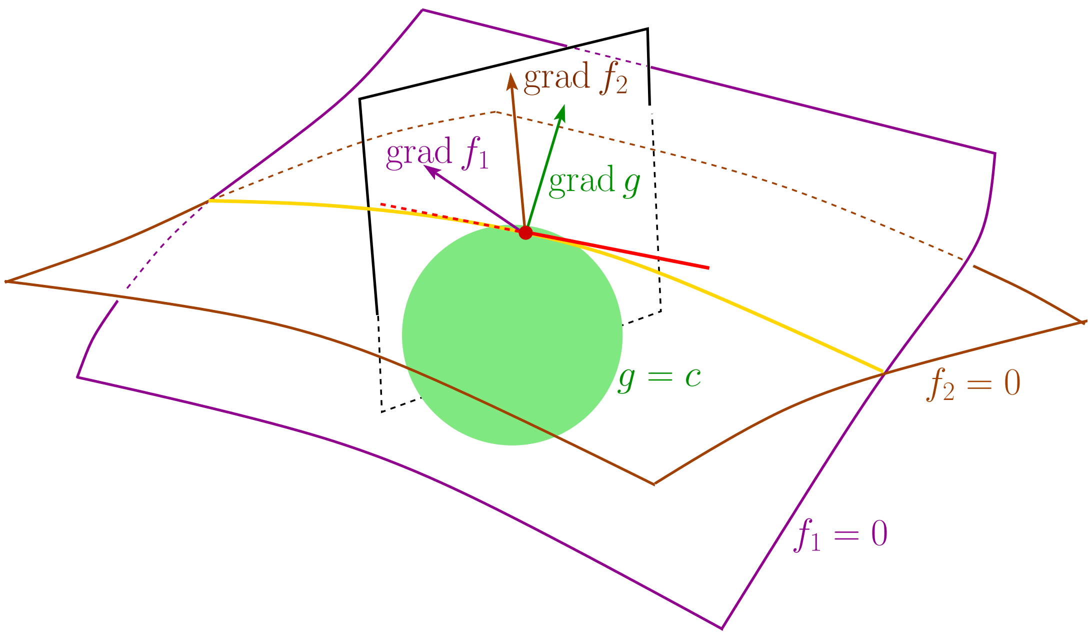
Analízis 3 előadás, 2022

Kós Géza



(Folyamatos szerkesztés alatt. Utolsó módosítás: 2023. január 11., 17:40)

A tervezett témák

A 2022. őszi félév alatt 13 hét alatt 26 analízis előadás lenne, de elmarad az október 31-i előadás (mindenszentek előtti hosszú hétvége) és az egyik előadás helyett ZH lesz (valószínűleg december 7-én). Tehát összesen 24 előadás lesz, eggyel kevesebb, mint tavaly. Ha a tavalyi sebességgel (csigalassúsággal) sikerül haladni, a következők várhatók.

1–3. előadás, szept. 12–19: Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben. Normák. Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban. Topológiai alapfogalmak (belső pont, határpont, külső pont, torlódási pont, izolált pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, kompakt halmaz) euklideszi és metrikus terekben.

4–5. előadás, szept. 21–26: Többváltozós, illetve metrikus téren értelmezett függvények és leképezések határértéke és folytonossága. Alsó és felső határértékek, átviteli elvek, határátmenetek. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai.

6–7. előadás, szept. 28. – okt. 3: Parciális deriváltak. Szélsőérték-keresés kompakt halmazon értelmezett függvényekre. Többváltozós függvények differenciálhatósága. Érintősík, gradiens, iránymenti és deriváltak. Lagrange-féle középértéktétel. A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei.

8–9. előadás, okt. 5–10: Vektorértékű függvények folytonissága és differenciálása. Jacobi-mátrix. A Lagrange-féle becslés leképezésekre. Differenciálási szabályok, láncszabály, inverz leképezés deriváltja.

10–12. előadás, okt. 12–19: Lokális injektivitás, lokális szürjektivitás elégséges feltételei. Inverzfüggvénytétel. Implicitfüggvény-tétel. Szintvonalak és szintfelületek simasága. Feltételes szélsőértékfeladat, Lagrange multiplikátor módszer.

13–15. előadás, okt. 24 – nov. 2: Magasabb rendű deriváltak, n-szer differenciálható leképezések. A Young-tétel. A Taylor-formula. A második derivált alkalmazásai: lokális szélsőértékek és konvexitás szükséges, ill. elégséges feltételei.

16–19. előadás, nov. 7 – nov. 16: Jordan-mérték és többváltozós integrálszámítás. A Jordan-féle belső és külső mérték. A határ külső mértéke. Jordan-mérhető halmazok. A mérhetőség pontos feltétele. A konvex poliéderek és a normáltartományok mérhetősége. A parallelepipedonok térfogata. A Jordan-mérték egybevágóság-invarianciája. A többszörös integrál. Definíció, alaptulajdonságok, az integrálhatóság ekvivalens feltételei. Folytonos és korlátos függvények integrálhatósága. Egy halmaz mérhetőségének és karakterisztikus függvénye integrálhatóságának ekvivalenciája. Folytonos függvénnyel való kompozíció integrálhatósága. A lebontási tétel. A Cavalieri-elv. Normáltartományok térfogata. A gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció. Polárkoordinátás helyettesítés.

20–21. előadás, nov. 21–23: Paraméteres integrálok. Paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Elégséges feltétel az improprius paraméteres integrál egyenletes konvergenciájára. Gamma- és Béta-függvény.

22–24. előadás, nov. 28 – dec. 5: Valós vonalintegrálok és integráltételek. Görbék ívhossza. A vonalintegrál és kiszámítása. A Newton-Leibniz-formula. A primitív függvény létezésének feltételei. Vonalintegrál homotóp görbéken. Gauss-féle összekapcsolódási szám.

Valószínűleg teljesen a következő félévre csúszik át: Green-tétel. Divergencia és rotáció; integráltételek két és három dimenzióban. Maxwell-egyenletek.

I. rész

Topológiai alapfogalmak $\mathbb{R}^p$-ben

Kérdés (hol volt a törpe?)

Aki még nem tette, olvassa el *Az irigy törpe és a bölcsesség köve* c. mesét:

`https://www.komal.hu/cikkek/egyeb/torpe/torpe.h.shtml`

Erősebb idegzetűek meg is hallgathatják:

`https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/IrigyTorpe.mp3`)

A kérdés: Hol volt a törpe pontosan 10, illetve 11 órakor?

Kérdés (hegymászós feladat)

Két hegymászó az $y = h(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $h : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény, és $h(0) = h(1) = 0$. Az egyik hegymászó a $(0,0)$, a másik az $(1,0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy mászás közben minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?
Avagy, léteznek-e biztosan olyan $f, g : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvények, amelyekre $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = g(1)$, és minden $t \in [0,1]$ pillanatban $h(f(t)) = h(g(t))$?

1. Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben

Euklideszi távolság $\mathbb{R}^p$-ben. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens pontsorozat. Ekvivalens átfogalmazások. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \ldots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. Linearitás. Cauchy-tulajdonság. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

1 Mese. *p-dimenziós euklideszi tér*

- *Pontok:* $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{p} = \Big\{(x_1, \ldots, x_p) : x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\Big\}$*;*
- $\mathbb{R}$ *fölötti vektortér*
- *Euklideszi norma:* $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}$
  - $|x| \geq 0$*, egyenlőség csak* $x = 0^p$ *esetén*
  - $|cx| = |c| \cdot |x|$
  - $|x + y| \leq |x| + |y|$*; indukcióval akárhány tagra*
- *Euklideszi távolság:* $d(x, y) = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_p - x_p)^2}$
- *Skaláris szorzat:* $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p$.

1.1 Definíció (nyílt és zárt gömbök)

Ha (H, d) metrikus tér, akkor az $a \in H$ körüli, $r > 0$ sugarú *nyílt* és *zárt* gömb:

$$B(a, r) = \Big\{x \in H : d(x, a) < r\Big\}, \quad \text{illetve} \quad \overline{B}(a, r) = \Big\{x \in H : d(x, a) \leq r\Big\}.$$

Az euklideszi térben

$$B(a, r) = \Big\{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| < r\Big\}, \quad \overline{B}(a, r) = \Big\{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| \leq r\Big\}.$$

1.2 Definíció (pontsorozat limesze)

Legyen $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}^p$ és $b \in \mathbb{R}^p$. Az (a_n) pontsorozat limesze (limeszpontja) b, avagy az (a_n) pontsorozat b-hez tart, avagy $a_n \to b$, avagy $\lim a_n = b$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left\{ \begin{array}{c} \exists n_0 \ \forall n > n_0 \\ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \\ \text{elég nagy } n\text{-re} \\ \text{véges sok } n \text{ kivételével} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} d(a_n, b) < \varepsilon \\ |a_n - b| < \varepsilon \\ a_n \in B(b, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

A pontsorozat konvergens, ha van limesze, illetve divergens, ha nincs.

1.3 Tétel

Legyen

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2p} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Ezek ekvivalensek:

(a) $\mathbf{a}_n \to \mathbf{b}$

(b) $|\mathbf{a}_n - \mathbf{b}| \to 0$

(c) mindegyik $1 \leq i \leq p$-re $a_{n,i} \to b_i$.

1.4 Tétel

- A limeszpont egyértelmű.
- Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát.
- Konvergens sorozat minden részsorozata is ugyanoda tart.
- Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, és $c, d \in \mathbb{R}$, akkor $(ca_n + db_n) \to cA + dB$.

1.5 Definíció (Cauchy-tulajdonság)

Legyen (a_n) pontsorozat valamely (H, d) metrikus térben. Az (a_n) sorozat *Cauchy-tulajdonságú*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n > n_0 \ d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

1.6 Trivialitás

Minden konvergens pontsorozat Cauchy-tulajdonságú.

Biz. $(\Rightarrow)$: legyen $b = \lim a_n$; $\forall \varepsilon > 0$-ra $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b) + d(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ VSK.

1.7 Tétel (Cauchy-kritérium)

$\mathbb{R}^p$-ben bármely pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-tulajdonságú.

Biz. $(\Leftarrow)$: (a_n) Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) koordinátánként Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) koordinátánként konv $\Rightarrow$ (a_n) konv

1.8 Definíció (teljes metrikus tér)

Egy metrikus tér *teljes*, ha a térben minden Cauchy-sorozat konvergens.
Pl. Az $\mathbb{R}^p$ euklideszi tér teljes.

1.9 Definíció (korlátos halmaz)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$. A H halmaz *korlátos*, ha (ezek ekvivalensek):

- az $\left\{|x| : x \in K\right\}$ számhalmaz korlátos, avagy $\exists r \in \mathbb{R} \ H \subset B(0, r)$;
- minden $1 \leq i \leq p$-re az $\left\{x_i : x \in K\right\}$ számsorozat korlátos.

1.10 Definíció (korlátos pontsorozat)

Legyen (a_n) pontsorozat $\mathbb{R}^p$-ben. Az (a_n) sorozat *korlátos*, ha (ezek ekvivalensek):

- az $\left\{a_1, a_2, \dots\right\}$ halmaz korlátos;
- az $|a_n|$ számsorozat korlátos, avagy $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n\ |a_n| \leq K$
- minden $1 \leq i \leq p$-re az $(a_{n,i})$ számsorozat korlátos

1.11 Tétel (Bolzano–Weierstrass tétel)

$\mathbb{R}^p$-ben minden korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.

Biz. Az egydimenziós Bolzano–Weierstrass tételt alkalmazzuk p-szer.

2. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban

Norma, metrika, A $\|.\|_q$ ($q \geq 1$) és $\|.\|_\infty$ normák. Hölder- és Minkowski egyenlőtlenség. Véges dimenzióban minden norma ekvivalens. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpélda végtelen dimenzióban. [KG1]

2.1 Definíció (norma)

Az $\|.\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény egy *norma*, ha

- Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x\| \geq 0$;
- $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0^p$;
- Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$;
- Bármely $x, y \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2.2 Definíció (L_q-norma)

$0 < q < \infty$ és $x \in \mathbb{R}^p$ esetén legyen

$$\|x\|_q = \Big(|x_1|^q + \ldots + |x_p|^q\Big)^{1/q},$$

továbbá legyen

$$\|x\|_\infty = \max\Big(|x_1|, \ldots, |x_p|\Big).$$

Vegyük észre, hogy $\|x\|_2 = |x|$ és $\|x\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|x\|_q$.

2.3 Megjegyzés

Leggyakrabban az L_1, L_2 és az L_∞ normákat szoktuk használni.

2.4 Megjegyzés

$0 < q < 1$ esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség; pl. 2-dimenzióban

$$\Big\|(1, 1)\Big\|_q = 2^{1/q} > 2 = \Big\|(1, 0)\Big\|_q + \Big\|(0, 1)\Big\|_q.$$

2.5 Tétel (Hölder-egyenlőtlenség)

Ha $1 \le q, r \le \infty$ és $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, akkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_p$ és $b_1, \ldots, b_p$ számokra

$$\|a\|_q \cdot \|b\|_r = \Big(|a_1|^q + \ldots + |a_p|^q\Big)^{1/q} \cdot \Big(|b_1|^r + \ldots + |b_p|^r\Big)^{1/r} \ge |a_1 b_1| + \ldots + |a_p b_p|.$$

Biz. Speciális esetek:

- Ha a vagy b a nullvektor, akkor mindkét oldal 0, és kész.
- Ha $q = 1$ és $r = \infty$, akkor

$$B.O. = \Big(|a_1| + \ldots + |a_p|\Big) \cdot \max |b_i| \ge J.O.$$

- Ha $q = \infty$ és $r = 1$, akkor ugyanígy.

Általános eset: $a, b \ne 0$ és $1 < q, r < \infty$.

Az egyenlőtlenség homogén; az a és a b vektort is végigoszthatjuk egy-egy számmal, és ekvivalens állítást kapunk. Tehát feltételezhetjük, hogy $\|a\|_q = 1$ és $\|b\|_r = 1$. Írjuk fel a súlyozott számtani-mértanit az $|a_i|^q$ és $|b_i|^r$ számokra $1/q$ és $1/r$ súlyokkal:

$$|a_i b_i| = \Big(|a_i|^q\Big)^{1/q} \Big(|b_i|^r\Big)^{1/r} \le \frac{1}{q}|a_i|^q + \frac{1}{r}|b_i|^r;$$

összegezve

$$\sum |a_i b_i| \le \frac{1}{q} \sum |a_i|^q + \frac{1}{r} \sum |b_i|^r = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 = \|a\|_q \cdot \|b\|_r.$$

2.6 Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség)

Ha $1 \le q \le \infty$ és $a, b \in \mathbb{R}^p$, akkor

$$\|a + b\|_q \le \|a\|_q + \|b\|_q.$$

Biz. Három speciális eset:

- Ha $q = \infty$, akkor

$$\|a+b\|_\infty = \max |a_i + b_i| \le \max \Big(|a_i| + |b_i|\Big) \le \max |a_i| + \max |b_i| = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

- Ha $q = 1$, akkor is trivi:

$$\|a + b\|_1 = \sum \Big|a_i + b_i\Big| \le \sum \Big(|a_i| + |b_i|\Big) = \|a\|_1 + \|b\|_1.$$

- Ha $\|a+b\|_q = 0$, akkor is trivi, mert
$$\|a+b\|_q = 0 \le \|a\|_q + \|b\|_q.$$

Az általános esetben $1 < q < \infty$ és $a+b \neq 0$. Legyen $r = \frac{q}{q-1}$ a q *konjugált kitevőpárja*, amelyre $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$$\begin{aligned}\|a+b\|_q{}^q = \sum |a_i+b_i|^q = \sum \left(|a_i+b_i| \cdot |a_i+b_i|^{\frac{q}{r}}\right) \\ \le \sum |a_i| \cdot |a_i+b_i|^{\frac{q}{r}} + \sum |b_i| \cdot |a_i+b_i|^{\frac{q}{r}} \overset{\text{Hölder } 2\times}{\le} \\ \le \left(\sum |a_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum |a_i+b_i|^q\right)^{1/r} + \left(\sum |b_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum |a_i+b_i|^q\right)^{1/r} \\ = \left(\|a\|_q + \|b\|_q\right) \cdot \|a+b\|_q{}^{q-1}.\end{aligned}$$

Végül leosztunk.

2.7 Következmény

$\|.\|_q$ norma minden $1 \le q \le \infty$ esetén.

2.8 Definíció

Az $\|.\|$ és $\|.\|'$ normák ekvivalensek, ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ számok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektorra
$$c_1\|x\| \le \|x\|' \le c_2\|x\|.$$

2.9 Példa

Az $|.|$, $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ normák ekvivalensek, mert
$$\frac{1}{\sqrt{p}}|x| \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le \sqrt{p} \cdot |x|$$

2.10 Tétel (a normák ekvivalenciája)

$\mathbb{R}^p$-ben bármely $\|.\|$ norma ekvivalens az $|.|$ normával, azaz léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ számok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektorra
$$c_1|x| \le \|x\| \le c_2|x|.$$

Biz. A felső becslés: legyenek a koordináta-egységvektorok $e_1, \ldots, e_p$. Ekkor

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \ldots + x_pe_p\| \le \|x_1e_1\| + \ldots + \|x_pe_p\| = |x_1| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x_p| \cdot \|e_p\| \le$$
$$\le |x| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x| \cdot \|e_p\| = \Big(\|e_1\| + \ldots + \|e_p\|\Big) \cdot |x|,$$

Tehát például $c_2 = \|e_1\| + \ldots + \|e_p\|$ megfelelő.

↯ Az alsó becsléshez tegyük fel indirekt, hogy nincs ilyen c_1. Ezek szerint minden pozitív egészre $c_1 = \frac{1}{n}$ nem jó, vagyis van olyan x_n vektor, amelyre $\|x_n\| < \frac{1}{n}|x_n|$. Az x_n nem lehet a nullvektor, és így a skálázhatóság miatt feltehetjük, hogy $|x_n| = 1$.

Az Bolzano-Weierstrass tétel miatt a korlátos (x_n) sorozatnak van egy konvergens (x_{n_k}) részsorozata. Ennek limeszpontja legyen y. A részsorozat koordinátánként y-hez tart; az abszolútérték definíciója miatt

$$|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k,i}\right)^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_{n_k,i}^2} = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k}| = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$

A részsorozatban $|x_{n_k} - y| \to 0$. A már bizonyított felső becslés szerint $0 \le \|x_{n_k} - y\| \le c_2|x_{n_k} - y|$; a rendőr-elv miatt $\|x_{n_k} - y\| \to 0$. Ezek után

$$0 < \|y\| \le \|x_{n_k}\| + \|y - x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} + c_2|y - x_{n_k}| \to 0,$$

ellentmondás. ↯

2.11 Következmény

Véges dimenzióban a pontsorozatok konvergenciája nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Bármelyik normát is használjuk, ugyanazok a sorozatok lesznek konvergensek.

2.12 Megjegyzés

Végtelen dimenzióban a különböző normák nem feltétlenül ekvivalensek.

- Legyen $C[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények vektortere. Ezen a téren két lehetséges norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ és $\|f\|_\infty = \max |f|$.

  Vizsgáljuk az $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & x < 1/n \\ 0 & x \geq 1/n \end{cases}$ függvényeket. Ezekre $\|f_n\|_1 \to 0$ és $\|f_n\|_\infty = 1$. Az L_1 norma szerint az (f_n) sorozat a konstans 0 függvényhez tart, az L_∞ norma szerint nem tart oda, és nem is Cauchy-sorozat.

- Ugyanezen a téren $\|f\|_2 = \int_0^1 x|f(x)|\mathrm{d}x$ és $\|f\|_3 = \int_0^1 (1-x)|f(x)|\mathrm{d}x$ két olyan norma, amelyeknek az aránya sem alulról, sem felülről nem korlátos.

3. Nyílt és zárt halmazok

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja. Halmaz belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz, halmaz lezártja. [LTS2, 13–19. o.]

3.1 Definíció

- Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja.
- Halmaz belseje, külseje, határa.
- Nyílt halmaz, zárt halmaz, halmaz lezártja.
- Torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz.

3.2 Példa

- Az egész tér egyszerre nyílt és zárt is.
- Az üres halmaz egyszerre nyílt és zárt is.
- A nyílt gömbök nyílt halmazok.
- A zárt gömbök zárt halmazok.
- Az $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_p, b_p)$ nyílt téglák nyílt halmazok.
- Az $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ zárt téglák zárt halmazok.

3.3 Tétel

- Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az elemeiből képzett konvergens sorozatok limeszei is elemei.
- Bármely halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementuma zárt.
- Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt.
- Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
- Zárt halmazok tetszőleges rendszerének metszete zárt.
- Véges sok zárt halmaz uniója zárt.

3.4 Példa

- A $B(0, 1/n)$ nyílt gömbök metszete nem nyílt.
- A $\overline{B}(0, 1 - 1/n)$ zárt gömbök uniója nem zárt.

3.5 Definíció

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. Egy $S \subset G$ halmaz *sűrű G-ben*, ha

$$\forall a \in G \quad \forall r > 0 \quad S \cap B(a, r) \neq \emptyset.$$

3.6 Példa

$\mathbb{Q}^p$ és $\mathbb{R}^p \setminus \mathbb{Q}^p$ sűrű.

