Yufei Zhao: Hypergraph limits via martingales, arXiv:1302.1634. (2013. március 13.)

$r(A)$: A összes nem üres részhalmaza; $r_<(A)$: A összes valódi részhalmaza; $r(A,m)$: A összes legfeljebb m elemű részhalmaza; $[k]=\{1,\dots,k\}$.

k-uniform hipergrafon: $W:[0,1]^{r_<([k])}\to[0,1]$ (a $[k]$ permutációira nézve) szimmetrikus, mérhető függvény.

Homomorfizmussűrűség: F véges k-uniform hipergráf, W k-uniform hipergrafon.

$$t(F,W)=\int_{[0,1]^{r(V(F),k-1)}}\prod_{A\in E(F)}W(\mathbf{x}_{r_<(A)})d\mathbf{x}.$$

Ha G k-uniform hipergráf, hom a homomorfizmusok száma F-ből G-be:

$$t(F,G)=\frac{\hom(F,G)}{|V(G)^{|V(F)|}}.$$

(G_n) hipergráfok sorozata konvergens, ha minden véges F-re $t(F,G_n)$ konvergens. A sorozat konvergál a W hipergrafonhoz, ha minden véges F-re $t(F,G_n)\to t(F,W)$ teljesül $n\to\infty$ esetén.

Tétel: (Elek Gábor, Szegedy Balázs, 2012): konvergens hipergráfok sorozatához van olyan hipergrafon, amihez a sorozat konvergál.

A cikk ezt bizonyítja ultralimeszek felhasználása nélkül.

$(k-1)$-es **vágásnorma** $W:[0,1]^{r_<([k])}\to\mathbb{R}$ függvényre:

$$||W||_{\square^{k-1}}=\sup_{S_1,\dots,S_k\subseteq[0,1]^{r([k-1])}}\left|\int_{\bigcap_{i=1}^k\pi^{-1}_{r([k]\setminus\{i\})}(S_i)}W(\mathbf{x}_{r_<([k])})d\mathbf{x}\right|,$$

ahol $\pi_{r([k]\setminus\{i\})}:[0,1]^{r_<([k])}\to[0,1]^{r([k]\setminus\{i\})}$ a projekció, ami kihagyja az i-t tartalmazó részhalmazokhoz tartozó koordinátákat; S_j-k pedig szimmetrikus mérhető halmazok.

k-uniform hipergrafonvektor: $\mathbf{W}=(W^1,W^2,\dots)$ k-uniform hipergrafonok sorozata.

Homomorfizmussűrűség: $\mathbf{W}$ k-uniform hipergrafonvektor, $\alpha:E(F)\to\mathbb{N}$ esetén

$$t_\alpha(F,\mathbf{W})=\int_{[0,1]^{r(V(F),k-1)}}\prod_{A\in E(F)}W^{\alpha(A)}(\mathbf{x}_{r_<(A)})d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Konvergencia: A $\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2,\dots$ k-uniform hipergrafonokból álló sorozat konvergál a $\mathbf{W}$ hipergrafonvektorhoz, ha

- $t_\alpha(F,\mathbf{W}_n)\to t_\alpha(F,\mathbf{W})$ teljesül $n\to\infty$ esetén minden véges F-re és $\alpha:E(F)\to\mathbb{N}$-re;
- minden $\sum_{i=1}^l c_iW^i=b$ alakú egyenlőség, mely véges sok n kivételével érvényes $\mathbf{W}_n$-ben, fennáll $\mathbf{W}$-ben is (pontonként, ahol c_i és b számok, a jobb oldal konstans hipergrafon).

Tétel: Minden k-uniform hipergrafonvektorokból álló $\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2,\dots$ sorozatnak van olyan részsorozata, mely konvergál valamely $\mathbf{W}_\infty$ k-uniform hipergrafonvektorhoz.

Counting lemma: Legyenek $\mathbf{U},\mathbf{W}$ k-uniform hipergrafonvektorok, F véges k-uniform hipergráf, $\alpha:E(F)\to\mathbb{N}$ tetszőleges. Ha $||U^i-W^i||_{\square^{k-1}}\le\varepsilon$ minden i-re az α értékkészletéből, akkor

$$|t_\alpha(F,\mathbf{U})-t_\alpha(F,\mathbf{W})|\le|E(F)|\varepsilon.$$

Partíciók: Ha $\mathcal{P}$ a $[0,1]^{r([k-1])}$ egy partíciója, legyen $\pi^*(\mathcal{P})$ a $[0,1]^{r_<([k])}$ kockában az a partíció, mely $\pi^{-1}_{r([k]\setminus\{i\})}(\mathcal{P})$ $(i=1,\dots,k)$ legkisebb közös finomítása. Ha W egy k-uniform hipergrafon, $W_\mathcal{P}$ legyen k-uniform hipergrafon, melyet úgy kapunk, hogy $\pi^*(\mathcal{P})$ minden celláján az új érték W abban a cellában számolt átlaga.

Gyenge regularitási lemma: Ha $W^1,W^2,\dots,W^m$ k-uniform hipergrafonok sorozata és $\mathcal{P}$ partíciója $[0,1]^{r([k-1])}$-nek, akkor minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $\mathcal{P}$-nek olyan $\mathcal{P}'$ finomítása, mely legfeljebb $|\mathcal{P}|2^{km/\varepsilon^2}$ elemű, és amire érvényes, hogy $||W^i-W^i_{\mathcal{P}'}||_{\square^{k-1}}\le\varepsilon$ fennáll minden $1\le i\le m$-re.

Cellákhoz tartozó hipergrafonok: Ha $C\subseteq[0,1]^{r([k-1])}$ szimmetrikus mérhető halmaz, az ehhez tartozó $(k-1)$-hipergrafon:

$$Y^C(\mathbf{x})=\int_0^1\mathbb{I}_C(\mathbf{x},x_{[k-1]})dx_{[k-1]}\qquad(\mathbf{x}\in[0,1]^{r_<([k-1])}). \tag{2}$$