Alkalmazott matematikus szak
Záróvizsga kérdései

A: Törzsanyag

Al1. Lineáris Algebra

Vektortér, lineáris függetlenség, generátorrendszer, bázis. Dimenzió, egyértelműsége.

Lineáris leképezés, lin. transzformáció, mátrixuk. Mátrixműveletek. Determináns, tulajdonságai. Lineáris egyenletrendszerek, megoldásuk, Cramer-szabály.

Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus-, minimálpolinom, Cayley-Hamilton tétel.

Bilineáris függvények, mátrixuk. Ortogonális bázis létezése. Sylvester-féle tehetetlenségi tétel. Valós és komplex euklideszi terek. Adjungált; unitér, önadjungált és normális lineáris transzformációk.

Al2. Csoportok, polinomok, Galois-elmélet

Csoport (példák!), részcsoport, izomorfizmus, homomorfizmus. Mellékosztályok, Lagrange tétele. Normálosztó, faktorcsoport. Homomorfizmustétel, izomorfizmustételek. Jordan-Hölder tétel. Permutációcsoportok, S_n, A_n (egyszerűsége $n \geq 5$ esetén). p-csoportok, Sylow-tételek. Feloldható csoportok. Véges Abel-csoportok alaptétele.

$K[x]$ polinomgyűrű, gyöktényezős felbontás, többszörös gyökök. Rezultáns, diszkrimináns. Másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása $\mathbb{C}$ felett.

Többváltozós polinomok, szimmetrikus polinomok alaptétele.

Testbővítések, egyszerű bőv., véges bőv., algebrai bőv. Felbontási test. Normális és szeparábilis bővítések. Körosztási testek. Geometriai szerkeszthetőség. Véges testek.

Galois-csoport. A Galois-elmélet alaptétele. Egyenletek megoldhatósága gyökjelekkel.

Al3. Egyéb algebrai struktúrák

Gyűrűk (példák!), részgyűrű, ideál, homomorfizmustétel. Egységelemes, kommutatív, ill. nullosztómentes gyűrűk. Hányadostest. Főideálgyűrűk, euklideszi gyűrűk.

Számelmélet gyűrűkben; prím-, irreducibilis elemek, norma. Algebrai számok, algebrai egészek. Nevezetes transzcendens számok.

Részben rendezett halmazok, hálók.

An1. Analízis

Valós számok. R^n. Sorozatok. Konvergencia. $(1 + 1/n)^n$. Exponenciális függvény, hatványozás. Végtelen sorok, konvergencia-kritériumok. Cauchy-Hadamard tétel. Konkrét Tayor sorok (sin, cos, binomiális, arctg). L'Hospital szabály.

An2. Analízis

Folytonosság. Határérték. Egyenletes folytonosság. Valós-valós függvények differenciálhatósága. Differenciálási szabályok. Rolle-, Lagrange, Darboux-tételek. Magasabb deriváltak, Taylor formula. Többdimenziós differenciálás.

An3. Analízis

Primitív függvény. Riemann-integrál. Integrálási alapképletek és szabályok. Racionális törtfüggvények integrálása, racionalizáló helyettesítések. Newton-Leibniz formula. Alkalmazások: Wallis-, Stirling-formula. Improprius integrál. $\int_0^\infty sinx/x$, $\int_0^\infty exp(-x^2)$. Ívhossz.

An4. Analízis

Riemann-Stieltjes integrál, vonalintegrál. Paraméteres integrálok. Jordan-mérték. Többdimenziós Riemann-integrál. Lebontási (Fubini-)tétel. Feltételek síktartomány $\to R^2$ leképezés primitív-függvény létezésére.

An5. Analízis

Absztrakt mérték és integrál-elmélet. Mérhető tér, mérhető leképezések. Borel halmazok. Integrál mértékterekben. Beppo-Levi-tétel, Fatou-lemma, Lebesgue-mérték, Lebesgue–integrál

Cs1. Véges matematika

Gráfok összefüggőségei, párosításai, színezései. Síkgráfok. Extremális és Ramsey típusú tételek. Gráfalgoritmusok (keresések, feszítőfa, párosítás, legrövidebb utak, folyamok).

Cs2. Számítástudomány

Számítógép-modellek, rekurzív nyelvek, eldönthetőség. Bonyolultsági osztályok, NP-teljesség.

D1. Közönséges differenciálegyenletek

Elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásának létezése és egyértelműsége. A lineáris rendszer megoldásainak előállítása.

D2. Parciális differenciálegyenletek

A másodrendű parciális differenciálegyenletekre vonatkozó feladatok klasszikus es általánosított megoldásai

F1. Fourier–sorok

Trigonometrikus Fourier–sorok és Fourier–transzformáció

Fourier–transzformáció az $L^1(\mathbb{R})$ és az $L^2(\mathbb{R})$ téren. Tulajdonságai, konvolúció, inverziós formula, kapcsolat a deriválttal. Fourier–sorok konvergenciája és szummációja. Diszkrét Fourier–transzformált, FFT-algoritmusok.