3.7 Tétel

A belső/külső pont, nyílt halmaz stb. fogalmak nem függnek attól, hogy melyik normát használjuk.

4. Kompakt halmazok

Cantor-metszettétel. Kompakt halmazok. Racionális gömbök, Lindelöf-lemma, Borel tétele. Nemüres kompakt és vele diszjunkt nemüres zárt halmaz távolsága pozitív. [LTS2, 18, 21–24. o.]

4.1 Tétel (Cantor metszettétel)

Ha $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ korlátos, zárt, nemüres halmazok, akkor $\bigcap K_n \neq \emptyset$.

4.2 Példa

A $A_n = \{\mathbf{x} : x_1 \geq n\}$ zárt félterek zártak és nemüresek, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, de a metszetük üres.
A $B_n = B(1/n, 1/n)$ gömbök korlátosak és nemüresek, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, de a metszetük üres.

4.3 Definíció (kompaktság)

Egy $K \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

4.4 Definíció (racionális gömb)

$B(a, r)$ *racionális gömb*, ha $a \in \mathbb{Q}^p$ és $r \in \mathbb{Q}$.

4.5 Tétel

Minden nyílt halmaz előáll racionális gömbök uniójaként.

4.6 Lemma (Lindelöf)

Nyílt halmazok tetszőleges G_i $(i \in I)$ rendszeréből kiválasztható egy megszámlálható részrendszer, amelynek uniója ugyanaz, vagyis létezik olyan megszámlálható $J \subset I$ indexhalmaz, hogy

$$\bigcup_{i \in J} G_i = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

4.7 Tétel (Borel)

$K \subset \mathbb{R}^p$ akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Biz (alternatív bizonyítás, Lindelöf-lemma nélkül).

↯ Indirekt, tegyük fel, hogy létezik egy $K \subset \mathbb{R}^p$ korlátos zárt halmaz, ami nem kompakt; ekkor tehát van egy $\bigcup\limits_{i \in I} G_i \supset K$ nyílt fedése, amiből nem választható ki véges fedés. Általában, nevezzünk egy halmazt *rossz*nak, ha a G_i halmazaink közül semelyik véges sok sem fedi le. Az indirekt feltevésünk szerint K rossz halmaz.

Rekurzívan konstruálunk egy tengelypárhuzamos zárt kockákból álló, csökkenő $D_0 \supset D_1 \supset \dots$ sorozatot azzal a tulajdonsággal, hogy minden n indexre a $D_n \cap K$ halmaz rossz.

A feltétel szerint K korlátos; a D_0-t választhatjuk úgy, hogy tartalmazza K-t, ekkor persze $D_0 \cap K = K$ tényleg rossz halmaz.

Ha D_n már megvan, akkor mindegyik tengelyre merőlegesen felezzük el, így D_n-et 2^p darab, feleakkora zárt kockára bontottuk fel, legyenek ezek $C_1, \dots, C_{2^p}$. (A felező merőleges síkok pontjai több kis kockához tartoznak.) Legyen D_{n+1} az egyik olyan kis kocka, amelyre $D_{n+1} \cap K$ rossz. Ha nincs ilyen, akkor azt azt jelenyi, hogy mindegyik $C_j \cap K$ lefedhető véges sok G_i halmazzal, de akkor ez a 2^p darab véges fedés együttesen a $D_n \cap K$ halmazt is lefedi; ez azonban elentmond annak, hogy $D_n \cap K$ egy rossz halmaz. Ezzel tehát definiáltuk a $D_0 \supset D_1 \supset \dots$ kockasorozatot.

Most alkalmazzuk a Cantor-metszettételt a $D_n \cap K$ halmazokra. Mindegyik $D_n \cap K$ korlátos halmaz (már a K is korlátos volt), zárt (két zárt halmaz metszete), nem üres (mert rossz halmaz), és csökkenő sorozatot alkotnak, mert $D_n \supset D_{n+1}$. A Cantor-tétel szerint van egy c közös pontjuk. A kockákat minden lépésben feleztük, tehát csak egy közös pont van:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (D_n \cap K) = \{c\}.$$

A c eleme K-nak, ezért lefedi legalább egy G_i halmaz. Ez a G_i halmaz nyílt, ezért van egy kicsi, $r > 0$ sugarú környezete, ami része G_i-nek: $B(c, r) \subset G_i$.

Végül, válasszunk egy olyan nagy n-et, hogy a D_n kocka átmérője kisebb legyen, mint r. A D_n kockának eleme a c pont, ezért a D_n minden pontja a c-től r-nél kisebb távolságban van. Ezért $D_n \subset B(c, r)$, így

$$(D_n \cap K) \subset D_n \subset B(c, r) \subset G_i.$$

Ez viszont ellentmondás, mert noha a $D_n \cap K$ halmaz rossz, mégis sikerült egyetlen G_i halmazzal lefedni. ↯

4.8 Definíció

Ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ nemüres halmazok, akkor ezek távolsága

$$dist(A, B) = \inf \Big\{ |a - b| : a \in A, b \in B \Big\}.$$

4.9 Tétel

Legyen $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt és $Z \subset \mathbb{R}$ zárt, egyik sem üres.
(a) Léteznek olyan $a \in K$ és $b \in Z$ pontok, amelyekre $|a - b| = dist(K, Z)$.
(b) Ha K és Z diszjunkt, akkor $dist(K, Z) > 0$.

5. Összefüggő halmazok

Hegymászós feladat; hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő. Példa összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő halmazra. $\mathbb{R}^p$ összefüggő. $\mathbb{R}^p$-ben az üres halmazon és az egész téren kívül nincs más halmaz, amely egyszerre nyílt és zárt is. [LTS2, 19–21. o.]

Kérdés

Hol volt az irigy törpe pontosan 10, illetve 11 órakor?

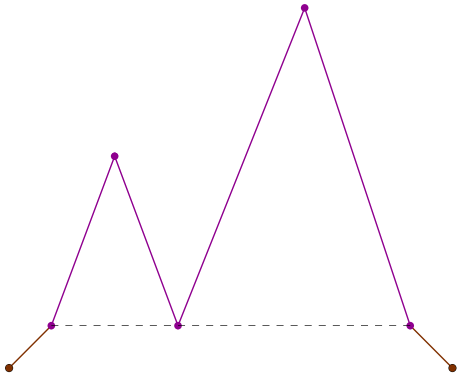
Megoldás. A 10, illetve 11 órát választjuk 0-nak. Minden egyes n-re, a $-\frac{2}{2^n}$ és $-\frac{1}{2^n}$ időpontok között a törpe végiglátogatja a nagy dobozt és az első n kis dobozt. Emiatt a törpe nem tud egyetlen ponthoz konvergálni, hanem egy kiterjedt ponthalmazhoz fog torlódni, *szétkenődik a térben*. A helyét nem egy konkrét pont írja le, hanem egy *sűrűségfüggvény*, amely minden ponthoz megmondja, hogy a *törpefelhő* abban a pontban mennyire sűrű.

5.1 Kérdés (hegymászós feladat)

Két hegymászó az $y = h(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $h : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvény, és $h(0) = h(1) = 0$. Az egyik hegymászó a $(0, 0)$, a másik az $(1, 0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy mászás közben minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?
(Avagy: léteznek-e biztosan olyan $a, b : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvények, amelyekre $a(0) = 0$, $b(0) = 1$, $a(1) = b(1)$, és minden $t \in [0, 1]$ pillanatban $h(a(t)) = h(b(t))$?

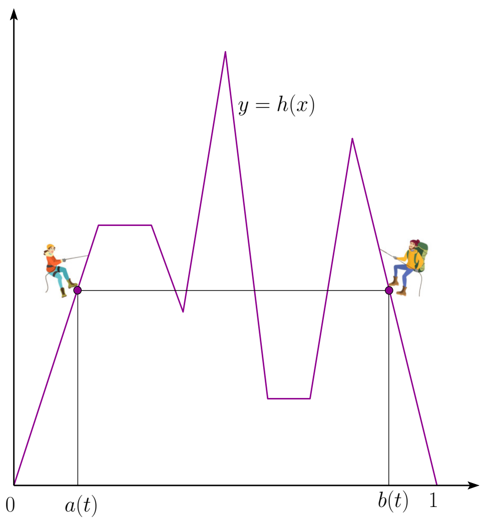
Hibás bizonyítás arra, hogy találkozhatnak:

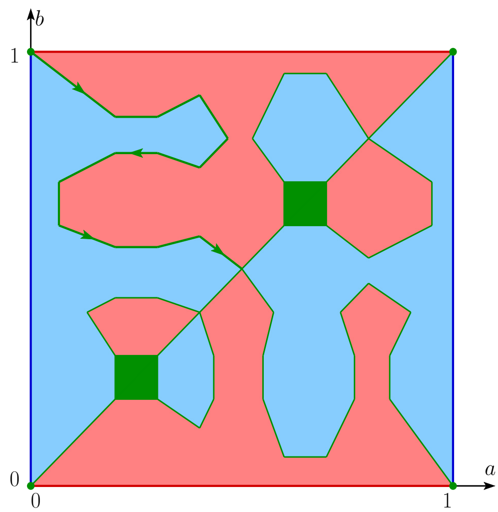
A hegyet a két végén kiegészíthetjük egy-egy egyenes rámpával, ezután feltételezhetjük, hogy $0 < x < 1$ esetén $h(x) > 0$.



A két hegymászó mozgását az $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzetben ábrázoljuk: amikor az egyik az $(a, h(a))$, a másik pedig a $(b, h(b))$ pontban van, ennek az állapotnak megfeleltetjük az (a, b) pontot. Színezzük ki a négyzetet a következőképen: legyen az (a, b) pont képe zöld, ha $h(a) = h(b)$ (ezek a megengedett pontok); piros, ha $h(a) > h(b)$ (amikor az első hegymászó magasabban van, mnt a második), és kék, ha $h(a) < h(b)$.

A mozgás kezdőpontja a $(0, 1)$ pont, és az $a = b$ átlóra szeretnének eljutni; ezek a pontok mind zöldek. A célunk összekötni a $(0, 1)$ pontot és az átlót egy folytonos $(a(t), b(t))$ görbével, aminek minden pontja zöld.



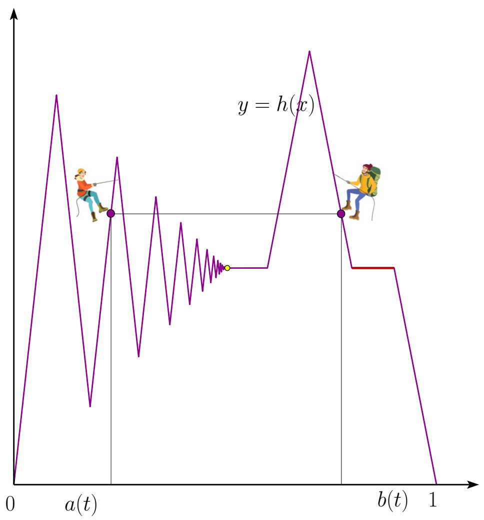


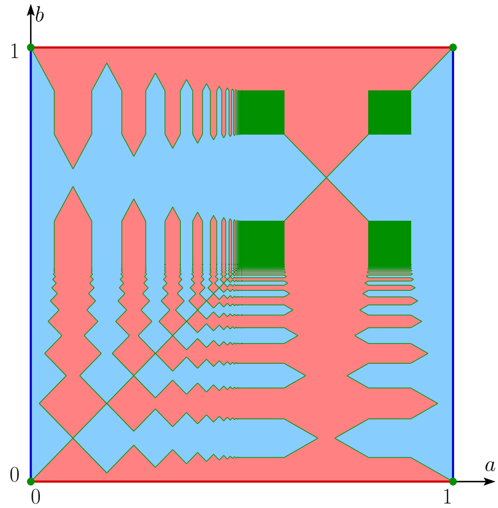
Nyilvánvaló, hogy akárhogy kötjük össze a négyzet baloldalát a felső oldallal egy folytonos görbével, az átmegy zöld ponton. Tehát, csak a piros és kék halmazban nem lehet összekötni a két oldalt. akkor viszont a bal és a felső oldalt elválasztja egymástól a zöld halmaz, tehát a zöld halmazban össze lehet kötni a $(0, 1)$ sarkot az átlóval.

Másképpen: A baloldalhoz csatlakozik egy kék síkidom, ennek a határa zöld, és ezen a határgörbén végig lehet sétálni a bal-felső saroktól az átlóig. Ezzel az állítást bebzonyítottuk, kész vagyunk. 😇

Olyan $h(x)$ hegy, amelyen nem tudnak találkozni:

Legyen $h(x)$ az ábrán látható folytonos függvény, amely végtelen sok egyenes szakaszból áll.





Balról indul *Lady Callia*, jobbról *Lord Stettin*, becenevén *Kutyuska*. Valahányszor Callia eléri a $0,5$ magasságot, Stettinnek át kell sétálnia a piros szakasz másik végére, hogy Callia tovább tudjon haladni. Mire Callia eléri a sárga pontot, Kutyuskának végtelen sokszor kell oda-vissza keresztülloholnia a piros szakaszon, akkor viszont nem tud egy pontba konvergálni.

Az előbbi megfeleltetésben az egységnégyzetben a bal-felső sarokból elindul egy cikcakkos töröttonal, de ez nem konvergál egyetlen pontba.

A baloldalhoz csatlakozó kék halmaz határa nem folytonos görbe.

5.2 Definíció (folytonos görbe)

A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$, avagy $t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_p(t)\big)$ függvény *folytonos* görbe, ha mindegyik γ_i függvény folytonos.
Speciálisan, minden töröttvonal folytonos görbe.

5.3 Definíció (ívszerű összefüggőség)

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz ívszerűen összefüggő, ha bármelyik két pontja összeköthető a halmazban folytonos görbével, tehát bármely $a, b \in H$ pontokhoz van olyan $\gamma : [0, 1] \to H$ folytonos görbe, amelyre $\gamma(0) = a$ és $\gamma(1) = b$.

5.4 Definíció (összefüggőség)

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz összefüggő, ha

- H nem bontható fel két diszjunkt, nemüres, relatív nyílt halmaz uniójára, vagyis
- Ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmazok, $H \subset A \cup B$ és $H \cap A \cap B = \emptyset$, akkor $H \subset A$ vagy $H \subset B$.

5.5 Megjegyzés

Bármely $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha nem bontható fel két diszjunkt, nemüres nyílt halmaz uniójára, avagy

5.6 Tétel

Ha egy halmaz ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

5.7 Példa

Van olyan halmaz, ami összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő.

5.8 Következmény

$\mathbb{R}^p$ összefüggő.

5.9 Következmény

A teljes téren és az üres halmazon kívül nincs $\mathbb{R}^p$-nek olyan részhalmaza, ami egyszerre nyílt és zárt.

5.10 Tétel

- Ha egy nyílt halmaz összefüggő, akkor bármely két pontja összeköthető töröttvonallal.
- Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor ívszerűen összefüggő.
- Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható.

5.11 Definíció

Tartomány: nem üres, nyílt, összefüggő halmaz

II. rész

Többváltozós függvények differenciálszámítása

6. Többváltozós függvények folytonossága és határértéke

Többváltozós függvények határértéke

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények véges és végtelen határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. A határérték egyértelmű. Átviteli elv. Példák. [LTS2, 28–31. o.]

6.1 Definíció (p-változós függvény)

$f : H \to \mathbb{R}$ egy p-változós függvény, ha $H \subset \mathbb{R}^p$.

6.2 Definíció (p-változós függvény határértéke)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ p-változós függvény, $A \subset H$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$. Az f függvény határértéke az a pontban az A halmazra szorítkozva b, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad \left| f(x) - b \right| < \varepsilon$$

avagy, a b bármely V környezetéhez létezik az a-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b, \qquad \lim_{a,A} f = b$$

Ha A az értelmezési tartomány, akkor nem tesszük hozzá, hogy *az A halmazra szorítkozva*.

6.3 Definíció (p-változós függvény végtelen határértéke)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ p-változós függvény, $A \subset H$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$.
Az f függvény határértéke az a pontban az A halmazra szorítkozva ∞, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad f(x) > K$$

avagy, a ∞ bármely V környezetéhez létezik az a-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{a,A} f = \infty$.

Az f függvény határértéke az a pontban az A halmazra szorítkozva $-\infty$, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad f(x) < K$$

avagy, a ∞ bármely V környezetéhez létezik az a-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.

6.4 Példa

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Alsó és felső határérték

Függvény limesz szuperiora és limesz inferiora. $\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$. $\limsup\limits_{a,A} f = \max\{\lim f(x_n : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a\}$. Átviteli elvek. Határátmenet lim sup-ra és lim inf-re. [KG2]

6.5 Definíció

Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$, a az A halmaz torlódási pontja, és f olyan p-változós, valós értékű függvény, ami valamilyen $r > 0$ esetén értelmes a $\dot{B}(a, r_0) \cap A$ halmazon.

Az f függvény *felső határértéke* avagy *limesz szuperiora* az a pontban, az A halmazra szorítkozva

$$\limsup_{\substack{x\to a\\ a\in A}} f(x) = \overline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r\to 0+} \sup f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big) = \inf_{r>0} \sup f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big).$$

Megjegyzés. A $\dot{B}(a,r) \cap A$ biztosan nem üres, mert a torlódási pont. Nagyobb r-hez bővebb $\dot{B}(a,r) \cap A$ és $f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big)$ halmazt kapunk, ezért az $r \mapsto f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big)$ függvény (nem szig.) monoton növekvő. Az értéke (a szuprémum) $+\infty$ is lehet, de ettől még tudunk határértéket venni. A monotonitás miatt a határérték egyenlő az infimummal.

Az f függvény *alsó határértéke* avagy *limesz inferiora* az a pontban, az A halmazra szorítkozva

$$\liminf_{\substack{x\to a\\ a\in A}} f(x) = \underline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r\to 0+} \inf f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big) = \sup_{r>0} \inf f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big).$$

6.6 Lemma

1a. Ha $\limsup\limits_{a,A} f > \alpha$, akkor $\forall r > 0\ \exists x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) > \alpha$.

1b. Ha $\limsup\limits_{a,A} f < \beta$, akkor $\exists r > 0\ \ \forall x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) < \beta$.

2a. Ha $\liminf\limits_{a,A} f > \alpha$, akkor $\exists r > 0\ \ \forall x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) > \alpha$.

2b. Ha $\liminf\limits_{a,A} f < \beta$, akkor $\forall r > 0\ \exists x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) < \beta$.

Biz. 1a: $\inf\limits_{r} \sup f\Big(\dot{B}(a)\cap A\Big) > \alpha$, tehát bármely $r > 0$ esetén $\sup f\Big(\dot{B}(a)\cap A\Big) > \alpha$.

1b: $\inf\limits_{r} \sup f\Big(\dot{B}(a)\cap A\Big) < \beta$, tehát van olyan $r > 0$, amire $\sup f\Big(\dot{B}(a)\cap A\Big) < \beta$.
2a,2b ugyanúgy.

6.7 Tétel

$\liminf\limits_{a,A} f \le \limsup\limits_{a,A} f$, és
$\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$.
Az $\alpha = \pm\infty$ eseteket úgy is lehet írni hogy

- $\lim\limits_{a,A} f = +\infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf\limits_{a,A} f = +\infty$;
- $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$.

Biz. Az első állítás trivi az 6.5. definícióból: $\inf f\Big(\dot B(a,r)\cap A\Big) \le \sup f\Big(\dot B(a,r)\cap A\Big)$, majd $r \to 0+$ határátmenet.

1. eset: $\alpha = -\infty$. A 6.6. lemma matt ha $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$, akkor minden K számhoz van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot B(a,r)\cap A$ esetén $f(x) < K$. Ez pedig éppen annak definíciója, hogy $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.

Megfordítva, ha $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$, akkor minden K számhoz van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot B(a,r)\cap A$ esetén $f(x) < K$. Ekkor viszont $\limsup\limits_{a,A} f \le \sup f(\dot B(a,r)\cap A) \le K$. Ez minden K számra igaz, tehát $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$.

2. eset: $\alpha = +\infty$. ugyanúgy, mint az 1. esetben.

3. eset: α véges.

Ha $\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$, akkor a 6.6. lemma matt minden $0 < \varepsilon < \alpha$-hoz van olyan r_1 és r_2, hogy bármely $x \in \dot B(a,r_1)\cap A$ esetén $f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$, illetve bármely $x \in \dot B(a,r_2)\cap A$ esetén $f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$. Vegyük a két sugár közül a kisebbet: legyen $\delta = \min(r_1, r_2)$. Ekkor tehát bármely $x \in \dot B(a,\delta)\cap A$ esetén $\alpha + \varepsilon > f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$; ez viszont éppen annak a definíciója, hogy $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$.

