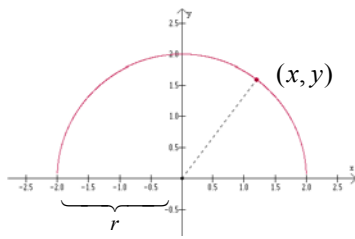


I. Területszámítás :

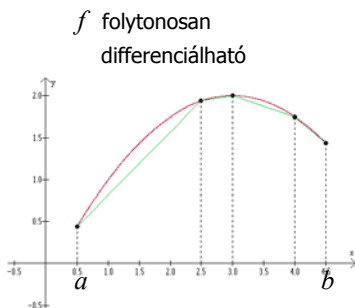
Pl. : (Kör területe) $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$,



$$T_O = 2 \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r \cdot \int_{-r}^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx = 2r^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt =$$

$$\stackrel{\substack{\frac{x}{r} = \sin t, \quad x = r \cdot \sin t \\ dx = r \cdot \cos t}}{=} 2r^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2r^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2r^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = r^2 \cdot \pi$$

II. Síkgörbe ívhossza :



Egy adott felbontáshoz tartozó poligon hossza : $\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$

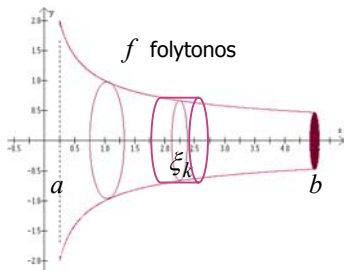
$$= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}, \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

Síkgörbe ívhossza : $I = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$.

Pl. : (Kör kerülete)

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad K_O = 2 \cdot \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2r \cdot \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx = 2r \cdot \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_{x=-r}^{x=r} = 2r \cdot \pi$

III. Forgástest térfogata :



Egy adott felbontáshoz tartozó közelítő térfogat : $\sum_{k=1}^n (f(\xi_k))^2 \cdot \pi \cdot (x_k - x_{k-1})$

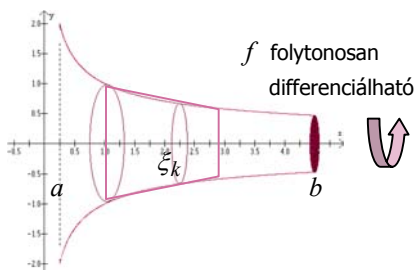
Forgástest térfogata : $I = \pi \cdot \int_a^b f^2$.

Pl. : (Gömb térfogata)

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad V_O = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-r}^{x=r} = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$

IV. Forgástest palástjának felszíne :

Egy adott felbontáshoz tartozó közelítő palást-felstín :

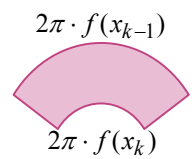


$$\sum_{k=1}^n 2\pi \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n 2\pi \cdot f(\eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \approx (\eta_k \in (x_{k-1}, x_k))$$

$$\approx 2\pi \cdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}, \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

Forgástest palástjának felszíne : $F = 2\pi \cdot \int_a^b f \cdot \sqrt{1 + f'^2}$.



Pl. : (Gömb felszíne)

$F_O = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \cdot \int_{-r}^r r dx = 4r^2 \cdot \pi$