F2. Funkcionálanalízis

Banach- és Hilbert-terek és operátorainak alaptételei.

G1. Geometria

Konvex és differenciálgeometria

Affin terek konvex halmazai, poliéderek, politópok, másodrendű görbék, görbület, torzió, Frenet-formulák, felületek görbületi mennyiségei, felületi pontok osztályozása.

I1. Informatika

Adjon áttekintést azokról az alapvető adatszervezési és algoritmus tervezési technikákról, melyekkel a keresési, rendezési és kiválasztási feladatokat hatékonyan tudjuk megoldani.

K1. Komplex függvénytan

Reguláris függvény. Hatvány és Laurent sorfejtés. Izolált szingularitások. Integráltételek. Reguláris függvények sorozatai. Konform leképezések.

N1. Numerikus lineáris algebra

a) A Gauss elimináció és az LU felbontás kapcsolata. Főelemkiválasztási stratégiák teli és ritka mátrixok esetén.

b) Az általánosított inverz definíciója és tulajdonságai, egyértelműsége. A teljes rangú mátrixok esete.

d) Vektornormák; illeszkedő és indukált mátrixnormák. A mátrixnormák és a spektrálsugár kapcsolata. Rekurzív vektorsorozatok konvergenciája.

N2. A függvényközelítés numerikus módszerei

Interpoláció: Lagrange, Hermite; legkisebb négyzetek, egyenletesen legjobb közelítés.

N3. Integrálok numerikus kiszámítása, közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Elemi képletek, összetett képletek és konvergenciájuk folytonos függvényeken; Gauss-kvadratúrák; közönséges differenciálegyenletek megoldása: konzisztencia, stabilitás, konvergencia; Runge-Kutta és többlépéses módszerek.

O1. Operációkutatás

Dualitás a lineáris programozásban

Farkas lemma, a korlátosság feltétele, dualitás tétel, optimalitási kritériumok, a szimplex algoritmus és végességének bizonyítása Bland szabállyal.

V1. Valószínűségszámítás

Valószínűségeloszlások, függetlenség. Valószínűségi változók, vektorváltozók és jellemzőik. Konvergenciafajták, kapcsolataik. Nagy számok gyenge és erős törvényei. Karakterisztikus függvény, határeloszlás–tételek. A feltételes várható érték fogalma és tulajdonságai. Martingálok, szubmartingálok, martingálkonvergencia–tételek.

V2. Sztochasztikus folyamatok

Poisson folyamat. Diszkrét paraméterű Markov–láncok (visszatérőség, az átmenetvalószínűség függvény határértéke, stacionárius eloszlás). Felújítási folyamatok (a felújítási függvény, aszimptotikus viselkedés, a felújítási függvény növekményének viselkedése). A Wiener–folyamat (konstrukció, a trajektóriák elemi tulajdonságai).

V3. Matematikai statisztika

Statisztikai mező, minta. Tapasztalati eloszlás, Glivenko–Cantelli tétel. Elégséges statisztika, faktorizációs tétel, Rao–Blackwell tétel. Fisher–információ, Cramer–Rao egyenlőtlenség. Pontbecslések tulajdonságai, maximum–likelihood, momentum- és Bayes–módszer. Hipotézisvizsgálat, klasszikus próbák. Többdimenziós normális eloszlás, legkisebb négyzetes becslés és lineáris hipotézis normális lineáris modellben.

A sávok kérdései

Adatbázisok elmélete

(A két kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Shannon kommunikációs modellje, a Shannon entrópia, és a csatorna alaptétel. Információs rendszerek modellje, a Kolmogorov entrópia alapvető tulajdonságai.

2) Relációs lekérdező nyelvek (konjunktiv lekérdezések, a relációs algebra és a vele ekvivalens nyelvek, a nyelvek kifejező ereje es bonyolultsága). A relációs adatbázisok megszorításai es függőségei. Az alapvető függőségek, implikáció és normalizálás.

A Számítógépi Geometria sáv záróvizsga kérdései

1) Algoritmusos geometria: sokszögtrianguláció, sokszögfelbontás, két- és háromdimenziós konvex burok algoritmusok, Voronoi-diagramok, elrendezések, keresés (lokalizáció) és metszet.

2) Geometriai modellezés: interpolációs spline görbék, approximációs görbetervezési eljárások, a B-spline függvények, felületillesztési módszerek.

Számítástudomány sáv

(Az öt kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Kupacok és szótárak, alkalmazásaik. Őnkiegyensúlyozó struktúrák, amortizációs idő.