Megfordítva, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in \dot B(a,\delta)\cap A$ esetén $\alpha + \varepsilon > f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$; ekkor viszont

$$\alpha - \varepsilon \le \inf f\Big(\dot B(a,\delta)\Big) \le \liminf_{a,A} f \le \limsup_{a,A} f \le \sup f\Big(\dot B(a,\delta)\Big) \le \alpha + \varepsilon.$$

Tehát

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \alpha - \varepsilon \le \liminf_{a,A} f \le \limsup_{a,A} f \le \alpha + \varepsilon.$$

6.8 Tétel

Legyen

$$L = \Big\{ \lim f(x_n) : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a \Big\} \subset [-\infty, +\infty].$$

Ekkor $\limsup\limits_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \max L$ és $\liminf\limits_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \min L$.

Biz. Elég a lim sup-ra.

Először azt igazoljuk, hogy $\limsup\limits_{a,A} f \in L$.

1. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = b$ véges. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $b - \frac{1}{n} < f(x_n) < b + \frac{1}{n}$. Ilyen létezik, mert a 6.6. Lemma 1b miatt minden elég közeli pontban $f(x_n) < b + \frac{1}{n}$, és a 6.6. Lemma 1a miatt az elég közeliek között van olyan pont, amelyre $f(x_n) > b - \frac{1}{n}$ is igaz. A rendőr-elv miatt $f(x_n) \to b$, így $b \in L$.

2. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = +\infty$. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $f(x_n) > n$.

3. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $f(x_n) < -n$.

Másodszor, az kell, hogy L-nek nincs $\limsup\limits_{a,A} f$-nél nagyobb eleme. Tegyük fel indirekt, hogy mégis van egy $\beta \in L$, amire $\beta > \limsup\limits_{a,A} f$. A β-hoz van egy $x_n \in A$ sorozat, amely a-hoz tart, $x_n \neq a$ és $f(x_n) \to \beta$. Vegyünk még egy c számot, amire $\limsup\limits_{a,A} f < c < \beta$. A lemma 1b szerint van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a, r) \cap A$ esetén $f(x) < c$. Mivel $x_n \to a$, véges sok kivétellel minden x_n ilyen. Tehát véges sok kivétellel $f(x_n) < c$, de ez ellentmond annak, hogy $f(x_n)$ a c-nél nagyobb β-hoz tart.

6.9 Következmény (átviteli elv)

$\lim\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha bármely $x_n \in A \setminus \{a\}$ sorozatra, ha $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to \alpha$.

6.10 Tétel

Műveletek...

6.11 Tétel (határátmenet)

Ha valamilyen $r > 0$-re $x \in \dot{B}(a,r) \cap A$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor $\liminf\limits_{a,A} f \leq \liminf\limits_{a,A} g$, és $\limsup\limits_{a,A} f \leq \limsup\limits_{a,A} g$.

Biz. Az 6.5. definícióból triviális.

6.12 Következmény (rendőr- és honvéd/csősz-elvek)

(a) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ halmazon $f \leq g \leq h$ és $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{a,A} h = c$, akkor $\lim\limits_{a,A} g = c$.

(b) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ halmazon $f \leq g$ és $\lim\limits_{a,A} f = \infty$, akkor $\lim\limits_{a,A} g = \infty$.

(c) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ halmazon $f \leq g$ és $\lim\limits_{a,A} g = -\infty$, akkor $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.

7. Többváltozós függvények folytonossága

Többváltozós függvények folytonossága. Átviteli elv. Folytonos függvény folytonossága részhalmazokon. Szekciófüggvények. Példa olyan függvényre, amelynek minden szkciófüggvénye folytonos, de a függvény nem folytonos. Műveletek. Az elemi függvények folytonossága. Weierstrass-tétel. Heine-tétel. [LTS2, 32–36. o.]

8. Parciális deriváltak

Parciális differenciálhatóság. Példa parciálisan differenciálható, de nem folytonos függvényre. Lokális szélsőértékek. Szélsőértékkeresés a parciális deriváltak nullhelyeinek mekeresésével. Adott körbe írt maximális területű háromszög. [LTS2, 39–43. o.]

9. Többváltozós függvények differenciálása

Lineáris függvény; átírás vektorok skaláris szorzatával és mátrixszorzással. Többváltozós függvény differenciálhatósága. A differenciálhatóságból következik a folytonosság. Érintősík. Egyértelműség. Deriváltvektor, gradiens. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Minden polinomfüggvény és minden racionális tört függvény, továbbá (ha elhagyjuk az ért. tartományok végpontait) minden elemi függvény differenciálható. [LTS2, 45–53. o.]

10. Iránymenti deriváltak. Lagrange-középértéktétel

Iránymenti derivált. Az iránymenti derivált kiszámítása. Lagrange-középértéktétel. Becslés a függvény megváltozására. Ha egy tartományod a derivált 0, akkor a függvény konstans. [LTS2, 53–56. o.]

11. Vektorértékű függvények differenciálása

Vektorértékű függvények. Határérték, folytonosság, átviteli elvek. A határérték létezése és a folytonosság ekvivalens a koordinátafüggvények határértékével, ill. folytonosáágával. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezések. Mátrix alak. Lineáris leképezés normája. Differenciálhatóság. A diff.hatóság ekvivalens azzal, hogy mindegyik koordinátafüggvény differenciálható. Ha differenciálható, akkor folytonos. A derivált egyértelműsége. Jacobi-mátrix. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Folytonos differenciálhatóság. Blokkmátrixok. [LTS2, 81–89. o.]

Lineáris leképezések

11.1 Definíció (Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések)

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

11.2 Tétel

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

11.3 Definíció (Lineáris leképezés vagy mátrix normája)

$$\|A\| = \sup\left\{ \left|Ax\right| : \ |x| = 1 \right\} = \max\left\{ \left|Ax\right| : \ |x| = 1 \right\}$$

11.4 Trivialitás

Tetsz. x vektorra $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$.

11.5 Tétel

A mátrixnorma tényleg norma:

- $\|A\| \geq 0$, és $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$
- $\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|$$

Tehát

$$\|A+B\| = \sup\left\{\Big|(A+B)x\Big| : \; |x| = 1\right\} \leq \|A\| + \|B\|.$$

A $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tér a mátrixnormával egy normált lineáris tér.
(Igazából bármelyik normát használhatnánk, csak ezzel könnyű lesz számolni.)

Definíció (Frobenius-norma)

Az $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}$ mátrix *Frobenius-normája* $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{q} \sum\limits_{i=1}^{p} |a_{ji}|^2}$.
(Ugyanaz, mint az euklideszi norma, tehát jelölhetnénk $\|A\|_2$-vel is.)

Tétel

Bármely $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}$ mátrixra $\max_{i,j} |a_{ji}| \leq \|A\| \leq \|A\|_F$.

Biz. (1) Tegyük fel, hogy a_{ji} a maximális abszolút értékű eleme A-nak. Ha $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-i})^t \in \mathbb{R}^p$, akkor $|Ae_i|$ az A mátrix i-edik oszlopa, ezért

$$|a_{ji}| \leq \|Ae_j\| \leq \|A\|.$$

(2) Legyen $x \in \mathbb{R}^p$ egy olyan egységvektor, amelyre $|Ax| = \|A\|$. A Cauchy-

Schwarzból

$$\|A\|^2 = \|Ax\|^2 = \left|\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qp}x_p \end{pmatrix}\right|^2 = \sum_{j=1}^{q}\left|\sum_{j=1}^{p} a_{ji}x_i\right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{p}|a_{ji}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{p}|x_i|^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}|a_{ji}|^2\right) \cdot |x|^2 = \|A\|_F{}^2 \cdot 1.$$

A mátrixnorma kiszámítása kicsit kellemetlen (még visszatérünk rá). Gyakorlatban, pl. ha valaki ilyen jellegű számításokat programozni szeretne, a Frobenius-norma egy könnyebben implementálható alternatíva.

Differenciálhatóság

11.6 Definíció (differenciálhatóság)

$H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Az f függvény *differenciálható* az a pontban, ha van olyan $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés, amelyre

(a)
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_q$$

(b) Valamilyen vektorértékű $\varepsilon(x)$ függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0_q$$

(c) Valamilyen vektorértékű $\varepsilon(x)$ függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \quad \varepsilon \textbf{ folytonos } a\textbf{-ban és } \varepsilon(a) = 0_q$$

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x-a| \\ f_2(a) + \ell_2(x-a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x-a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x-a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x-a| \end{pmatrix}$$

f differenciálható
$\Leftrightarrow$ az ε vektorfüggvény folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0_q$

$\Leftrightarrow$ mindegyik ε_j függvény folytonos a-ban és $\varepsilon_j(a) = 0$
$\Leftrightarrow$ mindegyik f_j differenciálható, és a deriváltja az ℓ_j lineáris függvény.

A számértékű függvényeknél láttuk, hogy az $\ell_j(x)$ lineáris függvény egyértelmű, és az együtthatói (ha tetszik, koordinátái) az f_j függvény parciális deriváltjai az a pontban:

$$\ell_j(x) = D_1 f_j(a) \cdot x_1 + D_2 f_j(a) \cdot x_2 + \cdots + D_p f_j(a) \cdot x_p.$$

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

11.7 Definíció (Jacobi-mátrix)

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

11.8 Definíció

A most már egyértelmű $A(x)$ leképezést hívjuk az f leképezés a-beli deriváltjának, és jelölhetjük így: $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

2 Mese. *A definícióba beírva ezt a jelölést,*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Ezek után a p-változós f' derivált leképezés hova is képez? Hát a $p \cdot q$ dimenziós $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ *vektortérbe...*

Ha valaki szereti a vektor magicet, a Jacobi-mátrixot ilyen vicces szorzat alakokban is írhatja:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix} = \mathrm{grad} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} \cdot (a) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_p \end{pmatrix} (a)$$

11.9 Tétel

Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

11.10 Tétel

Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f mindegyik f_j koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az a pontban.

11.11 Tétel

Ha az a pont egy környezetében az f mindegyik f_j koordinátafüggvénye parciálisan differenciálható, és mindegyik $D_i f_j$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor f differenciálható a-ban.

11.12 Definíció

Ha az a pont egy környezetében az f minden pontban differenciálható, és mindegyik $D_i f_j$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy f *folytonosan differenciálható* az a pontban.

Avagy, a $q \times p$-es mátrix értékű deriváltfüggvény akkor és csak akkor folyt. a-ban, ha minden koordinátafüggvénye, vagyis az összes $D_i f_j(x)$ folyt. a-ban.

11.13 Példa

Legyen $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, pontosabban

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

A parciális deriváltak:

$$D_x f_1(x,y) = e^x \cos y; \qquad D_y f_1(x,y) = -e^x \sin y;$$

$$D_x f_2(x,y) = e^x \sin y; \qquad D_y f_2(x,y) = e^x \cos y.$$

A Jacobi-mátrix az $\binom{a}{b}$ pontban

$$Jf\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

A függvény deriváltja az $\binom{a}{b}$ pontban az

$$f'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^a \cos b \cdot x & - & e^a \sin b \cdot y \\ e^a \sin b \cdot x & + & e^a \cos b \cdot y \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés.

3 Mese. *Ez a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi derivált-fogalmaknak:*

f :	$\to \mathbb{R}$	$\to \mathbb{R}^q$
$\mathbb{R} \to$	*Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény:* *$f'(a)$ egy szám (meredekség)* *vagy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény* *vagy 1×1-es mátrix*	*Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ görbe:* $f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_q'(t) \end{pmatrix}$ *(érintő)vektor;* *q-dim. (oszlop)vektor* *ha tetszik, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ lin. fv*
$\mathbb{R}^p \to$	*Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény:* *$f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris függvény* *vagy $\begin{pmatrix} D_1 f(a) & \dots & D_p f(a) \end{pmatrix}$,* *p-dim. (gradiens)vektor* *vagy p-dim. sorvektor*	*Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezés:* *$f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris fv* *vagy* $\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix}$ *$q \times p$-es mátrix*

4 Mese. *Blokkmátrixok, parciális deriváltak*

$$J\begin{pmatrix} f \\ \hline g \end{pmatrix}(x,y) = J\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ \hline g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix}\left(x_1,\dots,x_p \;\middle|\; y_1,\dots,y_q\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} D_{x_1}f_1 & \dots & D_{x_p}f_1 & D_{y_1}f_1 & \dots & D_{y_q}f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}f_r & \dots & D_{x_p}f_r & D_{y_1}f_r & \dots & D_{y_q}f_r \\ \hline D_{x_1}g_1 & \dots & D_{x_p}g_1 & D_{y_1}g_1 & \dots & D_{y_q}g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}g_s & \dots & D_{x_p}g_s & D_{y_1}g_s & \dots & D_{y_q}g_s \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D_x f & D_y f \\ \hline D_x g & D_y g \end{array}\right)$$

12. Differenciálási szabályok

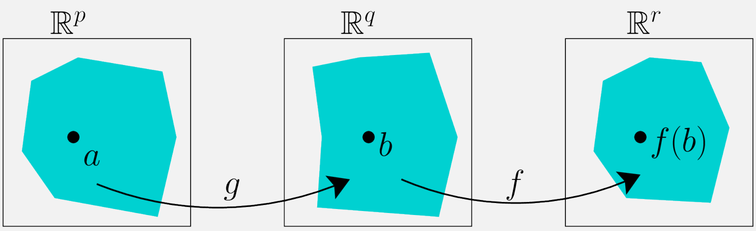
Differenciálási szabályok: konstansszoros, összeg. Láncszabály ($\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ fggvény kompozíciója).

12.1 Trivialitás

- Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható a-ban, és
$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$
- Ha $f, g : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(Trivi az ε függvények folytonosságából.)

12.2 Tétel (láncszabály)



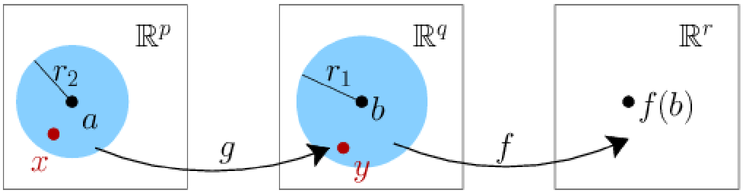
Legyen a p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező g függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban és $g(a) = b \in \mathbb{R}^q$. Továbbá legyen a q-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező f függvény differenciálható a b pontban. Ekkor a p-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező $f \circ g$ függvény is differenciálható az a pontban, és
$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \circ g'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a).$$

Avagy Jacobi-mátrixokkal
$$\underbrace{J(f \circ g)(a)}_{r \times p} = \underbrace{Jf(b)}_{r \times q} \cdot \underbrace{Jg(a)}_{q \times p} = Jf(g(a)) \cdot Jg(a).$$

Biz. Legyen

$$A = g'(a), \quad g(x) = g(a) + A(x-a) + \alpha(x)|x-a|,$$
$$B = f'(b), \quad f(y) = f(b) + B(y-b) + \beta(y)|y-b|,$$

($\alpha(x)$ q-dim. vektorértékű függvény, folyt. a-ban, $\alpha(a) = 0_q$; $\beta(y)$ r-dim. vektorértékű függvény, folyt. b-ben, $\beta(b) = 0_r$.)



Az f értelmes valamilyen $B(b, r_1)$ gömbben.

A g differenciálható, ezért folytonos is a-ban, így egy elég kis $B(a, r_2)$ gömbben g értelmes és $g(x) \in B(b, r_1)$. Az r_2-t válasszuk olyan kicsinek, hogy $x \in B(a, r_2)$ esetén $|\alpha(x)| < 1$ legyen (ez jól fog jönni még).

Tehát a $B(a, r_2)$ gömbben $f \circ g$ értelmes (ez is kell a differenciálhatósághoz).

A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\Big|g(x) - g(a)\Big| = \Big|A(x-a) + \alpha(x)|x-a|\Big| \leq \Big|A(x-a)\Big| \;+\; \Big|\alpha(x)\Big| \cdot |x-a| \leq$$

$$\leq \|A\| \cdot |x-a| \;+\; 1 \cdot |x-a| = \Big(\|A\| + 1\Big)|x-a|.$$

Mostantól $y = g(x)$. A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\Big|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\Big| =$$
$$= \Big|f(y) - f(b) - B(y-b) + B(y-b-A(x-a))\Big| \leq$$
$$\leq \Big|f(y) - f(b) - B(y-b)\Big| \;+\; \Big|B(g(x) - g(a) - A(x-a))\Big| \leq$$
$$\leq \Big|\beta(y)\Big| \cdot |y-b| \;+\; \|B\| \cdot \Big|g(x) - g(a) - A(x-a)\Big| \leq$$
$$\leq \Big|\beta(y)\Big| \cdot \Big(\|A\| + 1\Big)|x-a| \;+\; \|B\| \cdot \Big|\alpha(x)\Big| \cdot |x-a| =$$
$$= \bigg(\Big|\beta(g(x))\Big| \cdot \Big(\|A\| + 1\Big) \;+\; \|B\| \cdot \Big|\alpha(x)\Big|\bigg) \cdot |x-a|.$$

Tehát

$$\left|\frac{\Big|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\Big|}{|x-a|}\right| \leq \Big|\beta(g(x))\Big| \cdot \Big(\|A\| + 1\Big) \;+\; \|B\| \cdot \Big|\alpha(x)\Big|.$$

Rendőr-elv miatt $\lim_{x\to a}\left|\frac{\left|f(g(x))-f(g(a))-BA(x-a)\right|}{|x-a|}\right|=0$; $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ differenciálható a-ban, és

$$(f\circ g)'(a)=BA=f'(b)\circ g'(a).$$

12.3 Következmény (összetett függvény differenciálási szabálya; láncszabály)

Ha $g_1,\dots,g_q$ p-változós, számértékű függvények, differenciálhatók az $a\in\mathbb{R}^p$ pontban, $b_j=g_j(a)$, továbbá a q-változós, számértékű f függvény differenciálható a $(b_1,\dots,b_q)$ pontban, akkor az $F(x)=f\big(g_1(x),\dots,g_q(x)\big)$ függvény is differenciálható az a pontban, és a parciális deriváltjait így írhatjuk fel:

$$D_iF(a)=\sum_{j=1}^{q}D_jf(b)\cdot D_ig_j(a)\quad\textbf{avagy}\quad\frac{\partial F}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Biz. Az előző tétel speciális esete $r=1$-re. Jacobi-mátrixokkal

$$\operatorname{grad}F(a)=\begin{pmatrix}D_1f(b) & \dots & D_qf(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1g_1(a) & \dots & D_pg_1(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ D_1g_q(a) & \dots & D_pg_q(a)\end{pmatrix}$$

Ebből kell leolvasni az i-edik elemet, ami a grad $f(b)$ vektor és a $Jg(a)$ Jacobi-mátrix i-edik oszlopának szorzata.

12.4 Példa

Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t=a$ helyen, $g(a)=b$, $h(a)=c$, továbbá legyen $f(x,y)=x\cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t),h(t))=g(t)\cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g\cdot h)'(a)=D_1f(b,c)\cdot g'(a)+D_2f(b,c)\cdot h'(t)=$$

$$=c\cdot g'(a)+b\cdot h'(a)=h(a)\cdot g'(a)+g(a)\cdot h'(a).$$

12.5 Példa

Ugyanez hányadossal: most $f(x,y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a) = D_1 f(b,c) \cdot g'(a) + D_2 f(b,c) \cdot h'(t) =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot g'(a) + \frac{-b}{c^2} \cdot h'(a) = \frac{1}{h(a)} \cdot g'(a) - \frac{g(a)}{h(a)^2} \cdot h'(a).$$

Házi feladat kipróbálni ugyanezt n-tényezős szorzattal és hatványozással is.

12.6 Következmény

Differenciálható függvények szorzata és hányadosa is differenciálható (mindenhol, ahol nem kell nullával osztani.)

12.7 Példa

g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez. $\left(|g|^2\right)' =?$

$$f(y) = |y|^2 = y_1^2 + \ldots + y_q^2$$

$$f'(y) = 2y^t$$

$$\left(|g|^2\right)' = 2g^t \cdot g'.$$

12.8 Példa

g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$

$$A'(y) = A \qquad \text{(v.ö. } (e^x)' = e^x \quad \text{:-o)}$$

$$(Ag(x))' = (A(g(x)))' = A \circ g'(x) = Ag'(x).$$

12.9 Példa

g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $v \in \mathbb{R}^q$

$$\langle v, y\rangle' = v^t$$

$$\langle v, g(x)\rangle' = v^t g'(x).$$

12.10 Példa

Most legyen g és h két, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, ami differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és legyen $f(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q) = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q$ az $\mathbb{R}^q$-beli skaláris szorzás.

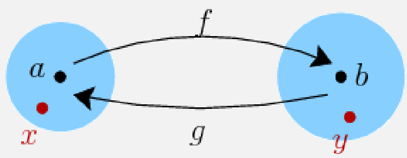
$$\operatorname{grad} f = (y_1, \ldots, y_q,\ x_1, \ldots, x_q) = (y^t, x^t)$$

$$\langle g, h\rangle' = h^t g' + g^t h'$$

(Ha g egyváltozós, akkor ... $= \langle \operatorname{grad} g, h\rangle + \langle h, \operatorname{grad} g\rangle$.

