

Gravitációs vízhullámok modellezése és szimulációja

Izsák Ferenc

Problémamegoldó szeminárium, ELTE TTK
2011. november 18.

Miért modellezzük?

- ▶ Gyakorlati alkalmazások:

Miért modellezzük?

- ▶ Gyakorlati alkalmazások:
 - ▶ Vízi járművek tervezése

Miért modellezzük?

- ▶ Gyakorlati alkalmazások:
 - ▶ Vízi járművek tervezése
 - ▶ Tengerparti létesítmények tervezése

Miért modellezzük?

- ▶ Gyakorlati alkalmazások:
 - ▶ Vízi járművek tervezése
 - ▶ Tengerparti létesítmények tervezése
 - ▶ Fúrótornyok, tengeri vezetékek konstrukciója

Miért modellezzük?

- ▶ Gyakorlati alkalmazások:
 - ▶ Vízi járművek tervezése
 - ▶ Tengerparti létesítmények tervezése
 - ▶ Fúrótornyok, tengeri vezetékek konstrukciója
 - ▶ *Szökőár előrejelzése*

Miért modellezzük?

- ▶ Gyakorlati alkalmazások:
 - ▶ Vízi járművek tervezése
 - ▶ Tengerparti létesítmények tervezése
 - ▶ Fúrótornyok, tengeri vezetékek konstrukciója
 - ▶ *Szökőár előrejelzése*

- ▶ Érdekes.

Gyakorlati szimulációk 1.

- ▶ MARIN, Wageningen (NL)

Gyakorlati szimulációk 1.

- ▶ MARIN, Wageningen (NL)



Gyakorlati szimulációk 2.

- ▶ MARIN, Wageningen (NL)

Miért ez a modell?

- ▶ A dinamikát *elsősorban* a gravitáció határozza meg.

Miért ez a modell?

- ▶ A dinamikát *elsősorban* a gravitáció határozza meg.
- ▶ A hullámegyenlet nem alkalmas; inkább rugalmas közegben terjedő deformáció modellezésére használható.
Különböző nagyságú hullámok a valóságban különböző sebességgel terjednek, asszerint pedig azonossal.

Az alapmodell

- ▶ Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.

Az alapmodell

- ▶ Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.
- ▶ Egyszerűsítések:

Az alapmodell

- ▶ Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.
- ▶ Egyszerűsítések:
 - ▶ $\Sigma \subset \mathbb{R}$ korlátos - egy dimenziós eset

Az alapmodell

- ▶ Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.
- ▶ Egyszerűsítések:
 - ▶ $\Sigma \subset \mathbb{R}$ korlátos - egy dimenziós eset
 - ▶ A medence alja vízszintes.

Az alapmodell (folyt.)

- ▶ Ismeretlen mennyiségek

Az alapmodell (folyt.)

- ▶ Ismeretlen mennyiségek
 - ▶ Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

Az alapmodell (folyt.)

- ▶ Ismeretlen mennyiségek
 - ▶ Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$
 - ▶ Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ , azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége (t, \mathbf{x}) -ben.

Az alapmodell (folyt.)

► Ismeretlen mennyiségek

- Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$
- Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ , azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége (t, \mathbf{x}) -ben.
- Maga a tartomány (1 dim. eset):

$$\Omega_t = \{(x, y) : x \in \Sigma, 0 < y < \eta(t, x)\}.$$

Ez is változik!

Az alapmodell (folyt.)

▶ Ismeretlen mennyiségek

- ▶ Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ , azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége (t, \mathbf{x}) -ben.
- ▶ Maga a tartomány (1 dim. eset):

$$\Omega_t = \{(x, y) : x \in \Sigma, 0 < y < \eta(t, x)\}.$$

Ez is változik!

- ▶ A hullámfelszín - a tartomány „teteje”:

$$\partial\Omega_{t,s} = \{(x, \eta(t, x)) : x \in \Sigma\}.$$

Az alapmodell (folyt.)

► Ismeretlen mennyiségek

- ▶ Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ , azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége (t, \mathbf{x}) -ben.
- ▶ Maga a tartomány (1 dim. eset):

$$\Omega_t = \{(x, y) : x \in \Sigma, 0 < y < \eta(t, x)\}.$$

Ez is változik!

