Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis 3. vizsgához (sillabusz)

2022/2023, I. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

Jelenléti, szóbeli vizsga lesz. A vizsgatételek közül kettőt húztok. Kb. 60 percetek lesz a tételek vázlatos kidolgozására, amit kb. 20 percben szóban elmeséltek és válaszoltok a vizsgáztató kérdéseire.

Kiöltözni nem kell. Normális, kényelmes, meleg ruhában gyertek.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket és definíciókat, és ezeket pontosan meg is érteni.

Ha valamelyik részre vagy tételre a vizsgázó tudása elégtelen, akkor az egész vizsga értékelése elégtelen.

1. Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben

Euklideszi távolság és skaláris szorzat $\mathbb{R}^p$-ben. Nyílt és zárt gömbök. Pontsorozat limesze. Ekvivalens átfogalmazások. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \dots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. A limeszpont egyértelmű. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. Linearitás. Cauchy-tulajdonság, Cauchy-kritérium. Teljes metrikus tér. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Korlátos halmaz, korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

2. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban

Norma, metrika. $|.|_q$ normák $0 < q \leq \infty$ esetén. $q < 1$ esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség. Hölder- és Minkowski egyenlőtlenség. $1 \leq q \leq \infty$ esetén $|.|_q$ tényleg norma. Normák ekvivalenciája. Véges dimenzióban minden norma ekvivalens. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpélda végtelen dimenzióban. [KG1]

3. Nyílt és zárt halmazok $\mathbb{R}^p$-ben

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja, belseje, külseje, határa. Nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz, halmaz lezártja. Az egész tér és az üres halmaz egyszerre nyílt és zárt. A "nyílt", illetve "zárt" gyömbök és téglák nyíltak, illetve zártak. Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az elemeiből képzett konvergens sorozatok limeszei is elemei. Bármely halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementuma zárt. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt. Zárt halmazok tetszőleges rendszerének metszete zárt. Véges sok zárt halmaz uniója zárt. Végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, illetve végtelen sok zárt halmaz uniója nem biztos, hogy zárt. Sűrű halmazok. $\mathbb{Q}^p$ és $\mathbb{R}^p \setminus \mathbb{Q}^p$ sűrű. A belső/külső pont, nyílt halmaz stb. fogalmak nem függnek attól, hogy melyik normát használjuk. [LTS2, 9–12]; [KG1]

4. Kompakt halmazok

Cantor-metszettétel. Elenpéldák, nem korlátos, illetve nem zárt halmazokkal. Kompakt halmazok. Borel tétele. Ponthalmazok távolsága. Nemüres kompakt és vele diszjunkt nemüres zárt halmaz távolsága pozitív. [LTS2, 18, 21–24. o.]

5. Összefüggő halmazok

Hegymászós feladat: hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő. Példa összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő halmazra. $\mathbb{R}^p$ összefüggő. $\mathbb{R}^p$-ben az üres halmazon és az egész téren kívül nincs más halmaz, amely egyszerre nyílt és zárt is. Összefüggő nyílt halmazban bármely két pont összeköthető töröttvonallal. Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható. Tartomány. [LTS2, 19–21. o.]

6. Többváltozós függvények határértéke

p-változós függvény. Jelölések. p-változós függvény véges és végtelen határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. Felső és alsó határérték. $\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$. $\limsup\limits_{a,A} f = \max\{\lim f(x_n : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a\}$. Átviteli elvek. Határátmenet $\limsup$-ra és $\liminf$-re. Rendőr- és honvéd/csősz-elvek. [LTS2, 28–31. o.]

7. Többváltozós függvények folytonossága

Többváltozós függvények folytonossága. Átviteli elv. Folytonos függvény folytonossága részhalmazokon. Szekciófüggvények. Példa olyan függvényre, amelynek minden szekciófüggvénye folytonos, de a függvény nem folytonos. A kompozíció, összeg, szorzat, hányados folytonossága. Minden polinom folytonos. Az elemi függvények folytonosak. Weierstrass tétele. Egyenletes folytonosság. Heine tétele. [LTS2, 32–36. o.]

8. Parciális deriváltak

Parciális differenciálhatóság. Példa parciálisan differenciálható, de nem folytonos függvényre. Lokális szélsőértékek. Szélsőértékkeresés a parciális deriváltak nullhelyeinek megkeresésével. Adott körbe írt maximális területű háromszög. [LTS2, 39–43. o.]

9. Többváltozós függvények differenciálása

Lineáris függvény; átírás vektorok skaláris szorzatával és mátrixszorzással. Többváltozós függvény differenciálhatósága. Érintősík. Összehasonlítás az egyváltozós esettel. Ha egy függvény differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható és folytonos. Példák arra, hogy ezek nem megfordíthatóak. Egyértelműség. Deriváltvektor, gradiens. [LTS2, 45–48. o.]