12.11 Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya)

Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és tegyük fel, hogy $f'(a) = A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A\,(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| < \frac{1}{2}$

$$\left|A^{-1}(y - b)\right| \geq |x - a| - \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x - a| \geq \Big(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\Big)|x - a| \geq \tfrac{1}{2}|x - a|$$

$$\left|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\right| = \left|x - a - A^{-1}(y - b)\right| = \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x - a| \leq$$
$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| \cdot 2\left|A^{-1}(y - b)\right| \leq \|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| \cdot 2\|A^{-1}\| \cdot |y - b|.$$

$$\frac{\left|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\right|}{|y - b|} \leq 2\|A^{-1}\|^2 \cdot \left|\varepsilon(g(y))\right| \to 0.$$

12.12 Kérdés

"f egy p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.

Ha van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$..."

Hogyan lehet egyszerűen eldönteni, vagy tudunk-e rá valami egyszerű elégséges feltételt, hogy van-e ilyen *lokális inverz* g függvény?

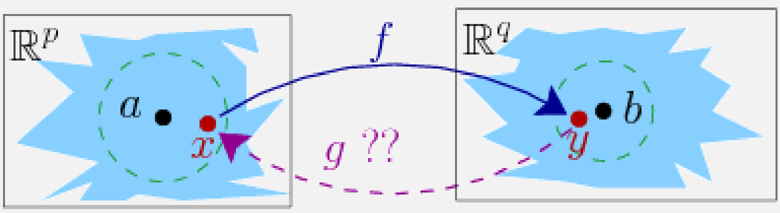
13. Lokális injektivitás

13.1 Kérdés (Lokális inverz függvény)

Mit várjunk el a lokális inverztől?
Lokális inverz?
Lokális injektivitás?
Lokális szürjektivitás?
Milyen tulajdonságú legyen az $f'(a)$ lineáris leképezés?

13.2 Definíció (lokális inverz)

Legyen $f(x)$ p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, folytonos az $a \in \operatorname{int} D_f$ pontban.



A $g(y)$ q-változós függvény az f lokális inverze az a pontban, ha léteznek olyan $A \subset D_f$ és $B \subset D_g$ halmazok, amelyekre

- $b \in \operatorname{int} B$,
- $f(x)$ folytonos és injektív az A halmazon
- $g(y)$ folytonos és injektív a B halmazon
- $f|_A$ és $g|_B$ egymás inverze.

13.3 Tétel

Lokális inverz csak $p = q$ esetén létezhet.

(A folytonos esetben nem bizonyítjuk. Például $p = 3$, $q = 2$ esetén a teljes ötszög gráf beágyazható $\mathbb{R}^3$-ben, de $\mathbb{R}^2$-ben nem, mert nem síkbarajzolható.)

13.4 Trivialitás

Ha f és g egymás lokális inverze az a, illetve a b pontban, és ezekben az pontokban mindkettő differenciálható, akkor az $f'(a)$ és $g'(b)$ leképezések egymás inverzei, és ez csak $p = q$ esetén lehetséges.

13.5 Definíció (lokális injektivitás)

Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény és $a \in \operatorname{int} D_f$. Az f függvény lokálisan injektív az a pontban, ha van olyan $r > 0$, hogy $f|_{B(a,r)}$ injektív.

13.6 Definíció (lokális szürjektivitás)

Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény és $a \in \operatorname{int} D_f$. Az f függvény lokálisan szürjektív az a pontban, ha a minden környezetének képe tartalmaz b körüli gömböt, vagyis

$$\forall r > 0 \ \exists s > 0 \ \forall y \in B(b,s) \ \exists x \in B(a,r) f(x) = y.$$

13.7 Tétel (Injektív és szürjektív lineáris leképezések)

Legyen $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad (A = f'(a)$ lesz$)$

- A injektív $\iff \operatorname{rk} A = p \quad (p \le q$ szükséges$) \iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \operatorname{rk} A = q \quad (q \le p$ szükséges$) \iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív
- A invertálható $\iff \operatorname{rk} A = p = q$ avagy $\det A \neq 0$

13.8 Trivialitás

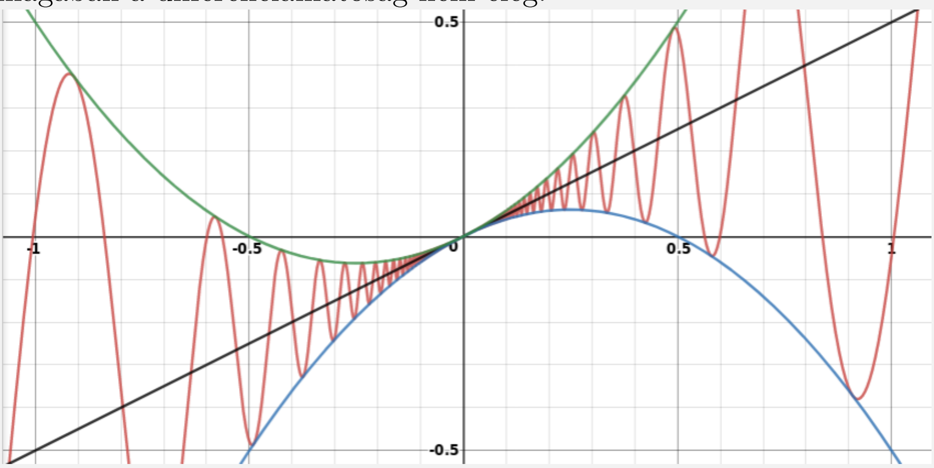
Ha A injektív / szürjektív / invertálható, akkor az A egy környezetében (ez a környezet a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ térnek része) minden leképezés injektív / szürjektív / invertálható.

Biz. Mindhárom tulajdonság azt mondja, hogy bizonyos részmátrixok közül valamelyiknek a determinánsa nem 0.

A determináns folytonos (mert rac. tört függvény), így van az A-nak egy környezete, ahol ugyanannak a részmátrixnak a determinánsa nem 0.

13.9 Példa

Önmagában a differenciálhatóság nem elég.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \dfrac{10}{x} - 10 \cos \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

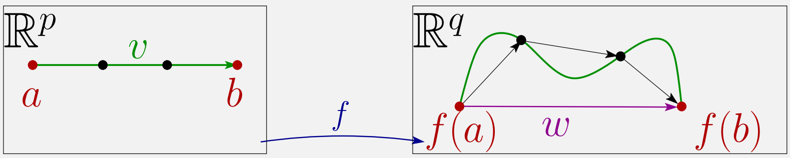
Noha a függvény mindenhol differenciálható, és $f'(0) \neq 0$, mégsincs lokális inverz a 0 körül.

A folytonos differenciálhatóságot is ki fogjuk kötni.

13.10 Lemma

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható. Ekkor

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} \left\|f'(x)\right\| \cdot |b - a|.$$



Biz. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$. Legyen $M = \sup_{x\in[a,b]} \left\|f'(x)\right\|$.

Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle = w^t f(x)$. Erre a függvényre

$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \left|f(b) - f(a)\right|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\left|f(b) - f(a)\right|^2 = \left|h(b) - h(a)\right| = \left|h'(c)(b - a)\right| = \left|w^t \cdot f'(c)(b - a)\right| \leq$$

$$\leq |w| \cdot \left|(f'(c)\ (b - a)\right| \leq |w| \cdot \left\|f'(c)\right\| \cdot |b - a| \leq \left|f(b) - f(a)\right| \cdot M \cdot |b - a|.$$

13.11 Lemma

Legyen $K \subset \mathbb{R}^p$ konvex nyílt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}^p$ olyan differenciálható leképezés, amelyre a K minden pontjában $\|f' - I\| \leq \frac{1}{2}$. Ekkor a K tetszőleges u, v pontjaira

$$|f(u) - f(v)| \geq \frac{1}{2}|u - v|.$$

Biz. Legyen $g(x) = f(x) - x$, ekkor $x = f(x) - g(x)$, $g' = f' - I$ és a feltétel szerint $\|g'\| \leq \frac{1}{2}$. Az előző lemmából $\|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{2}|u - v|$, ezért

$$|u-v| = \left|f(u)-g(u)-f(v)+g(v)\right| \leq \left|f(u)-f(v)\right|+\left|g(u)-g(v)\right| \leq \left|f(u)-f(v)\right|+\frac{1}{2}|u-v|.$$

13.12 Megjegyzés

Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ és $\|A - I\| < 1$, akkor A invertálható, mert bármilyen $x \neq 0$ vektor esetén

$$|Ax| \geq |x| - \Big|(A - I)x\Big| \geq |x| - \|A - I\| \cdot |x| > 0.$$

13.13 Tétel (A lokális injektivitás tétele)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ *folytonosan differenciálható* az a pontban, és
az $f'(a)$ lineáris leképezés *injektív*,

akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Biz. Legyen $A = J(a)$; ez egy $q \times p$-es mátrix, amelynek oszlopai lineárisan függetlenek. Ezért van olyan $p \times q$ méretű mátrix, amelyre $BA = I_p$.

Legyen $g = B \circ f$; ez is folytonosan differenciálható az a pontban, tehát az $g'(x)$ (leképezés értékű leképezés) folytonos az a pontban; létezik tehát olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r)$ környezetben

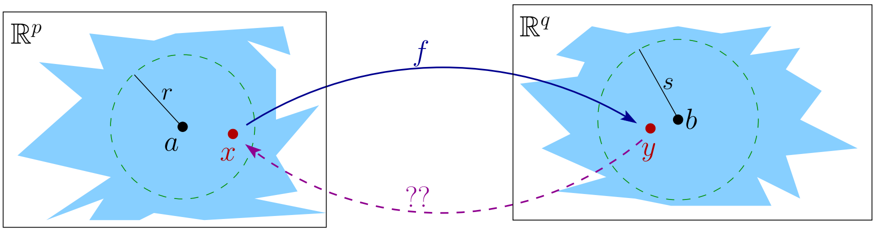
$$|g'(x) - g'(a)| = |g'(x) - I_p| < \frac{1}{2}.$$

Az előző lemma szerint, ha a, v két különböző pont ebben a gömbben, akkor

$$\Big|g(u) - g(v)\Big| \geq \frac{1}{2}|u - v| > 0,$$

ezért a gömbön f injektív.

14. Lokális szürjektivitás



14.1 Tétel (lokális szürjektivitás)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$ és $b = f(a)$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés *szürjektív*, akkor az f függvény lokálisan szürjektív az a pontban, tehát az a pont bármely környezetének f szerinti képe tartalmazza a b pont egy környezetét.
Kvantorokkal:

$$\forall r > 0 \quad \exists s > 0 \quad \forall y \in B(b, s) \quad \exists x \in B(a, r) \quad f(x) = y.$$

Biz. A $Jf(a)$ Jacobi-mátrix oszlopai között van q lin. független; az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az első q oszlop.

Csak olyan x-eket fogunk keresni, amelyekben $x_{q+1} = a_{q+1}, \ldots x_p = a_p$. Mostantól tehát feltesszük, hogy $p = q$; és $f'(a)$ invertálható.

Az f helyett vizsgálhatnánk az $f(x + a) - b$ függvényt; ezért az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a = b = 0_p$.

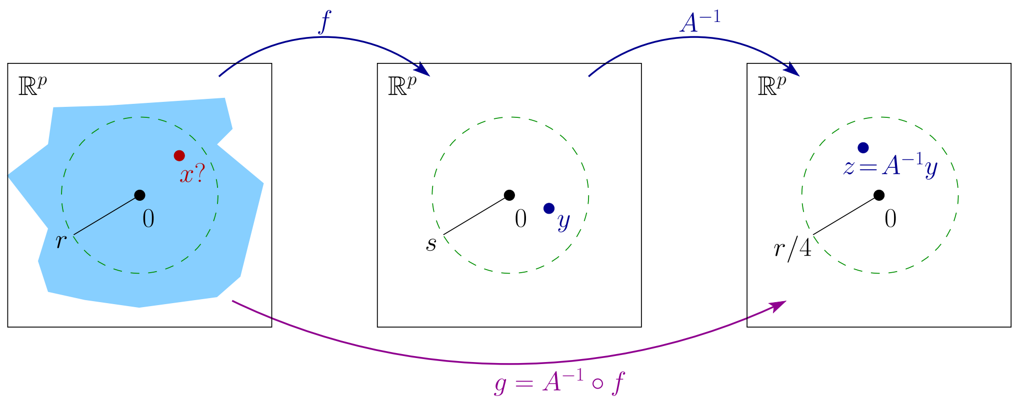
Legyen $g = A^{-1} \circ f$; ez is folytonosan differenciálható és $g'(0) = A^{-1}A = I$. A folytonos differenciálhatóság miatt van egy olyan $r_0 > 0$, hogy a $B(0, r_0)$ gömbben $|g' - I| \le \frac{1}{2}$. A 13.12 Megjegyés szerint az is igaz, hogy a g' leképezés invertálható.

Az állítást $r < r_0$-ra igazoljuk, és ez elég. Legyen $s = \dfrac{r}{4\|A^{-1}\|}$ és y tetszőleges pont a $B(0, s)$ gömbben; ehhez keressük a megfelelő x-et.

Legyen $z = A^{-1}y$, erre tehát $|y| < s$, és

$$|z| = \left|A^{-1}y\right| \le \|A^{-1}\| \cdot |y| < \|A^{-1}\| \cdot s = \frac{r}{4}.$$

Oyan $x \in B(0, r)$ pontra van szükségünk, amelyre $g(x) = z$, mert akkor $f(x) = A(g(x)) = Az = y$. Az x megtalálására kétféle módszert mutatunk.



1. módszer: minimumkeresés. Keressük meg a $\overline{B}(a, r)$ zárt gömbön a $h(x) = |g(x) - z|^2$ függvény minimumát. Akkor örülünk, ha ez a minimum a 0.

A Weierstrass-tétel miatt a minimum biztosan létezik.

A középpontban $h(0) = |-z|^2 < s^2$.

A határpontokban, tehát az $|x| = r$ gömbfelületen

$$|g(x) - z| = \Big|g(x) - g(0) - z\Big| \geq |g(x) - g(0)| - |z| \geq \frac{1}{2}|x - 0| - |z| > \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4},$$

tehát $h(x) > h(0)$. A minimumhely nem lehet a határon; valamilyen belső pontban veszi fel a h függvény.

Legyen x_0 a minimumhely; ez lokális minimumhely, tehát $h' = 0$:

$$0 = h'(x_0) = 2\Big(g(x_0) - z\Big)^t \cdot g'(x_0) = 0.$$

Az $g'(x_0)$ invertálható, tehát $g(x_0) - z = 0$.

Ezzel találtunk olyan $x_0 \in B(a, r_0) \subset B(a, r)$ pontot, amire $g(x_0) = z$, vagyis $f(x_0) = y$.

2a. módszer: iteráció.

Heurisztika: A keresett x_0 pont közelében

$$g(u) \approx g(x_0) + g'(x_0)(u - x_0) \approx z + I(u - x_0) = z + u - x_0,$$

vagyis $x_0 \approx u - g(u) + z$.

Legyen $k(u) = u - g(u) + z$, és definiáljuk a következő rekurzív sorozatot:

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = k(u_n) = u_n - g(u_n) + z.$$

ennek a limeszpontja lesz a keresett x_0 pont. Ezt most kicsit általánosabban megcsináljuk.

14.2 Definíció (kontrakció)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $k : H \to H$. A k függvény *kontrakció*, ha van olyan $q < 1$ szám, hogy bármely $u, v \in H$ pontok esetén

$$|k(u) - k(v)| \le q|u - v|.$$

14.3 Lemma (Banach-fixponttétel)

Ha $Z \subset \mathbb{R}$ nemüres, zárt, és $k : Z \to Z$ kontrakció, akkor k-nak van fixpontja, vagyis van olyan $x_0 \in Z$ pont, amelyre $k(x_0) = x_0$.

Biz. Rekurzívan definiálunk Z-ben egy pontsorozatot. Legyen $u_0 \in Z$ tetszőleges, és $u_{n+1} = k(u_n)$.

A kontrakció-tulajdonság miatt a k függvény folytonos, és bármely n-re

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \Big|k(u_{n+1}) - k(u_n)\Big| \le q|u_{n+1} - u_n|;$$

ebből triviális indukcióval

$$|u_{n+1} - u_n| \le q^n|u_1 - u_0|.$$

Tetszőleges $m < n$ esetén

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &\le |u_{m+1} - u_m| + |u_{m+2} - u_{m+1}| + \ldots + |u_n - u_{n-1}| \\ &\le (q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{n-1})|u_1 - u_0| = \frac{q^m - q^n}{1 - q}|u_1 - u_0| \\ &\le \frac{q^m}{1 - q}|u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

Ez $m \to \infty$ esetén 0-hoz tart, ezért az (u_n) sorozat Cauchy-tulajdonságú, tehát konvergens; legyen $x_0 = \lim u_n$. Mivel Z zárt, $x_0 \in Z$.

A k folytonossága miatt

$$k(x_0) = k(\lim u_n) = \lim k(u_n) = \lim u_{n+1} = x_0,$$

vagyis x_0 fixpontja k-nak.

Most térjünk vissza a $k(u) = u - g(u) + z$ függvényhez. Legyen $Z = \overline{B}(0, \frac{3}{4}r)$.

Az $Z \subset B(0, r)$ gömbben $\|k'\| = \|I - g'\| \le \frac{1}{2}$, ezért bármely $u, v \in Z$ esetén $|k(u) - k(v)| \le \frac{1}{2}|u - v|$. Továbbá $u \in Z$ esetén

$$|k(u)| = |k(0)| + |k(u) - k(0)| \le |z| + \frac{1}{2}|u - 0| < \frac{r}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}r < \frac{3}{4}r,$$

tehát $k(u) \in Z$.

A $k|_Z$ függvény tehát tényleg egy $Z \to Z$ kontrakció, aminek tehát van egy $x_0 \in Z \subset B(0,r)$ fixpontja. A fixpontban $x_0 = k(x_0) = x_0 - g(x_0) + z$, vagyis $g(x_0) = z$.

2b. módszer: A Banach-fixponttétel helyett egy sokkal erősebbet, a Brouwer-fixponttételt fogjuk alkalmazni.

14.4 Lemma (Brouwer-fixponttétel)

Ha Z zárt gömb, és $k : Z \to Z$ egy tetszőleges folytonos függvény, akkor a k függvénynek van fixpontja.

A tételt a topológia előadáson be fogjátok bizonyítani. Egy bizonyítás megtalálható a Laczkovich-T.Sós könyv függelékében.

Az f és a g függvényekről csak annyit fogunk felhasználni, hogy folytonosak az a pont egy környezetében, differenciálhatók az a pontban, és $A = f'(a)$ szürjektív, illetve $g'(a) = I$. Tehát csak az a-beli deriváltat fogjuk használni.

Az előző részhez hasonlóan, legyen $r_0 > 0$ olyan, amelyre $x \in B(a,r)$ esetén

$$\Big|g(x) - g(0) - g'(0)(x-0)\Big| = \Big|g(x) - x\Big| \le \frac{1}{2}|x|;$$

ilyen a g függvény 0-beli differenciálhatósága miatt létezik.

Tetszőleges $r < r_0$ esetén legyen $s = \frac{r}{2\|A^{-1}\|}$; azt állítjuk, hogy tetszőleges $y \in B(0,s)$ ponthoz van olyan $x \in B(0,r)$, amelyre $f(x) = y$, avagy a $z = A^{-1}(y)$ ponttal $g(x) = z$.

Vizsgáljuk a $k(x) = x - g(x) + z$ függvényt a $\overline{B}(0,r)$ zárt gömbön. Ez folytonos, és $|k(x)| \le |g(x) - x| + |z| < \frac{1}{2}|x| + |z| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2}$, tehát a k függvény a gömb belsejébe képez. A Brouwer-fixponttétel szerint k-nak van legalább egy x_0 fixpontja a zárt gömbben; mivel a k képei a gömb belsejében vannak, az x_0 is belső pont. Tehát $x_0 \in B(0,r)$ és $k(x_0) = x_0$, vagyis $g(x_0) = z$.

14.5 Tétel (lokális szürjektivitás, erősebb változat)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$ és $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonos az a pont egy környezetében, differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az f függvény lokálisan szürjektív az a pontban.

14.6 Definíció (Nyílt leképezés)

Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^q$, és minden $G \subset H$ halmazra a $f(G)$ halmaz nyílt, akkor f *egy nyílt leképezés*.

Következmény (nyílt leképezés tétele)

Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható, és H minden pontjában f' szürjektív, akkor f nyílt leképezés.

15. Inverzfüggvénytétel

15.1 Lemma

Tegyük fel, hogy $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt, $f : X \to \mathbb{R}^p$ folytons és injektív, és legyen $L = f(K)$. Ekkor

(1) L is kompakt;

(2) $f^{-1} : L \to K$ is folytonos.

Biz. (1a) A Weierstrass-tétel miatt triviális, hogy L korlátos.

(1b) Annak bizonyításához, hogy L zárt, tekintsünk egy tetszőleges $c \in \operatorname{cl} L$ pontot; azt kell igazolnunk, hogy $c \in L$.

A c-hez tudunk tartani L pontjaival: vannak olyan $y_1, y_2, \ldots \in L$ pontok, amelyekre $y_n \to c$. Mindegyik y_n egy egyértelmű $x_n \in K$ pont képe: $y_n = f(x_n)$.