- ▶ A hullámfelület - a tartomány „teteje”:

$$\partial\Omega_{t,s} = \{(x, \eta(t, x)) : x \in \Sigma\}.$$

- ▶ Jelölés: $\nu(t, x, y) - \Omega_t$ kifelé mutató normálisa (x, y) -ban.

A dinamikát leíró egyenletek

- ▶ Feltevés: a sebességmező örvénymentes.

A dinamikát leíró egyenletek

- ▶ Feltevés: a sebességmező örvénymentes.
Kapjuk:

$$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \quad (1)$$

A dinamikát leíró egyenletek

- ▶ Feltevés: a sebességmező örvénymentes.
Kapjuk:

$$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \quad (1)$$

- ▶ A hullámfelszín olyan sebességgel mozog, amilyen ott az áramlás.

A dinamikát leíró egyenletek

- ▶ Feltevés: a sebességmező örvénymentes.

Kapjuk:

$$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \quad (1)$$

- ▶ A hullámfelszín olyan sebességgel mozog, amilyen ott az áramlás.

Kapjuk:

$$\begin{aligned} (-\partial_x \eta(t, x), 1) \cdot (\partial_x \phi, \partial_y \phi)(t, x, y) &= \\ &= \partial_{\mathbf{v}} \phi(t, x, y) = \partial_t \eta(t, x) \quad (x, y) \in \partial \Omega_{t,s} \end{aligned} \quad (2)$$

- ▶ A hullámfelszínen igaz a Bernoulli-törvény (állandó külső nyomást feltételezve).

A dinamikát leíró egyenletek

- ▶ Feltevés: a sebességmező örvénymentes.

Kapjuk:

$$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \quad (1)$$

- ▶ A hullámfelszín olyan sebességgel mozog, amilyen ott az áramlás.

Kapjuk:

$$\begin{aligned} (-\partial_x \eta(t, x), 1) \cdot (\partial_x \phi, \partial_y \phi)(t, x, y) = \\ = \partial_{\mathbf{v}} \phi(t, x, y) = \partial_t \eta(t, x) \quad (x, y) \in \partial \Omega_{t,s} \end{aligned} \quad (2)$$

- ▶ A hullámfelszínen igaz a Bernoulli-törvény (állandó külső nyomást feltételezve).

Kapjuk:

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \eta = 0 \quad \partial \Omega_{t,s}\text{-on} \quad (3)$$

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- ▶ A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\nu}\phi(t, x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- ▶ A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\nu}\phi(t, x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

Ha nem lép fel erőhatás, akkor ez nulla.

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- ▶ A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\nu}\phi(t, x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

Ha nem lép fel erőhatás, akkor ez nulla.

Ha fellép erőhatás:

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- ▶ A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\nu}\phi(t, x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

Ha nem lép fel erőhatás, akkor ez nulla.

Ha fellép erőhatás:

- ▶ hullámgenerátor, hajó oldala - oldalt
- ▶ földrengés - alul

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- ▶ Hullámeqyenlet.

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- ▶ Hullámegyenlet.
- ▶ Sekélyvízi egyenlet.

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- ▶ Hullámegyenlet.
- ▶ Sekélyvízi egyenlet.
- ▶ Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- ▶ Hullámegyenlet.
- ▶ Sekélyvízi egyenlet.
- ▶ Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).
- ▶ Korteweg - De Vries (KdV) - egyenlet (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 3-adrendű).

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- ▶ Hullámegyenlet.
- ▶ Sekélyvízi egyenlet.
- ▶ Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).
- ▶ Korteweg - De Vries (KdV) - egyenlet (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 3-adrendű).
- ▶ A fentiekben a második peremfeltétel linearizációja. Az előző egyszerűsítése, analitikus megoldhatóság, szolitonok.

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- ▶ Hullámegyenlet.
- ▶ Sekélyvízi egyenlet.
- ▶ Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).
- ▶ Korteweg - De Vries (KdV) - egyenlet (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 3-adrendű).
- ▶ A fentiekben a második peremfeltétel linearizációja. Az előző egyszerűsítése, analitikus megoldhatóság, szolitonok.
- ▶ Áramlásra a Laplace-egyenlet helyett a Navier - Stokes - egyenleteket használni.