2) Randomizált algoritmusok és bonyolultságosztályok, kommunikációs bonyolultság, döntési fák. Boole-hálózatok. Kriptográfia.

3) Kombinatorikus optimalizálás: Gráfbejárások és max-vissza sorrend alkalmazásai. Dinamikus programozás. Közelítő algoritmusok. Folyam és párosítási feladatok megoldásai.

4) A WWW és hálózatok matematikája: A webkeresők felépítése és működése. Weboldalak rangsorolása hiperhivatkozások alapján (PageRank, HITS)

5) Számítógépi geometria: Konvex burok keresés síkban és térben, alkalmazás Voronoi diagramokra és Delaunay háromszögekre. Síkdarabolások, nagy konvex sokszögek.

Alkalmazott diszkrét matematika sáv

(A négy kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Gráfelmélet: Gráfok többszörös összefggősége és irányításai. Konstruktív karakterizációk. A paritás szerepe gráfelméleti problémákban.

2) Szimmetrikus struktúrák és kódok: Blokkrendszerek, t-rendszerek. A Fisher-egyenlőtlenség. Négyzetes blokkrendszerek. Erősen reguláris gráfok. Kódok, becslések a paraméterekre. Lineáris és ciklikus kódok. Perfekt kódok.

3) Adatbányászat: Asszociációs szabályok, algoritmusok ezek keresésére. Klasszifikáció feladata és megoldási módszerei. Klaszterező eljárások.

4) Extremális struktúrák: Gráfok: Erdős-Stone-Simonovits, Erdős-Gallai, Kővári-T.Sós-Turán tétel, konstrukciók véges geometriákkal. Halmazrendszerek: Permutációs módszer, Erdős-Ko-Rado tétel uniform és nem-uniform esetben, Sperner tétel, YBLM egyenlőtlenség. Balra tömörítés. Árnyék, Katona-Kruskal tétel. Algebrai módszerek, Ray Chauduri-Wilson tétel L-metsző és uniform L-metsző rendszerekről.

Dinamikai rendszerek és matematikai modellezés

(A három kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Operátor félcsoportok és alkalmazásuk a Dirichlet-féle peremfeltételű hővezetési egyenletre. (Hille-Yosida tétel, kontrakció félcsoportok, exponenciális stabilitás, spektrálleképezés tétel.)

2) Ritz-Galjorkin-típusú diszkretizációs módszerek Hilbert-térben lineáris és nemlineáris operátoregyenletek megoldása; a módszerek konstrukciója, a diszkrét megoldások konvergenciája a pontos megoldáshoz.

3) Diszkrét dinamikai rendszerek: Adjunk példákat (különböző diszkrét dinamikai rendszereken szemléltetve) rendszerek különböző dinamikus tulajdonságaira és invariánsaikra!

Parciális differenciálegyenletek sáv

(A három kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Parciális differenciálegyenletek elmélete:
Másodrendű elliptikus egyenletek klasszikus peremérték feladatai és sajátérték feladatai variációs értelmezése

2) Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása:

A Poisson-egyenlet differencia approximációja (kettő dimenzióban) és a keletkező lineáris rendszerek megoldása többrácsos módszerrel

3) Speciális függvények:
Gamma-függvény, Bessel- függvények gömbfüggvények, elliptikus függvények.

Algebra és Számelmélet sáv

1) Prímtesztelés, faktorizáció.

2) Nyilvános kulcsú kriptográfia, RSA, diszkrét logaritmus, a Diffie–Hellman kulcs csere rendszer és annak elliptikus görbe analogonja.

Operációkutatási sávok

1. **Lineáris és nemlineáris optimalizálás**

   (a) A lineáris programozás dualitás elmélete (klasszikus és belsőpontos módszerekre alapuló felépítésben).

   (b) Lineáris programozás algoritmusai (szimplex, criss-cross, Dikin-féle affin skálázásos algoritmus, primál-duál logaritmikus barrier módszer), végességük illetve komplexitásuk.

   (c) Nemlineáris programozás dualitás elmélete (alapfeladat, Lagrange-függvény, nyeregpont, Karush-Kuhn-Tucker tétel, dualitás tételek).

   (d) Nemlineáris programozás algoritmusai (klasszikus és belsőpontos módszerek).

   (e) A Nash-féle equilibrium tétel többszemélyes konkáv játékok esetén (Sperner lemma, Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz 1. és 2. tétele, Brower- és Kakutani-féle fixpont tételek, Nikaido- és Nikaido-Isoda tételek, Shiffman-tétel).

   (f) Sztochasztikus programozás: sztochasztikus programozási feladatok jellemzése. Konvexitási meggondolások. Logkonkáv mértékek alaptétele.