A Bolzano–Weierstrass tétel miatt az (x_n) sorozatnak van konvergens (x_{n_k}) részsorozata; legyen $d = \lim x_{n_k}$. Mivel K zárt, és $x_{n_k} \in K$, az is igaz, hogy $d = \lim x_{n_k} \in K$.

Az f függvény folytonos a d pontban is. Az átviteli elv miatt

$$f(d) = f(\lim x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}) = \lim y_{n_k} = c.$$

Ezért $c = f(d) \in L$.

(2) ↯ Indirekt tegyük fel, hogy f^{-1} nem folytonos valamelyik $c \in L$ pontban. Ekkor van olyan $y_1, y_2, \ldots \in L$ sorozat, hogy $y_n \to c$, de $f^{-1}(y_n) \not\to f^{-1}(c)$.

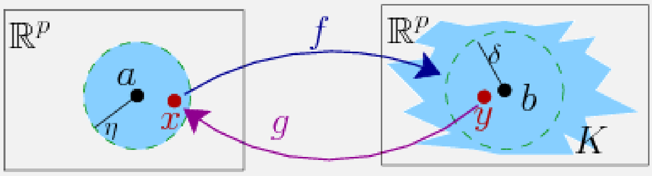
Legyen $x_n = f^{-1}(y_n)$, $d = f^{-1}(c)$; ekkor tehát $x_n \not\to d$, vagyis van olyan $\varepsilon > 0$, hogy végtelen sok n-re $|x_n - d| \geq \varepsilon$. Az ilyeneknek vegyük egy konvergens (x_{n_k}) részsorozatát: ezek tehát úgy konvergálnak valamilyen $e \in K$ ponthoz, hogy közben $|x_{n_k} - d| \geq \varepsilon$. Ezért d és e két különböző pont a K halmazban.

Ismét az átviteli elv miatt

$$f(e) = f(\lim x_{n_k}) = \lim f(x_{n_k}) = \lim y_{n_k} = c = f(d),$$

ez viszont ellentmond annak, hogy az f függvény injektív. ↯

15.2 Tétel (Inverzfüggvénytétel)



Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

akkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $y \in B(b, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$ pont, amelyre $f(x) = y$.
Avagy, létezik olyan $g : B(b, \delta) \to B(a, \eta)$ függvény, amelyre $f(g(y)) = y$.

(2) Az g függvény differenciálható, és g' folytonos b-ben.

(3) A $B(a, \eta)$ gömb pontjaiban f' invertálható, és $g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$.

Biz. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a, \eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a, \eta))$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b, \delta) \subset f(B(a, \eta))$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b, \delta)$, akkor $x \in B(a, \eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a, \eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b, \delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a, \eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint g differenciálható y-ban, és $g'(y) = (f'(x))^{-1}$.

A g' folytonos b-ben: $g'(y) = \left(f'\big(g(y)\big)\right)^{-1}$, g folytonos b-ben, f' folytonos $g(b) = a$-ben, és a mátrixinverz is folytonos.

16. Implicitfüggvény-tétel

5 Mese. *Függvény explicit (közvetlen) megadása:* $g : (x_1, \ldots, x_p) \to (y_1, \ldots, y_q)$

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

vagy

$$y = g(x)$$

Implicit (közvetett) megadás: $g : (x_1, \ldots, x_p) \to (y_1, \ldots, y_q)$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ f_q(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

vagy

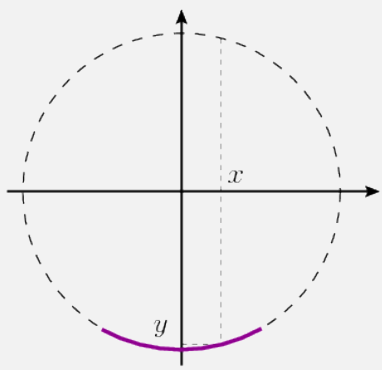
$$f(x, y) = 0_q$$

(egyenletrendszer).

Az egyenletrendszernek több megoldása is lehet, ezért többnyire hozzáteszünk valamilyen plusz feltételt, lokalizálást, hogy megyik megoldásra vagyunk kiváncsiak.

16.1 Példa (implicit függvény)

Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne, de hát ők már évszázadok óta csak gyönyörű szép, színes-szagos kifogásokat gyártanak.) Mi viszont az olyan esetekben is szeretnénk az impliciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs a kezünkben explicit megoldás, hanem esetleg csak egy számítógéppel előállított közelítő érték.

16.2 Kérdés

Honnan tudjuk, hogy egyáltalán van megoldása az egyenletrendszernek? Na és ha több is van, melyiket vegyük?

16.3 Kérdés

Ha tudunk egy (a, b) pontpárt, ami megoldása az egyenletrendszernek, lesz-e körülötte egy egyértelmű lokális megoldás, görbedarab?

16.4 Kérdés

Ha van is lokális implicit függvény, biztosak lehetünk benne, hogy differenciálható? Milyen képlet adja meg a deriváltat?

16.5 Tétel (implicit függvény differenciálási szabálya)

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p + q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Biz. Most jelentse $D_1 f$ az f első p változó szerinti parciális deriváltját ($D_1 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$) és $D_2 f$ az f utolsó q változó szerinti parciális deriváltját ($D_2 f(x, y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$).

Deriváljuk mindkét oldalt:

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$$\underbrace{D_1 f(x, g(x))}_{q\times p} + \underbrace{D_2 f(x, g(x))}_{q\times q} \cdot \underbrace{g'(x)}_{q\times p} = 0_{q\times p}$$

$$D_2 f(x, g(x)) \cdot g'(x) = -D_1 f(x, g(x))$$

És ha $D_2 f(x, g(x))$ invertálható is, akkor

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

16.6 Példák

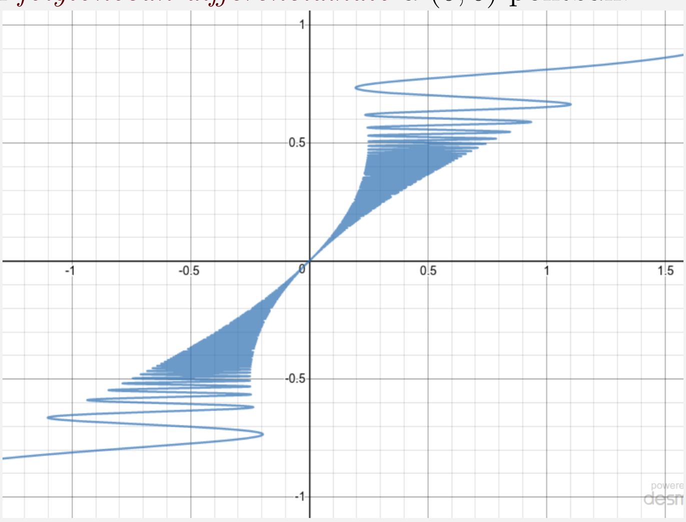
- $f(x, y) = x^3 - y^3$ a $(0, 0)$ pont körül. Az egyenletnek egyértelmű, differenciálható megoldása van, az $y = x$, a képlet 0/0-t ad a implicit függvény 0-beli deriváltjára.

- $f(x, y) = x^3 - y^9$ a $(0, 0)$ pont körül. Az egyenletnek egyértelmű, de nem differenciálható megoldása van, a $y = \sqrt[3]{x}$. A képlet 0/0-t ad a (nem létező) derivált értékére a 0-ban.

- $f(x, y) = x^2 - y^2$ a $(0, 0)$ pont körül. Itt két különböző differenciálbató megoldás van, a képlet 0/0-t ad eredményül.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $(0, 0)$ pont körül. Itt csak egyetlen pont a megoldáshalmaz, nincs lokális implicit függvény. A tétel képlete 0/0-t ad.

- $f(x, y) = \begin{cases} y + y^2 \sin \frac{1}{y^5} - x & \text{ha } y \neq 0; \\ -x & \text{ha } y = 0 \end{cases}$ a $(0, 0)$ pont körül. Itt nincs folytonos megoldás, a képlet mégis 1/1-et, egy értelmesnak látszó értéket ad. Vegyük észre, hogy az egyenlet mindenhol differenciálható, de nem *folytonosan differenciálható* a $(0, 0)$ pontban.



Az első 4 példa szerint a $D_2 f = 0$ esetben előfordulhat, hogy van egyértelmű lokális implicit függvény, de ez lehet differenciálható és nem differenciálható is; lehet, hogy többféle implicit függvény létezik, vagy egy sincs. Az utolsó példában pedig az egyenlet nem elég szép az adott pontban.

Tanulság: Érdemes lesz kikötni, hogy az egyenletrendszer folytonosan differenciálható, és $D_2 f(x, g(x))$ invertálható.

16.7 Tétel (implicitfüggvény-tétel)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a,b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a,b) = 0_q$ (vagyis az (a,b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a,b) pontban, és $D_2 f(a,b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(a,\delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $y = g(x) \in B(b,\eta)$ pont, amelyre $f(x,y) = 0_q$.

(2) Az így definiált $g(x)$ függvény differenciálható a $B(a,\delta)$ gömbben, és

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

(3) g' folytonos az a pontban.

Biz. Könnyebb többet bizonyítani. Az egyenletrendszer jobboldalán a 0_q vektor helyére is tegyünk egy $z \in \mathbb{R}^q$ vektort. Az új egyenlet:

$$f(x,y) = z.$$

Azt állítjuk, hogy minden a-hez közeli x és 0_q-hoz közeli z esetén ehhez van egy egyértelmű y ami megoldása.

Denifiáljuk a következő, $p+q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverzfüggvénytételt az (a,b) pontban.

Az (a,b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a,b) = (a,0)$.

Az (a,b) pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} D_1 x|_{x=a} & D_2 x|_{x=a} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0_{p\times q} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Ez invertálható, mert a jobb alsó sarok invertálható.

Az inverzfüggvénytétel feltételei teljesülnek; F-nek létezik egy lokális inverze az $(a,0)$ egy környezetében, és a lokális inverz folytonosan differenciálható az $(a,0)$ pontban.

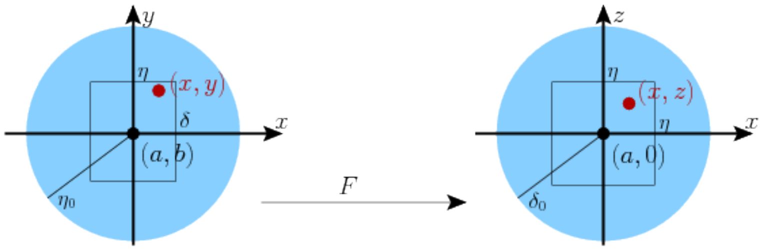
$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\f(x,y)\end{pmatrix};\qquad F'\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\D_1f(a,b) & D_2f(a,b)\end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0,\eta_0>0$ számok, hogy minden $(x,z)\in B\big((a,0),\delta_0\big)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w,y)\in B\big((a,b),\eta_0\big)$ pár, amire $F(w,y)=(x,z)$.

Persze $w=x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\G(x,z)\end{pmatrix}$ alakú.

Az óhajtott g függvény a G-nek a $z=0_q$ szekciója lesz: $g(x)=G(x,0_q)$. Ez teljesíti az $f(x,g(x))=0_q$ függvényegyenletet, és folytonosan differenciálható az a pontban.

(Félre: csak a δ,η számokat ne kellene vagdosni…)



Legyen $\eta=\frac{1}{2}\eta_0$. Válasszunk olyan $0<\delta\le\delta_0$ számot, hogy minden $x\in B(a,\delta)$ esetén $|g(x)|<\eta$ is teljesüljön.

Ekkor tehát a kicsit nagyobb halmazon is egyértelmű $(x,y)\in B((a,b),\eta_0)$ pontunkra az is igaz, hogy $|y|=|g(x)|<\eta$.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix};\qquad F'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{p\times p} & 0\\D_1f(x,y) & D_2f(x,y)\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}I_{p\times p} & 0\\D_1f(x,y) & D_2f(x,y)\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}I_{p\times p} & 0\\-\big(D_2f(x,y)\big)^{-1}D_1f(x,y) & \big(D_2f(x,y)\big)^{-1}\end{pmatrix};$$

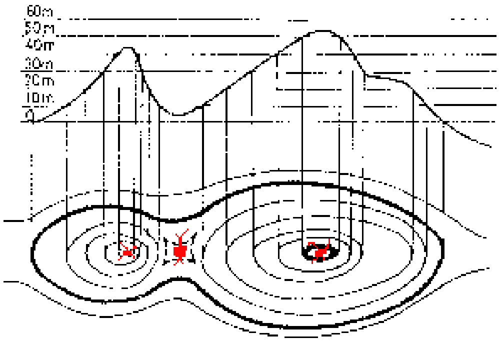
Az első blokkoszlop az x, a második a z szerinti derivált, tehát

$$g'(x)=-\big(D_2f(x,y)\big)^{-1}D_1f(x,y)=-\big(D_2f(x,g(x))\big)^{-1}D_1f(x,g(x)).$$

6 Mese. *Az implicitfüggvény-tétel következményei*

$p+q$ változóra p független egyenlet: q-dimenziós grafikondarab (paraméteres felület).

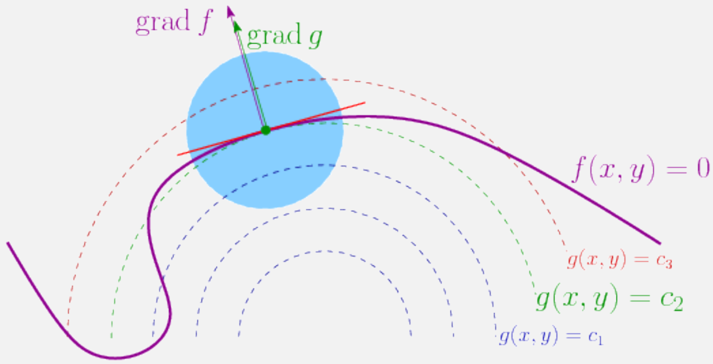
Szintvonalas térképek: ha valahol a függvény folytonosan differenciálható, és a gradiens nem a nullvektor, ott a szintvonal (valamilyen függvényérték őssképe) lokálisan egy folytonosan differenciálható görbedarab.


60m
50m
40m
30m
20m
10m
0

17. Feltételes lokális szélsőértékek

17.1 Példa

A $g(x,y)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f(x,y) = 0$ görbén. Razoljuk meg a g függvény szintvonalait.



Elképzelésünk szerint az $f(x,y) = 0$ görbe irányában $g(x,y)$ iránymenti deriváltja 0, vagyis a minimumhelyen a görbe és a szintvonal érinti egymást. Az f gradiense a görbére, a g gradiense a szintvonalra merőleges, tehát a két gradiens párhuzamos, egymás konstansszorosa:

$$\operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f?$$

vagy inkább

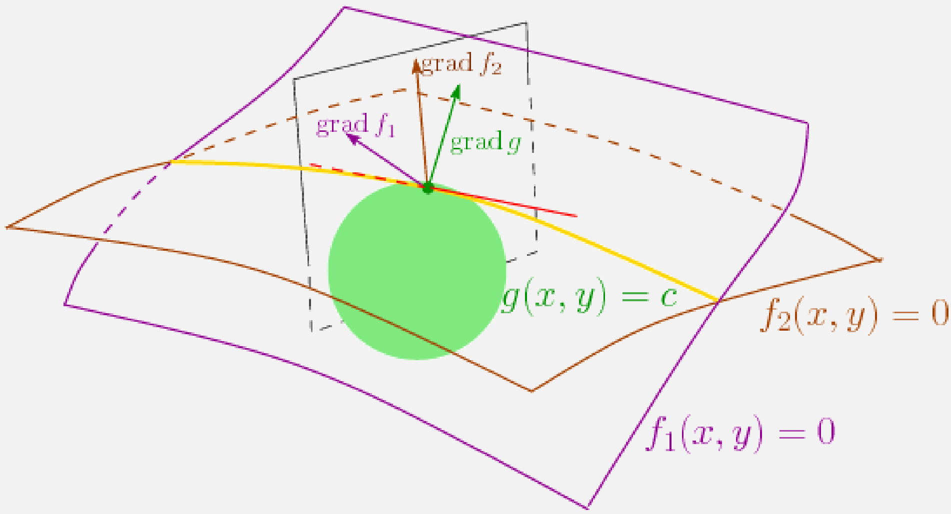
$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f?$$

vagy a biztonság kedvéért

$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f?$$

17.2 Példa

A $g(x, y, z)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f_1(x, y, z) = 0$ és $f_2(x, y, z) = 0$ felületek metszésvonalán.
Rózsaszínű álmunkban a két felület metszete egy szép, sima görbe. Ehhez megkeressük a g függvény az első olyan szintfelületét, amelynek van közös pontja a metszetgörbével.



Sejtésünk: *a görbe irányában* mindhárom függvény iránymenti deriváltja 0, vagyis mindhárom függvény gradiense a görbére merőleges síkban van.
Ha viszont a három vektor egy síkban van, akkor lineárisan összefüggnek: alkalmas λ_0, λ_1, λ_2, nem mind nulla számokkal

$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2.$$

(Ha tudjuk, hogy grad f_1 és grad f_2 függetlenek, akkor választhatjuk $\lambda_0 = 1$-et.)
A $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ neve: *Lagrange-multiplikátorok*.

17.3 Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ (*feltétel* vagy *egyenletrendszer*), $g : H \to \mathbb{R}$ (*célfüggvény*) és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek *feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett*, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leq g(a)$.

A g függvénynek *feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett*, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geq g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha a-ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az $f = 0$ feltétel mellett.

17.4 Tétel (Lagrange féle multiplikátor módszer)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$, $g : H \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$. Ha f és g folytonosan differenciálható az a pontban, és g-nek lokális szélsőértéke van a-ban az $f = 0$ feltétel mellett, akkor a $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan összefüggőek, avagy vannak olyan $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q$ valós számok, nem mindegyik 0, hogy

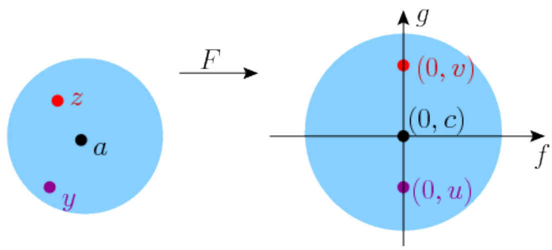
$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g(a) = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1(a) + \ldots + \lambda_q \cdot \operatorname{grad} f_1(a).$$

Biz. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés. Az F tehát lokálisan szürjektív.

Bármely $r > 0$ esetén $F(B(a, r))$ tartalmazza az $F(a) = (0_q, c)$ pont egy környezetét. Ebben a környezetben van olyan $(0, \dots, 0, u) = F(y)$ pont, ahol $u < c$, és van olyan $(0, \dots, 0, v) = F(z)$ pont is, ahol $v > c$.



Tehát bármilyen $r > 0$-hoz vannak olyan $y, z \in B(a, r)$ pontok, amelyekre $f(y) = f(z) = 0_q$, $g(y) < g(a)$ és $g(z) > g(a)$. Akkor viszont g-nek nincs sem feltételes lokális minimuma, sem feltételes lokális maximuma az a pontban.

17.5 Példa

Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.
A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.
A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőértékhelyeken $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ és $\operatorname{grad} g = (1, 2)$ egymás konstansszorosa: $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$. Ezt az egyenletrendszert kaptuk:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0;$$
$$2x = \lambda;$$
$$2y = 2\lambda.$$

Megoldva $\lambda = \pm 2$, $x = \pm 1$, $y \pm 2$.

Tehát két megoldás van: $(x, y) = (1, 2)$ vagy $(x, y) = (-1, -2)$; ezek a gyanús pontok, közöttük van a minimum és a maximum is, meg az is aki csak rosszkor volt rossz helyen.

Behelyettesítve $g(1, 2) = 5$, $g(-1, -2) = -5$. Tehát az $x^2 + y^2 - 5 = 0$ feltétel mellett $x + 2y$ maximuma 5, minimuma -5.

17.6 Példa

Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$;
célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.
A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.
Olyan pontokat keresünk, ahol $\operatorname{grad} f_1 = (1, 1, 1)$, $\operatorname{grad} f_2 = (2x, 2y, 2z)$ és $\operatorname{grad} g = (yz, zx, xy)$ linárisan összefüggő.

$$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$$

$$\lambda_0 \cdot (yz, zx, xy) = \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (2x, 2y, 2z)$$

Ez az egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{gathered} x + y + z - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ \lambda_0 \cdot yz = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2x \\ \lambda_0 \cdot zx = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2y \\ \lambda_0 \cdot xy = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2z. \end{gathered}$$

Vagy helyette

$$\begin{gathered} x + y + z - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ \det \begin{pmatrix} yz & zx & zy \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = 0 \end{gathered}$$

18. Magasabbrendű deriváltak

Magasabbrendű paricális deriváltak. Többszörös differenciálhatóság. A többszörös differenciálhatóság és a parciális deriváltak differenciálhatóságának kapcsolata. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények akárhányszoros differenciálhatósága. Young tétele. A parciális deriválás sorrendjének felcserélhetősége.

A k-adik derivált mind k-lineáris forma és mint homogén k-adfokú polinom. [LTS2, 58–64.o.]