Nehézségek

- ▶ Elmélet.

Nehézségek

- ▶ Elmélet.
 - ▶ Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.

Nehézségek

- ▶ Elmélet.
 - ▶ Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
 - ▶ Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.

Nehézségek

- ▶ Elmélet.
 - ▶ Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
 - ▶ Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.
- ▶ Numerikus szimulációk.

Nehézségek

- ▶ Elmélet.
 - ▶ Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
 - ▶ Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.
- ▶ Numerikus szimulációk.
 - ▶ Különböző skálák: vízmélység - hullámmagasság.

Nehézségek

- ▶ Elmélet.
 - ▶ Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
 - ▶ Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.
- ▶ Numerikus szimulációk.
 - ▶ Különböző skálák: vízmélység - hullámmagasság.
 - ▶ Hosszú szimulációs idő: 1-2 nap - stabilitás.

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:
 - ▶ Adott Ω_{t_n} .

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:
 - ▶ Adott Ω_{t_n} .
 - ▶ A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:
 - ▶ Adott Ω_{t_n} .
 - ▶ A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
 - ▶ A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$ -et.

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:
 - ▶ Adott Ω_{t_n} .
 - ▶ A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
 - ▶ A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$ -et.
- ▶ Mi ezzel a probléma?

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:
 - ▶ Adott Ω_{t_n} .
 - ▶ A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
 - ▶ A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$ -et.
- ▶ Mi ezzel a probléma?
 - ▶ Explicit; nem lesz stabil:

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:
 - ▶ Adott Ω_{t_n} .
 - ▶ A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
 - ▶ A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$ -et.
- ▶ Mi ezzel a probléma?
 - ▶ Explicit; nem lesz stabil:
 - ▶ sok kis időlépés alatt a hiba nő,

Próbálkozások, eredmények

- ▶ Lehetséges algoritmus vázlata:
 - ▶ Adott Ω_{t_n} .
 - ▶ A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
 - ▶ A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$ -et.
- ▶ Mi ezzel a probléma?
 - ▶ Explicit; nem lesz stabil:
 - ▶ sok kis időlépés alatt a hiba nő,
 - ▶ vagy nem is konvergál az időlépés finomításával, vagy stabilná tehető, de extrém kis időlépést kell venni, amivel nagyon hosszú ideig fut.

Kívánalmak, numerikus módszer választása

- ▶ Egy nagy hullám (utazóhullám) sebességét pontosan kövesse milliós nagyságrendű időlépésen keresztül.

Kívánalmak, numerikus módszer választása

- ▶ Egy nagy hullám (utazóhullám) sebességét pontosan kövesse milliós nagyságrendű időlépésen keresztül.
- ▶ Maradjon meg a rendszer össz energiája.

Kívánalmak, numerikus módszer választása

- ▶ Egy nagy hullám (utazóhullám) sebességét pontosan kövesse milliós nagyságrendű időlépésen keresztül.
- ▶ Maradjon meg a rendszer össz energiája.
- ▶ Stabil maradjon inhomogén Neumann-peremfeltételek esetén is (földrengés, mozgó objektum által keltett hullám).

Diszkrétizáció

- ▶ Milyen módszert válasszunk?

Diszkrétizáció

- ▶ Milyen módszert válasszunk?
 - ▶ Véges differencia - bonyolult mozgatni, vagy az osztópontok számát kell változtatni.

Diszkretizáció

- ▶ Milyen módszert válasszunk?
 - ▶ Véges differencia - bonyolult mozgatni, vagy az osztópontok számát kell változtatni.
 - ▶ Végeselem - egyszerűbb mozgatás, egyszerűbb analízis.

Diszkretizáció

- ▶ Milyen módszert válasszunk?
 - ▶ Véges differencia - bonyolult mozgatni, vagy az osztópontok számát kell változtatni.
 - ▶ Végeelem - egyszerűbb mozgatás, egyszerűbb analízis.
- ▶ Végeelem - módszert választunk.

Diszkretizáció (folyt.)

- ▶ Vízszintesen N_x , függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.

Diszkretizáció (folyt.)

- ▶ Vízszintesen N_x , függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- ▶ $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x, y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.