10. A derivált és a parciális deriváltak kapcsolata.

A parciális deriváltak folytonosságából következik a differenciálhatóság. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények differenciálhatósága. [LTS2, 48–53]

11. Iránymenti deriváltak. Lagrange-középértéktétel

Iránymenti derivált. Differenciálható fügvény minden irányban differenciálható. Az iránymenti derivált kiszámítása. Gradiens vektor. Lagrange-középértéktétel. Becslés a függvény megváltozására. Ha egy tartományon a derivált 0, akkor a függvény konstans. [LTS2, 53–56. o.]

12. Vektorértékű függvények differenciálása

A lineáris leképezés fogalma és alapvető tulajdonságai: műveletek, mátrixnorma. A lineáris leképezések normált teret alkotnak. Lineáris leképezés reprezentálása mátrixszorzással. Normált valós térből normált valós vektortérbe képező függvények differenciálása. Véges dimenziók esetén a definíció nem függ a normától. A derivált egyértelmű. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha koordinátánként differenciálható. Jacobi-mátrix, Jacobi determináns. Ha f differenciálható, akkor folytonos. Blokkmátrixok. A korábbi deriváltfogalmak összehasonlítása. [LTS2, 81–89]; [KG3]

13. Differenciálási szabályok

Differenciálási szabályok: $f + g$, cf, $f \circ g$. Láncszabály. $|f|^2$, $A \cdot f(x)$, $\langle f(x), g(x)\rangle$ alakú kifejezések differenciálása. Inverz függvény differenciálása. [LTS2, 90–94]; [KG3]

14. Lokális injektivitás

Elégséges feltételek a lokális injektivitásra. [LTS2, 100–104]; [KG4]

15. Lokális szürjektivitás

Elégséges feltételek a lokális szürjektivitásra. [LTS2, 100–104]; [KG4]

16. Inverzfüggvény tétel

Inverzfüggvény-tétel. [LTS2, 104–112]; [KG4]

17. Implicitfüggvény tétel

Impliciten megadott függvény differenciálása. Implicitfüggvény-tétel. A szintvonalak simasága [LTS2, 104–112]; [KG4]

18. Lagrange-féle multiplikátor módszer

Feltételes lokális szélsőértékek. Heurisztika a gradiensek összefüggőségéről. Lagrange-féle multiplikátor módszer. Példák. [LTS2, 104–112]; [KG4]

19. Magasabbrendű deriváltak

Magasabbrendű paricális deriváltak. Többszörös differenciálhatóság. A többszörös differenciálhatóság és a parciális deriváltak differenciálhatóságának kapcsolata. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények akárhányszoros differenciálhatósága. Young tétele (két változatban). A parciális deriválás sorrendjének felcserélhetősége.

A k-adik derivált mind k-lineáris forma és mint homogén k-adfokú polinom. [LTS2, 58–64]

20. Taylor-polinomok

k-adik differenciál. Taylor-polinom. Az $F(a + t(b - a))$ függvény k-adik deriváltjának felírása F k-adik differenciáljával. Tayklor-formula. A Taylor-polinom hibájának nagyságrendje. [LTS2, 64–71]

21. A második derivált alkalmazásai

A második differenciál mint kvadratikus alak. Hesse-mátrix. Lokális szélsőértékhelyek és a Hesse-mátrix definitségének kapcsolata. Konvex és konkáv függvények. Konvex nyílt halmazon értelemezett, kétszer differenciálható fügvény akkor és csak akkor konvex (konkáv), ha a második differenciál minden pontban pozitív (negatív) szemidefinit. [LTS2, 72–77]

22. Jordan-mérték

Jordan-féle külső mérték, belső mérték és mérték. Tengelypárhuzamos téglák térfogata. A belső és a külső mérték ekvivalens definíciója a tér $1/n$ élű kockákra bontásával. A tengelypárhuzamos téglák mérhetők, és a mértékük megegyezik a térfogatukkal. A külső, illetve belső mérték szubbadditivitiása és szuperaditivitása. A külső mérték nem kisebb, mint a belső mérték. Nullmértékű halmazok és tulajdonságaik. Korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha a határa nullmértékű. $\mathbb{R}^p$-beli kompakt halmazon folytonos függvény grafikonja $\mathbb{R}^{p+1}$-ben nullmértékű. Minden gömb és minden poliéder mérhető. Minden korlátos konvex halmaz mérhető. (Az utóbbira a csak bizonyítás vázlata.) [LTS2, 115–122]

23. Jordan-mérhető halmazok

A Jordan-mérhető halmazok $\mathcal{J}$ halmazgyűrűje. A Jordan-mérték az egyetlen $\mathcal{J} \to \mathbb{R}$ függvény, ami pozitív, additív, eltolásinvariáns és normált. Jordan-mérhető halmaz λ-szorosának mértéke. Síkbeli háromszögek területe. A Cantor-halmaz és a Sierpinski-szőnyeg mértéke. [LTS2, 122–129]