Definíció (másodrendű paricális deriváltak)

A másodrendű parciális deriváltak a parciális derivált függvények parciális deriváltjai.
Praktikus lehet kikötni, hogy csak az értelmezési tartomány belsejében vizsgáljuk ezeket, máskor meg az a praktikus, ha mindenhol, ahol értelmesek,
Ha $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$ valamilyen függvény, továbbá $a \in H$ és $1 \leq i, j \leq p$, akkor a $D_i f$ parciális deriváltfüggvény j-edik változó szerinti parciális deriváltját, tehát a $D_j(D_i f)$ függvényt számtalan féle módon szokás jelölni:

$$D_j D_i f,\ D_{ji} f,\ D_{x_j} D_{x_i} f,\ D_{x_j x_i} f,\ \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f(x),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},\ f''_{x_i x_j},\ f_{x_i x_j}, \ldots$$

Példák

1. Az $f(x,y) = x^2 \cos y$ függvény másodrendű parciális deriváltjai:

$D_1 D_1 f(x,y) = 2\cos y$	$D_2 D_1 f(x,y) = -2x \sin y$
$D_1 D_2 f(x,y) = -2x \sin y$	$D_2 D_2 f(x,y) = -x^2 \cos$

Láthatjuk, hogy $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$.

2. A

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényre $D_1 f(0,y) = -y$ és $D_2 f(x,0) = x$, így $D_1 D_2 f(0,0) = 1$ és $D_2 D_1 f(0,0) = -1$ különbözők.
Vegyük észre, hogy $D_1 D_2 f(0,0)$ értékét meghatározzák az f-nek az y-tengely egy kis környezetében, mondjuk egy szögtartományban felvett értékei, míg $D_2 D_1 f(0,0)$ értékét meghatározzák az f-nek az x-tengely egy kis környezetében felvett értékei. A két szögtartomány lehet diszjunkt, a kétféle parciális deriváltat egymástól függetlenül előírhatjuk.

(Akit érdekel az ilyenfajta frusztráció, megpróbálhat olyan elemi függvényt találni, amikor $D_1 D_2 f \neq D_2 D_1 f$.)

Második derivált

Ha $(V, \|.\|)$ egy normált vektortér, $H \subset \mathbb{R}^p$, akkor egy $f : H \to V$, tehát p-változós, vektorértékű függvény deriváltját értelmezhetjük a szokásos módon: az $a \in \operatorname{int} H$ pontban a függvény differenciálható, ha létezik egy olyan (egyértelmű) $A : \mathbb{R}^p \to V$ lineáris leképezés, amelyre $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0$. A derivált függvény tehát a $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, V)$ térbe képez.

Ha V véges dimenziós, az $f(x)$ értékeit a V egy rögzített bázisában írjuk fel, akkor a differenciálhatóság ekvivalens feltétele, hogy az f koordinátafüggvényei differenciálhatóak legyenek az a pontban.

Tekintsünk most egy $f : H \to \mathbb{R}$ függvényt és ennek deriváltját. Az f' leképezés a $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ vektortérbe képez, tehát a derivált deriváltja egy $\mathbb{R}^p \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ lineáris leképezés, vagyis f'' a $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}))$ térbe képez. Ezt tovább lehet folytatni, a k-adik deriváltat rekurzívan definiálhatjuk, a $f^{(k)})(a)$ a $\underbrace{\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \ldots \operatorname{Hom}(}_{k \text{ db}} \mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \ldots))$ tér egy eleme lesz.

Ha az $f'(g) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ leképezést a $\operatorname{grad} f(x)$ gradiensvektorral azonosítjuk, akkor mondhatjuk azt, hogy az f' függvény koordinátafüggvényei a $D_1 f, \ldots, D_p f$ parciális deriváltak. A függvény akkor lesz kétszer differenciálható, ha az első parciális derivált függvények differenciálhatóak.

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$. Azt mondjuk, hogy *$f$ kétszer differenciálható az a pontban*, ha

- az a pont egy környezetében f differenciálható, és
- az a pontban a $D_1 f, \ldots, D_p f$ parciális derivált függvények mindegyike differenciálható.

Definíció (Hesse-mátrix)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$, és tegyük fel, hogy az f függvény kétszer parciálisan differenciálható az a pontban. A

$$\begin{pmatrix} D_{11} f(a) & D_{21} f(a) & \ldots & D_{p1} f(a) \\ D_{12} f(a) & D_{22} f(a) & \ldots & D_{p2} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1p} f(a) & D_{2p} f(a) & \ldots & D_{pp} f(a) \end{pmatrix}$$

mátrixot az f függvény a pontbeli *Hesse-mátrix*ának nevezzük, jelel $Hf(a)$.

Valójában a második derivált leképezést írtuk fel mátrix alakban: az a pont közelében, ha a gradienst oszlopvektor alakban írjuk, akkor

$$\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(a) = Hf(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|,$$

avagy

$$Hf(a) = J \operatorname{grad} f(a),$$

vagyis az $f''(a) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}))$ lineáris leképezésnek a Hesse-mátrixszal való balról szorzás felel meg, és a deriváltnak megfelelő $\operatorname{grad} f$ függvény Jacobi-mátrixa a Hesse mátrix.

18.1 Trivialitás

Minden elemi függvény kétszer differenciálható (ha az x^α, $\arcsin x$, $\arccos x$ függvényeket nem értelmezzük az értelmezési tartomány határpontjaiban).

Biz. A parciális deriváltak is elemi függvények.

18.2 Tétel

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$, és tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható, és kétszer parciálisan differenciálható az a pont egy környezetében, Ha az f második parciális deriváltjai folytonosak az a pontban, akkor f kétszer differenciálható a-ban.

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$. Az f függvény az a pontban *folytonosan differenciálható*, ha az a pont egy környezetében f kétszer differenciálható, és az $D_{ij}f$ második parciális derivált függvények folytonosak a-ban.

(Ez persze megfelel annak, hogy a mátrikértékű $Hf(x)$ függvény folytonos a-ban.)

Tétel (Young-tétel)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $f : H \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$, és tegyük fel, hogy az (a, b) pont egy környezetében $f(x, y)$ parciálisan differenciálható.

(a) Ha $D_1 f(x, y)$ és $D_2 f(x, y)$ is differenciálható az (a, b) pontban, akkor

$$D_1 D_2 f(a, b) = D_2 D_1 f(a, b).$$

(b) Ha az $D_1 D_2 f(x, y)$ és $D_2 D_1 f(x, y)$ másodrendű parciális deriváltak léteznek az (a, b) pont egy környezetében, és folytonosak az (a, b) pontban, akkor

$$D_1 D_2 f(a, b) = D_2 D_1 f(a, b).$$

A tétel történetéről és változatairól lásd: Symmetry of second derivatives

Biz. Legyen $r > 0$ olyan, hogy f parciálisan differenciálható a $(a-r, a+r) \times (b-r, b+r)$ négyzeten. Legyen $0 < t < r$ esetén

$$\Delta(t) = \frac{f(a+t, b+t) - f(a, b+t) - f(a+t, b) + f(a, b)}{t^2}.$$

A $\lim\limits_{t \to +0} \Delta(t)$ határértéket fogjuk vizsgálni.

A $\Delta(t)$ kifejezés azt méri, hogy a függvénygrafikonon az $[a, a+t] \times [b, b+t]$ négyzet fölötti darabja mennyire csavarodik meg. Heurisztikusan leegyszerűsítve, $\dfrac{f(a+t, b+t) - f(a+t, b)}{t} \approx D_2 f(a+t, b)$ és $\dfrac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t} \approx D_2 f(a, b)$, tehát

$$\Delta(t)=\frac{\frac{f(a+t,b+t)-f(a+t,b)}{t}-\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t}}{t}\approx\frac{D_2f(a+t,b)-D_2f(a,b)}{t}\approx D_1D_2f(a,b).$$

Ugyanezt a két változó felcserélésével is elmondhatjuk:

$$\Delta(t)=\frac{\frac{f(a+t,b+t)-f(a,b+t)}{t}-\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}}{t}\approx\frac{D_1f(a,b+t)-D_1f(a,b)}{t}\approx D_2D_1f(a,b).$$

Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon>0$ számot. A tétel (a) változatának bizonyításához olyan kicsi r-et vegyünk, hogy a $(a-r,a+r)\times(b-r,b+r)$ négyzeten $\Big|D_1D_2f(x,y)-D_1D_2f(a,b)\Big|<\varepsilon$ és $\Big|D_2D_1f(x,y)-D_1D_2f(a,b)\Big|<\varepsilon$ teljesüljön. A (b) változat esetén pedig olyen kis r-et, hogy a a $(a-r,a+r)\times(b-r,b+r)$ négyzeten

$$\Big|D_1f(x,y)-D_1f(a,b)-D_1D_1f(a,b)(x-a)-D_2D_1f(a,b)(y-b)\Big|<\varepsilon$$

és

$$\Big|D_2f(x,y)-D_2f(a,b)-D_1D_2f(a,b)(x-a)-D_2D_2f(a,b)(y-b)\Big|<\varepsilon$$

telesüljön.

Legyen $g(x)=\dfrac{f(x,b+t)-f(x,b)}{t}$; ezzel a függvénnyel

$$\Delta(t)=\frac{g(a+t)-g(a)}{t}.$$

Az f parciálisan differenciálható, ezért g differenciálható. Az egyváltozós Lagrange-középértéktétel szerint van olyan $\xi=\xi(t)\in(a,a+t)$ szám, hogy

$$\Delta(t)=\frac{g(a+t)-g(a)}{t}=g'(\xi)=\frac{D_1f(\xi,b+t)-D_1f(\xi,b)}{t}.$$

Az állítás (b) változatában ismét alkalmazzuk a Lagrange-középértéktételt az $y\mapsto D_1f(\xi,y)$ függvényre: a tétel szerint létezik olyan $\eta=\eta(t)\in(b,b+t)$ szám, hogy

$$\Delta(t)=\frac{D_1f(\xi,b+t)-D_1f(\xi,b)}{t}=D_2D_1f(\xi,\eta).$$

Mivel $(\xi,\eta)\in(a-r,a+r)\times(b-r,b+r)$,

$$\Big|\Delta(t)-D_2D_1f(a,b)\Big|=\Big|D_2D_1f(\xi,\eta)-D_2D_1f(a,b)\Big|<\varepsilon.$$

Tehát,

$$\forall\varepsilon\quad\exists r>0\quad\forall t\in(0,r)\quad\Big|\Delta(t)-D_2D_1f(a,b)\Big|<\varepsilon,$$

vagyis

$$\lim_{t\to+0} \Delta(t) = D_2D_1f(a,b).$$

A tétel (a) változatához tudjuk, hogy

$$\left|D_1f(\xi,b+t)-D_1f(a,b)-D_1D_1f(a,b)(\xi-a)-D_2D_1f(a,b)t\right| < \varepsilon\cdot\sqrt{(\xi-a)^2+t^2} < 2\varepsilon t,$$

$$\left|D_1f(\xi,b) - D_1f(a,b) - D_1D_1f(a,b)(\xi-a)\right| < \varepsilon\cdot(\xi-a) < \varepsilon t,$$

a kettő különbségéből

$$\left| \Big(D_1f(\xi,b+t) - D_1f(a,b) - D_1D_1f(a,b)(\xi-a) - D_2D_1f(a,b)t\Big) - \Big(D_1f(\xi,b) - D_1f(a,b) - D_1D_1f(a,b)(\xi-a)\Big) \right| < 2\varepsilon t + \varepsilon t$$

$$\Big|\underbrace{D_1f(\xi,b+t) - D_1f(\xi,b)}_{t\cdot\Delta(t)} - D_2D_1f(a,b)t\Big| < 3\varepsilon t,$$

$$\left|\Delta(t) - D_2D_1f(a,b)\right| < 3\varepsilon.$$

Ezekkel a feltételekkel is

$$\lim_{t\to+0} \Delta(t) = D_2D_1f(a,b).$$

Ugyanezeket a lépéseket elmondhatjuk úgy, hogy az x és az y szerepét felcseréljük, és a $g(x)$ helyett a $G(y) = \dfrac{f(a+t,y)-f(a,y)}{t}$ függvényt írjuk fel; így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to+0} \Delta(t) = D_1D_2f(a,b).$$

A határérték egyértelműsége miatt $D_2D_1f(a,b) = D_1D_2f(a,b)$.

18.3 Következmény

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$. Ha f kétszer differenciálható az a pontban, akkor bármely $1 \le i,j \le p$ esetén $D_iD_jf(a) = D_jD_if(a)$, vagyis a $Hf(a)$ Hesse-mátrix szimmetrikus.

Magasabbrendű deriváltak

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$. Az f függvény *$(k+1)$-szer differenciálható* az a pontban, ha

- Az a egy környezetében k-szor differenciálható, és
- A $D_{i_1 \dots i_k} f$ k-adik parciális derivált függvények differenciálhatók a-ban.

A függvény *akányhányszor differenciálható* az a pontban, ha minden k-ra k-szor differenciálható.

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$. Az f függvény k-szor folytonosan differenciálható az a pontban, ha

- Az a egy környezetében k-szor differenciálható, és
- A $D_{i_1 \dots i_k} f$ k-adik parciális derivált függvények folytonosak a-ban.

18.4 Trivialitás

Minden elemi függvény akárhányszor differenciálható (ha a x^α, $\arcsin x$, $\arccos x$ függvényeket nem értelmezzük az értelmezési tartomány határpontjaiban).

18.5 Tétel

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$, és tegyük fel, hogy az f függvény $(k-1)$-szer differenciálható, és k-szor parciálisan differenciálható az a pont egy környezetében, Ha az f k-adik parciális deriváltjai folytonosak az a pontban, akkor f k-szor differenciálható a-ban.

18.6 Tétel

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} H$, és tegyük fel, hogy az f függvény k-szer differenciálható az a pontban. Ha az $1 \le i_1, \le i_k \le p$ indexeknek $j_1, \ldots j_k$ egy tetsztőleges permutációja, akkor

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(a) = D_{j_1 j_2 \ldots j_k} f(a).$$

Biz. 1. speciális eset: A két indexsorozatban az első $k-2$ elem ugyanaz, de az utolsó két indexet felcseréltük.

A 18.3 következnény szerint, mivel a $D_{i_1} \ldots D_{i_{k-2}} f(x)$ függvény kétszer differenciálható az a pontban,

$$\begin{aligned} D_{i_1 \ldots i_k} f(a) &= D_{i_k} D_{i_{k-1}} D_{i_1 \ldots i_{k-2}} f(a) \\ &= D_{i_{k-1} D_{i_k}} D_{i_1 \ldots i_{k-2}} f(a) = D_{j_k} D_{j_{k-1}} D_{j_1 \ldots j_{k-2}} f(a) = D_{j_1 \ldots j_k} f(a). \end{aligned}$$

2. speciális eset: A két indexsorozatban az első h és az utolsó $k-h-2$ elem ugyanaz, de a $(h+1)$ és a (h_2)-edik elemet felcseréltük, és ez nem az utolsó két elem (vagyis $h \le k-3$).

A feltétel szerint egy környezetben a $D_{i_1} \ldots D_{i_h} f(x)$ függvény kétszer differenciálható, tehát ebben a környezetben $D_{i_1 \ldots i_{h+2}} f(x) = D_{j_1 \ldots j_{h+2}} f(x)$. A további deriváltatk ugyanazok.

Általános eset: a szoszédos elemek felcserélése az összes permutációt generálja.

A k-adik derivált mint k-lineáris függvény

Az $f^{(k)})(a) \in \underbrace{\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \ldots, \operatorname{Hom}(}_{k \text{ db}} \mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \ldots))$ leképezés egy k-lineáris függvény: ha sorban behelyettesítünk k darab $\mathbb{R}^p$-beli vektort, végül egyetlen számot kapunk.

$$f'(a)(x) = \sum_{i=1}^{p} D_i f(a) \cdot x_i$$

$$f''(a)(x)(y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} D_{ij} f(a) \cdot x_i y_j$$

$$f^{(k)}(a)(x^1)(x^2) \ldots (x^k) = \sum_{i_1=1}^{p} \sum_{i_2=1}^{p} \ldots \sum_{i_k=1}^{p} D_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(a) \cdot {x^1}_{i_1} {x^2}_{i_2} \ldots {x^k}_{i_k}.$$

19. Taylor-polinomok

k-adik differenciál. Taylor-polinom. Az $F(a+t(b-a))$ függvény k-adik deriváltjának felírása F k-adik differenciáljával. Taylor-formula. A Taylor-polinom hibájának nagyságrendje. [LTS2, 64–71]

A Taylor-polinomok előállítják egy adott függvény deriváltjait egy szintén megadott pontban. Legyen f p-változós, valós (szám) értékű függvény, n-szer differenciálható az a pontban. A $T_{f,a,n}(x_1,\dots,x_p)=T_n(x)$ az a legfeljebb n-edfokú polinom *lesz*, amelyre $T_n(a)=f(a)$, $T_n'(a)=f'(a)$, $T_n''(a)=f''(a)$, $\dots$, $T_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$. Másképpen, minden $0\le k\le n$ egészre és tetszőleges $1\le i_1,\dots,i_k\le p$ indexekre $D_{i_1\dots i_k}T_n(a)=D_{i_1\dots i_k}f(a)$.

Az egyszerűbb képletek kedvéért legyen $a=0\in\mathbb{R}^p$, és írjuk fel a $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ és $T_3(x)$ polinomokat.

A $T_0(x)$ persze konstans, az értéke $f(0)$, tehát

$$T_0(x)=f(0).$$

A T_1-et keressük

$$T_1(x)=f(0)+\sum_{i=1}^{p}a_ix_i$$

alakban. Az x_i szerinti parciális derivált megmondja az a_i értékét: $a_i=D_iT_1(0)=D_if(0)$, tehát

$$T_1(x)=f(0)+\sum_{i=1}^{p}D_if(0)\cdot x_i=f(0)+f'(0)(x).$$

Most keressük $T_2(x)$-et

$$T_2(x)=f(0)+f'(0)(x)+\sum_{1\le i\le p}b_ix_i^2+\sum_{1\le i<j\le p}c_{ij}x_ix_j$$

alakban. Az $D_{ii}T_2(0)$ és $D_{ij}T_2(0)$ másodrendű parciális deriváltak értéke $D_{ii}f(0)=D_{ii}T_2(0)=2b_{ii}$ és $D_{ij}f(0)=D_{ij}T_2(0)=c_{ii}$, tehát $b_{ii}=\frac{1}{2}D_{ii}f(0)$ és $c_{ij}=D_{ij}f(0)$.

A kapott kifejezést szimmetrikusabbá tehetjük, ha az $i>j$ párokra is értelmezzük a c_{ij} együtthatót, így azt kapjuk, hogy

$$T_2(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}\sum_{j=1}D_{ij}x_ix_j=f(0)+f'(0)(x)+\frac{1}{2}f''(0)(x)(x).$$

Végül, legyen

$$T_3(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{1}{2}f''(0)(x)(x)+\sum id_ix_i^3+\sum_i\sum_j e_{ij}x_i^2x_j+\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k.$$

A harmadrendű parciális deriváltakból $6c_i = D_{iii}T_3(0) = D_{iii}f(0)$, $2d_{ij} = D_{iij}T_3(0) = D_{iij}f(0)$, $e_{ijk} = D_{ijk}T_3(0) = D_{ijk}f(0)$. Ismét szimetrizálva,

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(0) + f'(0)(x) + \frac{1}{2}f''(0)(x)(x) + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} D_{ijk}f(0)x_ix_jx_k \\ &= f(0) + f'(0)(x) + \frac{1}{2}f''(0)(x)(x) + \frac{1}{6}f'''(0)(x)(x)(x). \end{aligned}$$

Definíció (függvény k-adik differenciálja)

Legyen $f(x)$ p-változós függvény, k-szor differenciálható az a pontban. *Az $f(x)$ függvény k-adik differenciája az a pontban* a következő p-változós, homogén, k-adfokú polinom:

$$d^k f(a): \quad (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p}\cdots\sum_{i_k=1}^{p} D_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(a)\cdot x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

A $k = 0$ esetben $d^0 f(a) = f(a)$.

Definíció (többváltozós Taylor-polinom)

Legyen $f(x)$ p-változós függvény, n-szer differenciálható az a pontban. *Az $f(x)$ függvény a pont körüli n-edik Taylor-polinomja*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(a)(x-a).$$

A Taylor-polinom *n-edik maradéktagja*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Lemma

Legyenek $s_1, \ldots, s_p$ és $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ nemnegatív egészek és

$$h(x) = (x_1 - a_1)^{\alpha_1}\cdots(x_p - a_p)^{\alpha_p}.$$

Ekkor

$$D_1^{s_1}\ldots D_p^{s_p}h(a) = \begin{cases} s_1!\cdots s_p! & \text{ha } s_i = \alpha_i \text{ minden } i\text{-re} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tétel

Legyen $T_n(x)$ az $f(x)$ p-változós függvény a pont körüli n-edik Taylor-polinomja. Ekkor

$$T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \quad T_n''(a) = f''(a), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a);$$

másképpen, minden $0 \le m \le n$ egészre és tetszőleges $1 \le j_1, \dots, j_m \le p$ indexekre $D_{j_1 \dots j_m} T_n(a) = D_{j_1 \dots j_m} f(a)$.