Diszkretizáció (folyt.)

- ▶ Vízszintesen N_x , függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- ▶ $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x, y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.
- ▶ $\eta(t, x) \approx \sum_{j=1}^{N_x} a_j(t) \eta_j(x)$

Diszkrétizáció (folyt.)

- ▶ Vízszintesen N_x , függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- ▶ $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x, y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.
- ▶ $\eta(t, x) \approx \sum_{j=1}^{N_x} a_j(t) \eta_j(x)$
- ▶ $\phi(t, x, y) \approx \sum_{j=1}^{N_x \cdot N_y} b_j(t) \phi_j(x, y)$

Diszkretizáció (folyt.)

- ▶ Vízszintesen N_x , függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- ▶ $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x, y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.
- ▶ $\eta(t, x) \approx \sum_{j=1}^{N_x} a_j(t) \eta_j(x)$
- ▶ $\phi(t, x, y) \approx \sum_{j=1}^{N_x \cdot N_y} b_j(t) \phi_j(x, y)$
- ▶ Közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk, ahol az ismeretlenek az $\{a_j(t)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ függvények.

A variációs elv

- ▶ Hamilton-elv: egy rendszer úgy mozog, hogy a „hatásfüggvény” \mathcal{L} a lehető legkisebb.

A variációs elv

- ▶ Hamilton-elv: egy rendszer úgy mozog, hogy a „hatásfüggvény” \mathcal{L} a lehető legkisebb.
- ▶ A megfelelő szélsőérték feladat (Euler - Lagrange egyenletek) felírásával kapható az (1)-(3) rendszer.

Azaz azt használjuk, hogy az összes lehetséges iránymenti derivált nulla.

A variációs elv

- ▶ Hamilton-elv: egy rendszer úgy mozog, hogy a „hatásfüggvény” \mathcal{L} a lehető legkisebb.
- ▶ A megfelelő szélsőérték feladat (Euler - Lagrange egyenletek) felírásával kapható az (1)-(3) rendszer.

Azaz azt használjuk, hogy az összes lehetséges iránymenti derivált nulla.

- ▶ Luke '67: \mathcal{L} konkrét megadása:

$$\mathcal{L}(\phi, \eta) = \int_0^T \int_0^L \partial_t \eta(t, x) \phi(t, x) - \frac{1}{2} \eta^2(t, x) dx dt - \int_0^T \int_0^L \int_0^{\eta(t, x)} \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2. \quad (4)$$

A variációs elv (folyt.)

- ▶ Ötlet: diszkrétizáljuk ezt!

A variációs elv (folyt.)

- ▶ Ötlet: diszkretizáljuk ezt!

Azokat az egyenleteket írjuk fel, amelyek az η_t -vel

$$\partial_{\eta_j} \mathcal{L} = 0 \quad \text{és} \quad \partial_{\phi_j} \mathcal{L} = 0$$

egyenlőségekből adódnak.

A variációs elv (folyt.)

- ▶ Ötlet: diszkretizáljuk ezt!

Azokat az egyenleteket írjuk fel, amelyek az η_t -vel

$$\partial_{\eta_j} \mathcal{L} = 0 \quad \text{és} \quad \partial_{\phi_j} \mathcal{L} = 0$$

egyenlőségekből adódnak.

- ▶ Jó numerikus eredmények, de inhomogén Neumann-peremfeltételek esetén instabil.

Hamilton - rendszer

- ▶ Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.

Hamilton - rendszer

- ▶ Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.
- ▶ Össz energia: Hamilton - függvény (\mathcal{H})

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(p(t, \cdot), q(t, \cdot)),$$

ahol p és q az energiát meghatározó két mennyiség (általánosított helyzet és momentum).

Hamilton - rendszer

- ▶ Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.
- ▶ Össz energia: Hamilton - függvény (\mathcal{H})

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(p(t, \cdot), q(t, \cdot)),$$

ahol p és q az energiát meghatározó két mennyiség (általánosított helyzet és momentum).