24. A Jordan-mérték kiszámítása

Jordan-mérhető halmaz tengelyirányú szeleteinek eggyel kisebb dimenziós külső/belső mértéke Riemann-integrálható és az integráljuk megegyezik a halmaz térfogatával. Általános henger és kúp térfogata. Gömb térfogata. Paralelepipedon térfogata. Mérhető halmaz lineáris transzformáltjának mérhetősége és mértéke. [LTS2, 129–134]

25. Jordan-mérték szerinti integrál

Korlátos függvények integrálása Jordan-mérhető halmazokon. Felosztás, finomítás, finomság. Alsó és felső öszegek, oszcillációs összegek. Alsó és felső integrál. Integrálhatóság és átfogalmazásai. Integrálhatóság részhalmazokon. Integrálhatóság egymásba nem nyúló halmazok unióján. Végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó alsó és felső összegek az alsó, illetve a felső integrálhoz tartanak. Ha a függvény integrálható, akkor végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó integrálközelítő öszegek az integrálhoz tartanak. Összeg, konstansszoros, szorzat, hányados és összetett függvény integrálhatsága. Ha egy függvény korlátos és nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos, akkor integrálható. Halmaz külső és belső mértéke azonos a karakteriszikus függvénye felső, illetve alsó integráljával. [LTS2, 149–155]

26. A Jordan-mérték szerinti integrál kiszámítása

Mérhető halmazok szorzatán vett integrál felbontása az alsó és felső integrálok integráljává. A szukcesszív integrálás tétele. Az $f(x)g(y)$ alakú függvények integrálhatósága. A p-dimenziós gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció (bizonyítás nélkül). Polárkoordinátás helyettesítés. Az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ integrál kiszámítása. [LTS2, 158–167]

27. Paraméteres integrálok

Paraméteres integrálok. Elégséges feltételek a paraméteres integrál folytonosságára, integrálhatóságára és differenciálhatóságára. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Weierstrass-kritérium. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, integrálhatósága és differenciálhatósága. A Γ differenciálhatósága. [LTS2, 358–369]

28. Vonalintegrálok

Görbék. Folytonosság, differenciálhatóság, Lipschitz-tulajdonság, stb. Görbe hossza. Átparaméterezés és megfordítás. Kettévághatóság. Szakaszonként differenciálható görbe hosszának kiszámítása. Valós vonalintegrál. Függetlenség a paraméterezéstől, linearitás és additivitás. Az integrál kiszámítása szakaszonként differenciálható görbén. Triviális felső becslés a vonalintegrál nagyságára. [LTS2, 177–182]

29. Folytonos vektormező primitív függvénye

Newton-Leibniz formula valós vonalintegrálokra. Konzervatív vektormező, primitív függvény és potenciálfüggvény fogalma. A primitív függvény konstans erejéig egyértelmű. Ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek: (a) f-nek létezik primitív függvénye; (b) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt, szakaszonként C^1 görbén; (c) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt töröttvonalon. [LTS2, 182–188]

30. Differenciálható vektormező primitív függvénye

Differenciálható f esetén a primitív függvény létezéséhez szükséges, hogy f' mindenhol szimmetrikus legyen. A lineáris leképezés primitív függvénye. Goursat-lemma valós vonalintegrálokra. A primitív függvény létezése konvex és csillagszerű tartományokon. [LTS2, 189–194]

31. Homotópia és vonalintegrál

Homotóp görbék. A vonalintegrál azonos végpontú, zárt, illetve nullhomotóp görbéken. Egyszeresen összefüggő tartomány. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Példák egyszeresen összefüggő és nem egyszeresen összefüggő tartományokra, és olyan függvényekre, amelyeknek lokálisan létezik, de globálisan nem létezik primitív függvénye. [LTS2, 194–198], [KG5]

Hivatkozások

[LTS1] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[KG1] K.G.: Normák $\mathbb{R}^p$-ben,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf

[KG2] K.G.: Többváltozós függvények alsó és felső határértéke,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_02_limsup.pdf

[KG3] K.G.: Vektorértékű függvények differenciálása,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=r2nQ87xP5rE

[KG4] K.G.: Inverz- és implicitfüggvény-tétel,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=5HiQlIkLhQI

[KG5] K.G.: Analízis 4 jegyzetek
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/Analizis4_Jegyzetek_v18.pdf

[KG6] K.G.: Mágneses örvényerősség és összehurkolódási szám
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_05_OsszeHurka.pdf

[BStv] Biot-Savart törvény, Wikipédia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart-t%C3%B6rv%C3%A9ny

[Atv] Ampère-törvény, Wikipédia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Maxwell-egyenletek

[LN] Linking Number, Wikipédia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number