Biz. Vegyünk egy tetszőleges $j_1, \dots, j_m$ indexsorozatot, amelyben s_1 darab 1-es, s_2 darab 2-es, $\dots$, s_p darab p szerepel.

$$\begin{aligned}
D_{j_1 \dots j_m} T_n(a) &= D_{j_1 \dots j_m} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} D_{i_1 \dots i_k} f(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}) \right) \right) \Bigg|_{x=a} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} D_{i_1 \dots i_k} f(a) \cdot \left(D_{j_1 \dots j_m} \left((x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}) \right) \Big|_{x=a} \right)
\end{aligned}$$

A lemma szerint az utolsó zárójel mindig nulla, kivéve, amikor az $(i_1, \dots, i_k)$ a $(j_1, \dots, j_m)$ sorozat egy permutációja. Ilyenkor persze $k = m$, és a zárójelben álló parciális derivált értéke $s_1! \cdots s_p!$. Az ilyen ismétléses permutációk száma $\dfrac{m!}{s_1! \cdots s_p!}$, tehát

$$\begin{aligned}
D_{j_1 \dots j_m} T_n(a) &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \text{ a } (j_1, \dots, j_m) \text{ permutációja}} \frac{1}{k!} D_{i_1 \dots i_k} f(a) \cdot \left(s_1! \cdots s_p! \right) \\
&= \frac{m!}{s_1! \cdots s_p!} \cdot \frac{1}{m!} D_{j_1 \dots j_m} f(a) \cdot s_1! \cdots s_p! = D_{j_1 \dots j_m} f(a).
\end{aligned}$$

Lemma

Legyen $g(x)$ p-változós függvény, n-szer differenciálható az a pontban, $g(a) = 0$, $g'(a) = 0$, $\dots$ és $g^{(n)}(a) = 0$. Ekkor

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{|x - a|^n} = 0.$$

Biz. Indukció n szerint.

$n = 1$-re ez éppen a differenciálhatóság definíciója:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{|x - a|} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Indukciós lépés, n-ről $(n+1)$-re: a $D_1 g, \ldots, D_p g$ parciális deriváltakra igaz az indukciós hipotézis, ezért mindegyik $i = 1, \ldots, p$-re van olyan $r_i > 0$, hogy a $B(a, r_i)$ gömbben $\left|\dfrac{D_i g(x)}{|x-a|^n}\right| < \frac{\varepsilon}{p}$. Legyen $r = \min(r_1, \ldots, r_p)$.

A Lagrange-középértéktétel miatt bármilyen $x \in B(a, r)$ ponthoz van olyan $c \in [a, x]$, amelyre $g(x) = g(x) - g(a) = g'(c)(x-a)$.

$$\left|g(x)\right| = \left|g(c)(x-a)\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} D_i g(c)(x_i - a_i)\right| \le \sum_{i=1}^{p} \left|D_i g(c)\right| \cdot |x_i - a_i|$$
$$\le \sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon}{p} |c-a|^n \cdot |x-a| \le \varepsilon \cdot |x-a|^{n+1}.$$

Tehát,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \quad \frac{|g(x)|}{|x-a|^{n+1}} \le \varepsilon.$$

19.1 Következmény

Legyen $T_n(x)$ az $f(x)$ p-változós függvény a pont körüli n-edik Taylor-polinomja, és $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Ekkor

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{|x-a|^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{|x-a|^n} = 0.$$

Lemma

$f(x)$ p-változós függvény, k-szor differenciálható az $[a, b] \subset \mathbb{R}^p$ szakasz pontjaiban, $v = b - a$, és legyen $t \in \mathbb{R}$ esetén $F(t) = f(a + tv)$ (ekkor tehát $F(0) = f(a)$ és $F(1) = f(b)$). Ekkor az $F(t)$ függvény k-szor differenciálható, és

$$F^{(k)}(t) = d^k f(a + tv)(v) = \sum_{i_1=1}^{p} \ldots \sum_{i_k=1}^{p} D_{i_1 \ldots i_k} f(a + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}.$$

Biz. Indukció k szerint. $k = 1$-re ez éppen a láncszabály:

$$F'(t) = (f'(a + tv))((a + tv)') = f'(a + tv)(v).$$

Indukciós lépés, k-ról $(k+1)$-re:

$$F^{(k+1)}(t) = \left(F^{(k)}(t)\right)' = \left(\sum_{i_1=1}^{p} \ldots \sum_{i_k=1}^{p} D_{i_1 \ldots i_k} f(a + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}\right)'$$
$$= \sum_{i_1=1}^{p} \ldots \sum_{i_k=1}^{p} \left(D_{i_1 \ldots i_k} f(a + tv)\right)' \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}.$$

A zárójelben újra a láncszabályt alkalmzzuk, a $t \mapsto D_{i_1 \dots i_k} f(a+tv)$ függvényre:

$$\Big(D_{i_1 \dots i_k} f(a+tv)\Big)' = \sum_{j=1}^{p} D_j (D_{i_1 \dots i_k} f)(a+tv) \cdot v_j,$$

tehát

$$\begin{aligned} F^{(k+1)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{p} \dots \sum_{i_k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} D_j (D_{i_1 \dots i_k} f)(a+tv) \cdot v_j \right) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} \\ &= \sum_{i_1=1}^{p} \dots \sum_{i_k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} D_{i_1 \dots i_k j} f(a+tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_j. \end{aligned}$$

Lemma (többváltozós Taylor-formula)

f p-változós függvény, $(n+1)$-szer differenciálható az $[a,x] \subset \mathbb{R}^p$ szakasz pontjaiban, az f a körüli n-edik Taylor-polinomja T_n. Ekkor létezik olyan $c \in [a,x]$ pont, hogy

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}(c)(x-a).$$

Biz. Egyváltozós Taylor-formula (a Lagrange-féle maradéktaggal) az $F(t) = f(a+t(x-a))$ függvényre a 0 körül: a Taylor-formula szerint van olyan $\tau \in (0,1)$, amelyre

$$\begin{aligned} f(x) = F(1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) \cdot 1^k + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\tau) \cdot 1^{n+1} = \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(a)(x-a)}_{T_n(x)} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(a + \tau(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

A $c = a + \tau(x-a)$ választással kész.

20. A második derivált alkalmazásai

A második differenciál mint kvadratikus alak. Hesse-mátrix. Lokális szélsőérték-helyek és a Hesse-mátrix definitségének kapcsolata. Konvex és konkáv függvények. Konvex nyílt halmazon értelemezett, kétszer differenciálható fügvény akkor és csak akkor konvex (konkáv), ha a második differenciál minden pontban pozitív (negatív) szemidefinit. [LTS2, 72–77]

20.1. Kvadratikus alakok

Ezeket algebrából tudjuk.

Definíció (kvadratikus alakok osztályozása)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ szimmetrikus mátrix és $Q(x) = x^t Ax$. A $Q(x)$ kvadratikus alak, illetve az A mátrix

- *pozitív definit*, ha minden $x \neq 0$ vektorra $Q(x) > 0$;
- *negatív definit*, ha minden $x \neq 0$ vektorra $Q(x) < 0$;
- *pozitív szemidefinit*, ha minden x vektorra $Q(x) \geq 0$;
- *negatív szemidefinit*, ha minden x vektorra $Q(x) \leq 0$;
- *indefinit*, ha $Q(x)$ pozitív és negatív értéket is felvesz.

Lemma

Legyen továbbra is $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ szimmetrikus mátrix és $Q(x) = x^t A x = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_i x_j$, továbbá legyen $1 \le k \le p$ esetén $\Delta_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$ a k-adik sarokdetermináns. Ekkor

- $Q(x)$ akkor és csak akkor pozitív definit, ha $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p > 0$;
- $Q(x)$ akkor és csak akkor negatív definit, ha $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots > 0$ és $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \dots < 0$;
- ha $Q(x)$ pozitív szemidefinit, akkor $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p \ge 0$;
- ha $Q(x)$ negatív szemidefinit, akkor $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots \ge 0$ és $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \dots \le 0$;
- ha $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots 0$ közül valamelyik negatív, vagy ha $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \dots$ között pozitív és negatív is van, akkor $Q(x)$ indefinit.

20.2. Lokális szélsőértékhelyek

20.1 Tétel

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $a \in \operatorname{int}$, $f : H \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az a pontban, és tegyük fel, hogy $f'(a) = 0$.

(a) Ha a $d^2 f(a)$ kvadratikus alak (avagy, a $Hf(a)$ Hesse-mátrix) pozitív (negatív) definit, akkor f-nek az a pontban szigorú lokális minimuma (maximuma) van.

(b) Ha f-nek az a pontban lokális minimuma (maximuma) van, akkor a $d^2 f(a)$ kvadratikus alak (a $Hf(a)$ Hesse-mátrix) pozitív (negatív) szemidefinit.

(c) Ha $d^2 f(a)$ kvadratikus alak (a $Hf(a)$ Hesse-mátrix) indefinit, akkor f-nek az a pontban nincs lokális szélsőértékhelye.

Biz. Mivel $f'(a) = d^1 f(a) = 0$, az f függvény a körüli második Taylor-polinomja

$$T_2(x) = f(a) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a).$$

(a) Legyen

$$M = \min\left\{x^t \cdot Hf(a) \cdot x : |x| = 1\right\}.$$

Az $|x| = 1$ egységgömbfelületen a $d^2 f(a)(x)$ polinom pozitív és folytonos, így a Weierstrass-tétel miatt M létezik és pozitív. Mivel a polinom homogén másodfokú,

$$d^2 f(a)(x) = d^2 f(a)\left(\frac{x}{|x|}\right) \cdot |x|^2 \geq M|x|^2.$$

A 19.1 Következmény szerint

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{|x-a|^2} = 0.$$

válasszunk olyan kicsi $r > 0$ sugarat, hogy a $\dot{B}(a,r)$ pontozott környezetben $\left|\frac{f(x)-T_2(x)}{|x-a|^2}\right| < \frac{M}{2}$ teljesüljön. Ekkor ugyanebben a pontozott környezetben

$$\left|f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)\right| = \left|f(x) - T_2(x)\right| < \frac{M}{2}|x-a|^2 \leq \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)$$

$$f(x) > \left(f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)\right) - \frac{M}{2}|x-a|^2 > f(a),$$

tehát az f-nek az a valóban szigorú lokális minimumhelye.

(b) Legyen újra M a $d^2 f(a)$ kvadratikus alak minimuma az egységvektorokon, és v egy olyan egységvektor, amikor éppen $d^2 f(a)(v) = M$. A célunk azt bizonyítani, hogy $M \geq 0$, ez ekvivalens azzal, hogy $d^2 f(a)$ pozitív szemidefinit.

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Ismét a 19.1 Következmény miatt $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - T_2(x)}{|x-a|^2} = 0$, továbbá feltettük, hogy f-nek az a pontban lokális minimuma van, ezért van olyan $r > 0$, hogy bármely $x \in \dot{B}(a,r)$ esetén $f(x) - T_2(x) \leq \varepsilon|x-a|^2$ és $f(x) \geq f(a)$.

Ezek után bármely $0 < t < r$-re

$$\varepsilon t^2 \geq f(a+tv) - T_2(a+tv) = \left(f(a+tv) - f(a)\right) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(tv) \geq 0 - \frac{1}{2} d^2 f(a)(v) \cdot t^2$$

$$M = d^2 f(a)(v) \geq -2\varepsilon.$$

Ez minden ε-ra igaz, így $M \geq 0$.

A (b) részt az egyváltozós esetre is visszavezethetjük. Tetszőleges $v \in \mathbb{R}^p$ nemnulla vektorra vizsgáljuk az $F(t) = f(a+tv)$ függvényt. Ez lényegében az

f megszorása az $x = a + tv$ egyenesre, ennek is lokális minimuma van a 0-ban. Ezért
$$0 \leq F''(0) = d^2 f(a)(v).$$
Ez minden v nemnulla vektrorra igaz, tehát $d^2 f(a)$ pozitív szemidefinit.

A (c) állítás triviálisan következik a (b)-ből.

Példák

A tételben szereplő következtetések nem megfordíthatók.

(a) Az $f(x) = \sum x_i^4$ függvénynek szigorú lokális minimuma van az origóban, de $Hf(0)$ a nullmátrix, nem pozitív definit.

(b,c) Az $f(x) = \sum x_i^3$ függvény origóbeli Hesse-mátrixa szintén a nullmátrix, ami pozitív szemidefinit, mégsincs lokális minimum az origóban. Ugyanez a függvény példa arra, hogy nincs lokális szélsőérték, de a Hesse-mátrix nem indefinit.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. A lokális szélsőértékhelyeken a derivált 0, tehát $D_x f = 3x^2 - 3 = 0$ és $D_y f = 3y^2 - 3 = 0$, vagyis $x = \pm 1$ és $y = \pm 1$.

Az $(1, 1)$ pontban $Hf(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, vagyis $d^2 f(0, 1)(u, v) = 6u^2 + 6v^2$, ami pozitív definit. A $(1, 1)$ pontban szigorú lokális minimum van.

A $(-1, -1)$ pontban $Hf(-1, -1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$, vagyis $d^2 f(0, 1)(u, v) = -6u^2 - 6v^2$, ami negatív definit. A $(-1, -)$ pontban szigorú lokális maximum van.

A $(\pm 1, mp1)$ pontokban $Hf(\pm 1, \mp 1) = \begin{bmatrix} \pm 6 & 0 \\ 0 & \mp 6 \end{bmatrix}$, vagyis $d^2 f(\pm 1, \mp 1)(u, v) = \pm 6u^2 \mp 6v^2$, ami indefinit. Ezekben a pontokban nincs lokális szélsőérték, itt *nyeregpont*ok vannak.

20.3. Konvex és konkáv fügvények

Definíció (konvex és konkáv függvények)

Legyen $K \subset \mathbb{R}^p$ konvex, $f : K \to \mathbb{R}$. Az f függvény konvex (konkáv), ha bármely $a, b \in K$ pontok és $0 < \lambda < 1$ szám esetén

$$f\Big((1-\lambda)a + \lambda b\Big) \quad \le (\ge) \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Ezzel ekvivalens, hogy bármely n pozitív egészre, $a_1, \ldots, a_n \in K$ pontokra és $w_1, \ldots, w_n \ge 0$ súlyokra, amelyek összege 1, teljesül, hogy

$$f(w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n) \quad \le (\ge) \quad w_1 f(a_1) + \ldots + w_n f(a_n).$$

20.2 Lemma

Legyen $K \subset \mathbb{R}^p$ konvex és nyílt, $f : K \to \mathbb{R}$ differenciálható. A következő állítások ekvivalensek:

(1) f konvex.

(2) Bármely n pozitív egészre, $a_1, \ldots, a_n \in K$ pontokra és $w_1, \ldots, w_n \ge 0$ súlyokra, amelyek összege 1, teljesül, hogy

$$f(w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n) \ge w_1 f(a_1) + \ldots + w_n f(a_n).$$

(3) Bármely $a, b \in K$ pontokra $f(b) \ge f(a) + f'(a)(b-a)$, vagyis bármely $a \in K$ esetén, az f grafikonjának minden pontja az a-beli érintősíkon vagy afölött van.

Biz. (2) $\Rightarrow$ (1) trivi, az (1) a (2)-nek speciális esete.

(3) $\Rightarrow$ (2): Legyen $c = w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n$; ekkor az (1) miatt

$$\sum_{i=1}^n w_i f(a_i) \ge \sum_{i=1}^n w_i \Big(f(c) + f'(c)(a_i - c)\Big) = f(c) + f'(c)\left(\sum_{i=1}^n w_i a_i - c\right) = f(c).$$

(1) $\Rightarrow$ (3): Az a-beli differenciálhatóság miatt $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{|x-a|} = 0$. Legyen $0 < t < 1$ és $x = (1-t)a + tb$, ekkor $x - a = t(b-a)$; a konvexitás

miatt

$$\begin{aligned}
(1-t)f(a)+tf(b) &\geq f((1-t)a+tb)=f(x)\\
t\Big(f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\Big) &\geq f(x)-f(a)-tf'(a)(b-a)\\
&= f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\\
f(b)-f(a)-f'(a)(b-a) &\geq \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{t|b-a|}\cdot|b-a|\\
&= \frac{f(a+t(b-a)-f(a)-f'(a)(x-a)}{|x-a|}\cdot|b-a|.
\end{aligned}$$

Ha $t\to+0$, akkor $x\to a$, így a jobboldal 0-hoz tart. Ezért $f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\geq 0$.

Tétel

Legyen $K\subset\mathbb{R}^p$ konvex és nyílt, $f:K\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható. Az f akkor és csak akkor konvex (konkáv), ha minden $a\in K$ pontban a $d^2f(a)$ kvadratikus alak (a $Hf(a)$ Hesse-mátrix) pozitív (negatív) szemidefinit.

Biz. A 20.2 Lemma (3) tulajdonságát fogjuk használni.

$\Rightarrow$: Legyen $a\in K$ tetszőleges és $v\in\mathbb{R}^p$ egységvektor. A konvexitás miatt

$$f(a+tv)\geq f(a)+f'(a)(tv)=f(a)+f'(a)(v)t.$$

Másrészt a 19.1 Következmény szerint

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_2(x)}{|x-a|^2}-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}d^2f(a)(x-a)}{|x-a|^2}=0;$$

az $x=tv$ választással

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(a+tv)-f(a)-f'(a)(v)t-\frac{1}{2}d^2f(a)(v)t^2}{t^2}=0.$$

A kettőt kombinálva,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}d^2f(a)(v) &= \frac{f(a+tv)-f(a)-f'(a)(v)t}{t^2}\\
&\quad-\frac{f(a+tv)-f(a)-f'(a)(v)t-\frac{1}{2}d^2f(a)(v)t^2}{t^2}\\
&\geq -\frac{f(a+tv)-f(a)-f'(a)(v)t-\frac{1}{2}d^2f(a)(v)t^2}{t^2};
\end{aligned}$$

a $t \to +0$ határátmenetből $d^2 f(a)(v) \geq 0$.

Mivel $f(a)(v) \geq 0$ minden v egységvektorra, a $d^2 f(a)$ kvadratius alak pozitív szemidefinit.

$\Leftarrow$: Legyen $a, b \in K$ tetszőleges. A Taylor-formula miatt van olyan $c \in [a, b]$, amelyre

$$f(b) = f(a) + d^1 f(a)(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f(c)(b-a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f(c)(b-a).$$

A feltevésünk szerint $d^2 f(c)$ pozitív szemidefinit, ezért az utolsó tag nemnegatív:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f(c)(b-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Tehát, bármely $a, b \in K$ esetén teljesül a 20.2 Lemma (3) tulajdonsága.

III. rész

Területi és térfogati integrálok

21. Jordan-mérték

Jordan-féle külső mérték, belső mérték és mérték. Tengelypárhuzamos téglák térfogata. A belső és a külső mérték ekvivalens definíciója a tér $1/n$ élű kockákra bontásával. A tengelypárhuzamos téglák mérhetők, és a mértékük megegyezik a térfogatukkal. A külső, illetve belső mérték szubbadditivitiása és szuperaditivitása. A külső mérték nem kisebb, mint a belső mérték. Nullmértékű halmazok és tulajdonságaik. Korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha a határa nullmértékű. $\mathbb{R}^p$-beli kompakt halmazon folytonos függvény grafikonja $\mathbb{R}^{p+1}$-ben nullmértékű. Minden gömb és minden poliéder mérhető. Minden korlátos konvex halmaz mérhető. (Az utóbbira a csak bizonyítás vázlata.) [LTS2, 115–122]

22. Jordan-mérhető halmazok

A Jordan-mérhető halmazok $\mathcal{J}$ halmazgyűrűje. A Jordan-mérték az egyetlen $\mathcal{J} \to \mathbb{R}$ függvény, ami pozitív, additív, eltolásinvariáns és normált. Jordan-mérhető halmaz λ-szorosának mértéke. Síkbeli háromszögek területe. A Cantor-halmaz és a Sierpinski-szőnyeg mértéke. [LTS2, 122–129]

23. A Jordan-mérték kiszámítása

Jordan-mérhető halmaz tengelyirányú szeleteinek eggyel kisebb dimenziós külső/-belső mértéke Riemann-integrálható és az integráljuk megegyezik a halmaz térfogatával. Általános henger és kúp térfogata. Gömb térfogata. Paralelepipedon térfogata. Mérhető halmaz lineáris transzformáltjának mérhetősége és mértéke. [LTS2, 129–134]

24. Jordan-mérték szerinti integrál

Korlátos függvények integrálása Jordan-mérhető halmazokon. Felosztás, finomítás, finomság. Alsó és felső öszegek, oszcillációs összegek. Alsó és felső integrál. Integrálhatóság és átfogalmazásai. Integrálhatóság részhalmazokon. Integrálhatóság egymásba nem nyúló halmazok unióján. Végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó alsó és felső összegek az alsó, illetve a felső integrálhoz tartanak. Ha a függvény integrálható, akkor végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó integrálközelítő öszegek az integrálhoz tartanak. Összeg, konstansszoros, szorzat, hányados és összetett függvény integrálhatsága. Ha egy függvény korlátos és nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos, akkor integrálható. Halmaz külső és belső mértéke azonos a karakteriszikus függvénye felső, illetve alsó integráljával. [LTS2, 149–155]

25. A Jordan-mérték szerinti integrál kiszámítása

Mérhető halmazok szorzatán vett integrál felbontása az alsó és felső integrálok integráljává. A szukcesszív integrálás tétele. Az $f(x)g(y)$ alakú függvények integrálhatósága. A p-dimenziós gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció (bizonyítás nélkül). Polárkoordinátás helyettesítés. Az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ integrál kiszámítása. [LTS2, 158–167]

26. Paraméteres integrálok

Paraméteres integrálok. Elégséges feltételek a paraméteres integrál folytonosságára, integrálhatóságára és differenciálhatóságára. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Weierstrass-kritérium. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, integrálhatósága és differenciálhatósága. A Γ és a B-függvény differenciálhatósága. [LTS2, 358–369]

IV. rész

Vonalintegrál és primitív függvény

27. Vonalintegrálok

> Görbék. Folytonosság, differenciálhatóság, Lipschitz-tulajdonság, stb. Görbe hossza, rektifikálható görbe. Átparaméterezés és megfordítás. Kettévághatóság. Egy görbe akkor és csak akkor rektifikálható, ha a koordinátafüggvényei korlátos változásúak. Függetenség a paraméterezéstől, linearitás és additivitás. Átírások Riemann-Stieltjes, illetve Riemann-integrállá. Elégséges feltétel a vonalintegrál létezésére. Differenciálható görbe hosszának kiszámítása. Az integrál kiszámítása differenciálható görbén. Triviális felső becslés a vonalintegrál nagyságára. Vonalintegrálok. Tulajdonságok. Feltételek a létezésre. Átírás Riemann-integrállá, ha az integrációs út differenciálható. [LTS2, 177–182]

Tegyük fel, hogy egy domboldalon az A pontből csúszik a B pontba egy m tömegű test.