- ▶ A rendszer dinamikáját az energiák „egymásba alakulása” adja meg:

$$\begin{cases} \partial_q \mathcal{H}(t) = p \\ \partial_p \mathcal{H}(t) = -q. \end{cases}$$

Hamilton - rendszer

- ▶ Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.
- ▶ Össz energia: Hamilton - függvény (\mathcal{H})

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(p(t, \cdot), q(t, \cdot)),$$

ahol p és q az energiát meghatározó két mennyiség (általánosított helyzet és momentum).

- ▶ A rendszer dinamikáját az energiák „egymásba alakulása” adja meg:

$$\begin{cases} \partial_q \mathcal{H}(t) = p \\ \partial_p \mathcal{H}(t) = -q. \end{cases}$$

- ▶ A hullámok dinamikáját is le lehet így írni (Zakharov, '68).

Hamilton - rendszer

- ▶ Mire jó ez?

Hamilton - rendszer

- ▶ Mire jó ez?
 - ▶ Speciális numerikus módszereket fejlesztettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják” .

Hamilton - rendszer

- ▶ Mire jó ez?
 - ▶ Speciális numerikus módszereket fejlesztettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják” .
- ▶ A (1)-(3) diszkretizált alakja ilyen lesz?

Hamilton - rendszer

- ▶ Mire jó ez?
 - ▶ Speciális numerikus módszereket fejlesztettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják” .
- ▶ A (1)-(3) diszkretizált alakja ilyen lesz?
 - ▶ Az eredeti $\{a_j(t)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ ismeretlenekre nézve biztosan nem.

Hamilton - rendszer

- ▶ Mire jó ez?
 - ▶ Speciális numerikus módszereket fejlesztettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják” .
- ▶ A (1)-(3) diszkretizált alakja ilyen lesz?
 - ▶ Az eredeti $\{a_j(t)\}_{j=1}^{N_x}, \{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ ismeretlenekre nézve biztosan nem.
- ▶ $\partial_a \mathcal{H}(t) = \mathbf{b}$ esetén a kettő dimenziója meg kell, hogy egyezzen.

Hamilton - rendszer konstrukciója

- ▶ A $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ együtthatófüggvényeket kifejezzük csak a peremen levőkkel (azokból N_x van).

Hamilton - rendszer konstrukciója

- ▶ A $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ együtthatófüggvényeket kifejezzük csak a peremen levőkkel (azokból N_x van).
 - ▶ Ehhez a diszkrét Dirichlet - Neumann operátort használunk.

Hamilton - rendszer konstrukciója

- ▶ A $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ együtthatófüggvényeket kifejezzük csak a peremen levőkkel (azokból N_x van).
 - ▶ Ehhez a diszkrét Dirichlet - Neumann operátort használunk.
- ▶ Ezzel Hamilton-rendszer nyerhető a diszkretizált feladatra.

Hamilton - rendszer kezelése

- ▶ Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.

Hamilton - rendszer kezelése

- ▶ Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.
 - ▶ Monográfia a témakörről:

Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.

Hamilton - rendszer kezelése

- ▶ Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.

- ▶ Monográfia a témakörről:

Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.

- ▶ Szükséges lenne magasabb rendű.

Hamilton - rendszer kezelése

- ▶ Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.

- ▶ Monográfia a témakörről:

Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.

- ▶ Szükséges lenne magasabb rendű.
- ▶ Fontos lenne a pontos hibaanalízis a benne szereplő konstansok meghatározásával.

Hamilton - rendszer kezelése

- ▶ Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.

- ▶ Monográfia a témakörről:

Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.

- ▶ Szükséges lenne magasabb rendű.
- ▶ Fontos lenne a pontos hibaanalízis a benne szereplő konstansok meghatározásával.
- ▶ Lehetséges könnyítés:

Hamilton - rendszer kezelése

- ▶ Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.
 - ▶ Monográfia a témakörről:
Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.
- ▶ Szükséges lenne magasabb rendű.
- ▶ Fontos lenne a pontos hibaanalízis a benne szereplő konstansok meghatározásával.
- ▶ Lehetséges könnyítés:
 - ▶ mindent linearizált peremfeltétel esetén.

További feladatok

- ▶ Ugyanez Navier - Stokes egyenletekre.



További feladatok

- ▶ Ugyanez Navier - Stokes egyenletekre.
- ▶ Átbukó hullámok modellezése.