   (g) Többcélfüggvenyű optimalizálás: súlyozásos és ϵ-korlátozásos módszerek

2. **Gazdaságmatematika**

   (a) Keresleti és kínálati függvény, egyensúlyi ár; monopol ár és holtteher veszteség; kétrészes ár; árdiszkrimináció.

   (b) A makrogazdaság alapvető szereplői és piacai. A vállalatok és háztartások optimális makrogazdasági viselkedési modelljei. A makrogazdaság egyensúlyi modellje, Walras törvény.

   (c) Aktív portfólió menedzselés.

   (d) A portfólió hatékonyságának mérése.

   (e) Von Neumann-Morgenstern utility elmélet.

3. **Kombinatorikus optimalizálás**

(a) Matroidok összege és metszete
(b) Teljesen unimoduláris mátrixok és alkalmazásaik
(c) Maximális folyam algoritmusok (Ford-Fulkerson, Edmonds-Karp, előfolyam)
(d) Maximális párosítások (Hall, Tutte, Gallai-Edmonds tételek)
(e) Minimális vágások (Gomory-Hu fa, Nagamochi-Ibaraki algoritmus)
(f) Korlátozás és szétválasztás
(g) Ütemezés párhuzamos gépeken (optimális, ill. jó közelítő megoldások)

Alkalmazott statisztika sáv

1. A többdimenziós normális eloszlás és tulajdonságai. A Wishart eloszlás. Többdimenziós normális eloszlás paramétereire vonatkozó becslés és hipotézisvizsgálat.
2. A változók közötti kapcsolat mérése. Korrelációanalízis. Faktor- és főkomponens analízis. Kanonikus korrelációk.
3. Regresszióanalízis, becslés és hipotézisvizsgálat lineáris modellben. Alkalmazások.
4. Kontingenciatáblák elemzése. Maximum likelihood becslés, loglineáris modellek. Explicit maximum likelihood becslés. Algoritmusok a becslés meghatározására.
5. Idősorok statisztikai analízise.

Pénzügyi folyamatok elemzése

1. Pénzügyi alapfogalmak: részény, bankbetét, kamatlábak, forward, futures, opciók, arbitrázs, hedge. Diszkrét árfolyamváltozások: önfinanszírozó stratégiák, ekvivalens martingálmérték. Piaci teljesség és arbitrázsmentesség, Cox-Ross-Rubinstein modell.
2. Folytonos árfolyamváltozások: geometriai Brown-mozgás, sztochasztikus integrál, sztochasztikus differenciálegyenletek. Girsanov-tétel. Önfinanszírozó stratégiák, arbitrázsmentesség.

3. Európai opciók árazása diszkrét és folytonos időben. Amerikai opciók árazása diszkrét időben. Black–Scholes-formula a piaci dinamika alapján és mint a Cox–Ross–Rubinstein-modell határértéke.

4. Wilkie-féle inflációmodellek.

5. Sztochasztikus kamatintenzítás: Vasicek és Hull–Vasicek modellek, kötvényopciók.

6. VaR modellek jellemzői: kötvények és derivatívok kockáztatott értéke, portfoliók kockázata, kockázatok előrejelzése.

Biztosításmatematika

1. Az életbiztosítások díjkalkulációjának alapelve, nettó és bruttó díjak számítása.

2. Az életbiztozások díjtartalékainak számítása.

3. Az összetett kockázat modellje: nevezetes kár- és kárszámeloszlások, önrész és infláció hatása, Panjer-rekurzió.

4. Díjkalkulációs elvek és tulajdonságaik.

5. Különféle viszontbiztosítási formák. A viszontbiztosítási formák optimalitási tulajdonságai.

6. Sztochasztikus modellek kockázati folyamatokra. A tönkremenés valószínűsége klasszikus kockázati folyamat esetén. A csőd súlyosságára vonatkozó egyenlet. Lundberg-kitevő. Martingálelméleti módszerek alkalmazása.

7. A tönkremenés valószínűségének aszimptotikája szubexponenciális eloszlások esetén. Felújítási modellek alkalmazása kockzázati folyamatokban.

Rendszerelmélet és képfeldolgozás sáv

1. Lineáris rendszerek alaptulajdonságai, irányíthatóság, megfigyelhetőség, minimalitás. Kanonikus realizációk. Stabilizálhatóság és detektálhatóság.

2. Zavarszűrés, stabilizálással. (A, B)-invariáns alterek, irányíthatósági alterek.

3. Külső és belső leírások. Parciális realizációk.

4. Lineáris kvadratikus optimális irányítás. Riccati-féle differenciálegyenlet és a megoldás aszimptotikus viselkedése.

5. Sztochasztikus rendszerek szűrése és optimális irányítása. Dualitás-elv. Sztochasztikus rendszerek realizációelmélete.