hat{M} \to M,$$

akkor

$$\phi(x) = |\det D_M| \hat{\phi}(D_M^{-1} x) \text{ s } \psi(x) = |\det D_M| \hat{\psi}(D_M^{-1} x).$$

Ld. a fenti pldt.

- Segdlltsok az 1. Ttel igazolshoz.

Lemma 1 *Tegyk fel, hogy* $\{\phi_i\}_{i=1}^N \subset W_p^s(\Omega)$*,ahol* $s \in \mathbb{Z}$ *s* $z \geq 1$. *Ekkor ltezik olyan* C *konstans, amely fggetlen* M *tmrjtl* s*-tl s* p*-tl, s teljesl r, hogy minden* $\phi \in \text{span}\,\{\phi_i\}_{i=1}^N$ *s* $\psi \in \text{span}\,\{\psi_i\}_{i=1}^N$ *esetn*

$$\|\phi\|_{s,p,M} \leq C h_M^{\frac{d}{p}-s} \|\hat{\phi}\|_{s,p,M} \qquad (2)$$

$valamint$

$$\|\psi\|_{-s,q,M} \leq C h_M^{s-\frac{d}{p}} \|\hat{\psi}\|_{-s,q,M}. \tag{3}$$

Mg egy segdeszkz: negatv index Szoboljev-normk

Definci 1 *A* $W_q^{-s}(\Omega)$ *Banach-tr a* $W_p^s(\Omega)$ *tr dulisa, teht az albbi normval ltjuk el:*

$$\|v\|_{-s,q,\Omega} = \sup_{u \in W_p^s(\Omega)} \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|_{s,p,\Omega}}, \tag{4}$$

, ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Igazolhat, hogy a (4)-ben elegend a szuprmumot $u \in W_{0,p}^s(\Omega)$-beli fggvnyekre venni:

$$\|v\|_{-s,q,\Omega} = \sup_{u \in W_{0,p}^s(\Omega)} \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|_{s,p,\Omega}}. \tag{5}$$

Megjegyzsek:

1. Klasszikus ($v \in L_q(\Omega)$-beli) fggvnyekre a $\langle v, u \rangle$ dulis pr (4)-ben egyszeren $\int_\Omega uv$-val azonos.

2. Gyakran eleve a (5) formult hasznljk.
3. Nyilvn minden $u \in W_p^s(\Omega)$, $v \in W_q^{-s}(\Omega)$ esetn

$$\langle v, u \rangle \leq \|u\|_{s,p,\Omega} \|v\|_{-s,q,\Omega}. \tag{6}$$

A lemma bizonytsa

Proof Tetszleges α multiindexre $|\alpha| = s_1 \le s$ esetn a vltoz transzformcijval kapjuk, hogy

$$\left(\int_M |\partial^\alpha \phi|^p\right)^p = \|\partial^\alpha \phi\|_{0,p,M} \le C h_k^{\frac{d}{p}-s_1} \|\partial^\alpha \hat{\phi}\|_{0,p,\hat{M}} \le C h_k^{\frac{d}{p}-s} \|\partial^\alpha \hat{\phi}\|_{0,p,\hat{M}}, \tag{7}$$

gy a $\|\cdot\|_{s,p,M}$ norma defincijbl kapjuk (7)-t.
(3) igazolshoz jegyezzk meg, hogy $s_1 = s$ esetn

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{0,p,M} \ge C_0 h_k^{\frac{d}{p}-s} \|\partial^\alpha \hat{\phi}\|_{0,p,\hat{M}}$$

rvnyes csakgy, mint a $|\cdot|_{s,p,\Omega}$ szeminormra:

$$|\phi|_{s,p,M} \ge C h_M^{\frac{d}{p}-s} |\hat{\phi}|_{s,p,\hat{M}}. \tag{8}$$

A (5) formult, a $W^s_{0,p}(M)$-beli normk ekvivalencijt s (8)-et hasznlva kapjuk, hogy minden $\psi \in W^{-s}_q(M)$ esetn

$$
\begin{aligned}
\|\psi\|_{-s,q,M} &= \sup_{\phi \in W^s_{0,p}(M)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_M}{\|\phi\|_{s,p,M}} \le C \sup_{\phi \in W^s_{0,p}(M)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_M}{|\phi|_{s,p,M}} \\
&\le C \sup_{\hat\phi \in W^s_{0,p}(\hat M)} \frac{\langle \hat\psi \circ D_M^{-1}, \hat\phi \circ D_M^{-1} \rangle_{\hat M} |\det D_M^{-1}||\det D_M|}{h_M^{\frac{d}{p}-s} |\hat\phi|_{s,p,\hat M}} \\
&\le C \sup_{\hat\phi \in W^s_{0,p}(\hat M)} \frac{\langle \hat\psi \circ D_M^{-1}, \hat\phi \circ D_M^{-1} \rangle_{\hat M}}{h_M^{\frac{d}{p}-s} \|\hat\phi\|_{s,p,\hat M}} \\
&= h_M^{s-\frac{d}{p}} \|\hat\psi\|_{-s,q,\hat M},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

amit lltottunk. $\square$

Az 1. Ttel bizonytsa

Proof Az interpolci defincijt, (6), a 1 lemma erednyt hasznlva

$$
\begin{aligned}
\|\Pi_{\mathrm{SZ}} u\|_{s,p,M} &= \| \sum_{i\in\mathcal{I}} \phi_i \langle T_{\mathcal{M}_j}(u), \psi_i\rangle_M \|_{s,p,M} \le \max_{i\in\mathcal{I}} \|\phi_i\|_{s,p,M} \sum_{i\in\mathcal{I}} \left| \langle T_{\mathcal{M}_j}(u), \psi_i\rangle_M \right| \\
&\le C \max_{i\in\mathcal{I}} h_M^{\frac{d}{p}-s} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{i\in\mathcal{I}} \left| \langle T_{\mathcal{M}_j}(u), \psi_i\rangle_M \right| \\
&\le C h_M^{\frac{d}{p}-s} \max_{i\in\mathcal{I}} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} \sum_{i\in\mathcal{I}} \|\psi_i\|_{-s,q,M} \|u\|_{s,p,M} \\
&\le C h_M^{\frac{d}{p}-s} \max_{i\in\mathcal{I}} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} \sum_{i\in\mathcal{I}} h_M^{s-\frac{d}{p}} \|\hat{\psi}_i\|_{-s,q,M} \|u\|_{s,p,M} \\
&\le C h_M^{\frac{d}{p}-s} \max_{i\in\mathcal{I}} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} h_M^{s-\frac{d}{p}} \max_{i\in\mathcal{I}} \|\hat{\psi}_i\|_{-s,q,M} \|u\|_{s,p,M} \\
&\le \|u\|_{s,p,M},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

amit igazolni akartunk. □