Minden x pontban van egy $g(x)$ g*ravitációs térerősség*, tehát a test súlya $m \cdot g(x)$. (A $g(x)$ nem állandó; sőt, még az iránya sem, a test repülhetne valahol a Nap, a Föld és a Hold között is.) Az utat sok kicsi darabra szétvágva, a gravitációs mező által végzett munka $\sum\langle m \cdot g(x); \Delta x\rangle$. (Félre: Ebből máris látjuk, hogy már megint egy újabb integrálfogalom bevezetésére készül az előadó...)

A középiskolában már beszéltünk róla, hogy minden x ponthoz hozzárendelhetünk egy $V(x)$ számot, ami a pontbeli *gravitációs potenciál*; a test *helyzeti energiája* az x pontban $m \cdot V(x)$, a lecsúszás közben a gravitációs mező által végzett munka a kettő különbsége, $m \cdot (V(A) - V(B))$. Az m-mel losztva,

$$\sum\langle g(x); \Delta x\rangle = V(A) - V(B).$$

Vegyük észre, hogy háromféle függvényel dolgozunk egyszerre. A $g(x)$ függvény értékei vektorok, a $V(x)$ értékei számok, és a sorok között elrejtve van egy hely–idő függvényünk is, ami megmondja, hogy a t pillanatban hol van a lefelé csúszó test...

Skalármezők, vektormezők, görbék

Ebben részben lesz egy $G \subset \mathbb{R}^p$ (összefüggő) nyílt halmazunk, ami a szűkebb *viláG* lesz. Mindig G-n értelmezett függvényekkel fogunk játszaani.

Definíció (skalármező, vektormező)

Legyen $G \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz. A $G \to \mathbb{R}$ függvényeket *skalármezőnek*, a $G \to \mathbb{R}^p$ függvényeket *vektormezőnek* fogjuk hívni.
A szokásos simasági tulajdonságokat ezekre is használjuk: folytonos skalármező, kétszer differenciálható vektormező, nyolcszor folytonosan differenciálható skalármező stb.

Definíció (G-ben fekvő görbe)

Az $[a, b] \to G$ függvényeket *G-ben fekvő görbéknek* hívjuk. Az $[a, b]$ a görbe *paraméter-intervallum*a.
Csak folytonos görbékkel fogunk dolgozni.
A $\gamma : [a, b] \to G$ görbe differenciálható, ha (a, b) pontjaiban differenciálható, a végpontokban féloldalról differenciálható.
A paramétert szeretjük t-vel jelölni, mintha a t az időt jelentené. A deriváltakat (sebességvektor, gyorsulásvektor) szeretjük pontokkal jelölni: γ' helyett $\dot{\gamma}$, γ'' helyett $\ddot{\gamma}$.

Definíció (szakaszonként folytonosan dfferenciálható görbe)

A $\gamma : [a, b] \to G$ görbe *szakaszonként folytonosan dfferenciálható*, rövidítve *szak.C^1*, ha véges sok folytonosan differenciálható görbe egymás után fűzése, vagyis vannak olyan $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ számok, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ folytonosan differenciálható.

Megjegyzés

Minden töröttvonal szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, ha a szakaszokat lineárisan paraméterezzük.

Definíció (átparaméterezés, megfordítás)

Ha $\gamma : [a, b] \to G$, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ szig. monoton növő bijekció, akkor $\gamma \circ \varphi : [c, d] \to G$ a γ görbe egy *átparaméterezése*.
Ha $\gamma : [a, b] \to G$, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ szig. monoton csökkenő bijekció, akkor $\gamma \circ \varphi : [c, d] \to G$ a γ görbe egy *megfordítása*.

Definíció (görbe hossza)

A $\gamma : [a,b] \to G$ *görbe hossza* a beírt töröttvonalak hosszának szuprémuma:

$$\ell(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \Big|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\Big| \;:\; a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b. \right\}.$$

Trivialitás

Az átparaméterezés és a megfordítás nem változtatja meg a görbe hosszát.

Tétel (szakaszonként C^1 görbe hossza)

Ha $\gamma : [a,b] \to G$ szak.C^1, akkor

$$\ell(\gamma) = \int_{t=a}^{b} \Big|\dot\gamma(t)\Big| \,\mathrm{d}t.$$

(Előző félévben volt.)

Vonalintegrál

Definíció (vektormező valós vonalintegrálja)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G \cdot \mathbb{R}^p$ vektormező, $\gamma : [a,b] \to G$ görbe és $I \in \mathbb{R}$. Az f vektormező *valós vonalintegrál*ja a γ görbén I, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $[a,b]$ intervallum bármely, δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ felosztására és bármely $u_1 \in [t_0, t_1]$, $u_2 \in [t_1, t_2]$, $\ldots$, $u_n \in [t_{n-1}, t_n]$ számokra teljesül, hogy

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \Big\langle f\Big((\gamma(u_i)\Big); \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\Big\rangle - I \right| < \varepsilon.$$

Jele:

$$I = \int_\gamma f = \int_\gamma \Big\langle f(x); \mathrm{d}x \Big\rangle.$$

Trivialitás

Ha $\int_\gamma f$ és $\int_\gamma g$ is létezik, akkor

- Bármely $c \in \mathbb{R}$-re $\int_\gamma c \cdot f$ is létezik és $\int_\gamma c \cdot f = c \cdot \int_\gamma f$.
- $\int_\gamma (f+g)$ is létezik és $\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$.
- Ha γ_1 a γ egy átparaméterezése, akkor $\int_{\gamma_1} f$ is létezik és $\int_{\gamma_1} f = \int_\gamma f$. (Lényeges, hogy az átparaméterezésben szereplő φ egyenletesen folytonos.)
- Ha γ_1 a γ egy megfordítása, akkor $\int_{\gamma_1} f$ is létezik és $\int_{\gamma_1} f = -\int_\gamma f$.

Lemma

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos vektormező, $a < b < c$, $\gamma : [a,c] \to G$ folytonos, továbbá legyen $\gamma_1 = \gamma|_{[a,b]}$ és $\gamma_2 = \gamma|_{[b,c]}$ a γ két "fele", vagyis γ a γ_1 és γ_2 egymás után fűzése. Ha $\int_{\gamma_1} f$ és $\int_{\gamma_2} f$ létezik, akkor $\int_\gamma f$ is létezik, és

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

(Vesszük $[a,c]$ egy kellően finom felosztását, és hozzávesszük a b pontot is.)

Lemma (triviális becslés)

Ha $\int_\gamma f$ létezik, akkor

$$\left| \int_\gamma f \right| \le \sup_{x \in \gamma} \left| f(x) \right| \cdot \ell(\gamma).$$

Biz. Legyen $M = \sup_{x \in \gamma} \left| f(x) \right|$. Bármely integrálközelítő összegre

$$\left| \sum_{i=1}^n \left\langle f\Big(\big(\gamma(u_i)\Big); \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right\rangle \right| \le \sum_{i=1}^n \left| f\Big(\big(\gamma(u_i)\Big) \right| \cdot \left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right|$$
$$\le M \cdot \sum_{i=1}^n \left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right| \le M \cdot \ell(\gamma).$$

Tétel

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G :\longrightarrow \mathbb{R}^p$ folytonos vektormező és $\gamma : [a,b] \to G$ szak.C^1 görbe. Ekkor az $\int_\gamma f$ vonalintegrál létezik, és

$$\int_\gamma f = \int_{t=a}^{b} \Big\langle f\big(\gamma(t)\big); \dot\gamma(t)\Big\rangle \,\mathrm{d}t = \int_a^b \big\langle f \circ \gamma; \dot\gamma\big\rangle.$$

Biz. Az összefűzhetőség miatt elég C^1 görbére igazolni.

Legyen $I = \int_a^b \big\langle f \circ \gamma; \dot\gamma\big\rangle$.

A feltétel szerint $\dot\gamma$ folytonos; legyen $M = \max|\dot\gamma|$.

Rögzítsünk egy tetszőleges ε-t. Az $f \circ \gamma$ egyenletesen folytonos, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $t, t' \in [a,b]$, $|t - t'|$ esetén $\Big|f(\gamma(t)) - f(\gamma(t'))\Big| < \varepsilon$.

Most vegyünk egy tetszőleges, δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ felosztást és $u_i \in [t_{i-1}, t_i]$ számokat. az ezekhez tartozó integrálközelítő összeg

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Big\langle f\big((\gamma(u_i)\big); \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\Big\rangle.$$

Minden egyes i esetén az egyváltozós Lagrange-középértéktételt alkalmazzuk a $g(t) = \Big\langle f\big((\gamma(u_i)\big); \gamma(t)\Big\rangle$ függvényre: létezik olyan $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$, hogy

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\tau_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$
$$\Big\langle f\big((\gamma(u_i)\big); \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\Big\rangle = \Big\langle f\big((\gamma(u_i)\big); \dot\gamma(\tau_i)\Big\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Ezt beírjuk az integrálközelítő összegbe, és az u_i-t is kicseréljük τ_i-re:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} \Big\langle f\big((\gamma(u_i)\big); \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big\langle f\big((\gamma(u_i)\big); \dot\gamma(\tau_i)\Big\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big\langle f\big((\gamma(\tau_i)\big); \dot\gamma(\tau_i)\Big\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \Big\langle f\big((\gamma(u_i)\big) - f\big((\gamma(\tau_i)\big); \dot\gamma(\tau_i)\Big\rangle \cdot (t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

így már az első szumma az $I = \int_a^b \langle f \circ \gamma; \dot\gamma\rangle$ egy közelítő összege. Ha a felosztás elég finom, akkor különbségük kisebb, mint ε.

$$
\begin{aligned}
|S - I| &\leq \left| \sum_{i=1}^{n} \Big\langle f\Big((\gamma(\tau_i)\Big); \dot{\gamma}(\tau_i) \Big\rangle \cdot (t_i - t_{i-1}) - I \right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left| \Big\langle f\Big((\gamma(u_i)\Big) - f\Big((\gamma(\tau_i)\Big); \dot{\gamma}(\tau_i) \Big\rangle \right| \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&\quad < \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \left| f\Big((\gamma(u_i)\Big) - f\Big((\gamma(\tau_i)\Big) \right| \cdot \Big| \dot{\gamma}(\tau_i) \Big| \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&\quad < \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot M \cdot (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon \cdot \Big(1 + M(b-a)\Big).
\end{aligned}
$$

28. Folytonos vektormező primitív függvénye

Newton-Leibniz formula valós vonalintegrálokra. Konzervatív vektormező, primitív függvény és potenciálfüggvény fogalma. A primitív függvény konstans erejéig egyértelmű. Ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek: (a) f-nek létezik primitív függvénye; (b) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt, folytonos, rektifikálható görbén; (c) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt töröttvonalon. [LTS2, 182–188]

Definíció (vektormező primitív függvénye)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ és $G : G \to \mathbb{R}$. Az F függvény (skalármező) az f függvénynek (vektormezőnek) *primitív függvénye*, ha $f = \operatorname{grad} F$.

Tétel (Newton–Leibniz formula valós vonalintegrálokra)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos vektormező, $\gamma : [a, b] \to G$ szak.C^1 görbe, és tegyük fel, hogy $F : G \to \mathbb{R}$ primitív függvénye f-nek. Ekkor

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Biz. Legyen $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ úgy, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\gamma_i = \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i} f &= \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} \Big\langle f(\gamma(t)); \dot\gamma(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t = \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} \Big\langle (\operatorname{grad} F)(\gamma(t)); \dot\gamma(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} F'(\gamma(t)) \circ \dot\gamma(t) \,\mathrm{d}t = \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} \Big(F(\gamma(t)\Big)' \,\mathrm{d}t = F\Big(\gamma(t_i)\Big) - F\Big(\gamma(t_{i-1})\Big).\end{aligned}$$

Összegezve,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f &= \sum_{i=1}^n \Big(F\Big(\gamma(t_i)\Big) - F\Big(\gamma(t_{i-1})\Big)\Big) \\ &= F\Big(\gamma(t_n)\Big) - F\Big(\gamma(t_0)\Big) = F\Big(\gamma(b)\Big) - F\Big(\gamma(a)\Big).\end{aligned}$$

Definíció (vektormező potenciálfüggvénye)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ és $G : G \to \mathbb{R}$. Az F függvény (skalármező) az f függvénynek (vektormezőnek) *primitív függvénye*, ha $f = -\operatorname{grad} F$.

A potenciálfüggvényben szereplő negatív előjel felcseréli a határokat a Newton–Leibniz formulában; ettől lesz kerekebb az energiamegmaradás törvénye.

Tétel (a primitív függvény létezésének feltételei)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő, nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Ezek ekvivalensek:

(a) f-nek van primitív függvénye: van olyan differenciálható $F : G \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f = \operatorname{grad} F$.

(b1) G-ben fekvő, közös végpontú, szakaszonként C^1 görbéken f vonalintegrálja egyenlő.

(b2) f vonalintegrálja 0 minden G-beli zárt, szakaszonként C^1 görbén.

(c1) G-ben fekvő, közös végpontú töröttvonalakon f vonalintegrálja egyenlő.

(c2) f vonalintegrálja 0 minden G-beli zárt töröttvonalon.

Biz. (b1)⇒(b2): Ha $\gamma : [0,1] \to G$ zárt, szak.C^1 görbe, akkor legyen γ_1 a konstans görbe, amelynek egyelen pontja $\gamma(0) = \gamma(1)$, Ekkor tehát γ és γ_1 közös kezdő- és végpontú görbék, ezért

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f = 0.$$

(b2)⇔(b1): Tekintsünk két teteszőleges γ_1 és γ_2 görbét, amelyek kezdő- és végpontja közös. Fűzzük egymás után γ_1-et és γ_2 megfordítását, amit jelöljünk $\overline{\gamma_2}$-vel; z így kapott zárt görbe legyen γ_1. Ekkor tehát

$$0 = \int_{\gamma_3} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\overline{\gamma_2}} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f,$$

vagyis $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

(c1)⇔(c2): ugyanaz.

(a)⇒(b1): triviális a Newton–Leibniz formulából.

(b1)⇒(c1) és (b2)⇔(c2): triviális, mert minden töröttvonal egyben szakaszonként C^1 görbe.

(b1)⇒(a): Tegyük tehát, hogy az f vektormezőre igaz a (b1) tulajdonság; megkonstruáljuk az f egy prmitív függvényét.

Rögzítsünk egy $x_0 \in G$ kezdőpontot. Bármilyen $x \in G$/hez létezik G-ben olyan γ töröttvonal, amelynek kezőpontja x_0, végpontja x. Vegyünk egy ilyen γ-t, és definiáljuk az $F : G \to \mathbb{R}$ függvényt így: $F(x) = \int_\gamma f$. A (b1) tulajdonság szerint mindegy, hogy melyik töröttvonalat választjuk, a kapott vonalintegrál és vele az $F(x)$ mindig ugyanaz lesz.

Azt kell igazolnunk, hogy $\operatorname{grad} F(x) = f(x)$. Vegyünk egy tetszőleges ε-t és egy $x \in G$ pontot. Mivel x belső pontja G-nek és f folytonos az x pontban, van olyan $\delta > 0$, hogy $B(x,\delta) \subset G$ és bármely $y \in B(x,\delta)$ pontra $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Legyen γ egy töröttvonal, ami összeköti x_0-t x-szel. Ha ehhez hozzáfűzzük az $[x,y]$ szakaszt, az így kapott töröttvonal összeköti x_0-t y-nal, ezért

$$F(x) = \int_\gamma f \quad \text{és} \quad F(y) = \int_\gamma f + \int_{z\in[x,y]} \Big\langle f(z), \mathrm{d}z \Big\rangle$$

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_{z\in[x,y]} \Big\langle f(z), \mathrm{d}z \Big\rangle = \int_{z\in[x,y]} \Big\langle f(x), \mathrm{d}z \Big\rangle + \int_{z\in[x,y]} \Big\langle f(z) - f(x), \mathrm{d}z \Big\rangle \\ &= \Big\langle f(x), y - x \Big\rangle + \int_{z\in[x,y]} \Big\langle f(z) - f(x), \mathrm{d}z \Big\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| F(y) - F(x) - \Big\langle f(x), y - x \Big\rangle \right| &= \left| \int_{z\in[x,y]} \Big\langle f(z) - f(x), \mathrm{d}z \Big\rangle \right| \\ &\le \max_{z\in[x,y]} |f| \cdot |y - x| < \varepsilon \cdot |y - x| \end{aligned}$$

Tehát,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall y \in B(x,\delta) \;\; \left| F(y) - F(x) - \Big\langle f(x), y - x \Big\rangle \right| < \varepsilon \cdot |y - x|,$$

vagyis F differenciálható az x pontban, és $\operatorname{grad} F(x) = f(x)$.

Definíció (konzervatív vektormező)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő, nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Az f vektormező *konzervatív*, ha az előző tételbeli tulajdonságokat teljesíti.

Tétel (a primitív függvény egyértelműsége)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő, nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Ekkor az f primitív függvényei (ha léteznek) csak konstansban térnek el egymástól, vagyis ha F_1 és F_2 is primitív függvénye f-nek, akkor $F_1 - F_2$ konstans függvény.
(Fordítva trivi: ha F primitív függvény, akkor $F + c$ is primitív függvény.)

Biz. Tegyük fel, hogy F_1 és F_2 is primitív függvénye f-nek. Azt akarjuk igazolni, hogy $F_1 - F_2$ konstans, vagyis bármely $x, y \in G$ pontokra $F_1(x) - F_2(x) = F_1(y) - F_2(y)$.

Kössük össze x-et és y-t egy γ töröttvonallal. A Newton–Leibniz formulát mindkét primitív függvényre felírhatjuk:

$$\int_\gamma f = F_1(y) - F_1(x) = F_2(y) - F_2(x);$$

átrendezve

$$F_1(x) - F_2(x) = F_1(y) - F_2(y).$$

29. Differenciálható vektormező primitív függvénye

Differenciálható f esetén a primitív függvény létezéséhez szükséges, hogy f' mindenhol szimmetrikus legyen. A lineáris leképezés primitív függvénye. Goursat-lemma valós vonalintegrálokra. A primitív függvény létezése konvex és csillagszerű tartományokon. [LTS2, 189–194]

Trivialitás

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő, nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható. Ahhoz, hogy f-nek létezzen primitív függvénye, szükséges, hogy bármely $1 \le i, j \le p$ esetén $D_i f_j = D_j f_i$ teljesüljön G minden pontjában.
Ugyanez más szavakkal:

- a Jf Jacobi-mátrix mindenhol szimmetrikus;
- az f *keresztbe vett parciális deriváltjai* megegyeznek
- az f vektormező *rotációmentes*. A *rotáció* fogalma később lesz.
  - 2-dimenzióban: $\operatorname{rot} f = D_1 f_2 - D_2 f_1$
  - 3-dimenzióban: $\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} D_2 f_3 - D_3 f_2 \\ D_3 f_1 - D_1 f_3 \\ D_1 f_2 - D_2 f_1 \end{pmatrix}$

Biz. Ha f differenciálható, és F primitív függvénye f-nek, akkor F már kétszer differenciálható, és az f Jacobi-mátrixa éppen az F Hesse-mátrixa:

$$Jf = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \dots & D_p f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & \dots & D_p f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_p & D_2 f_p & \dots & D_p f_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 D_1 F & D_2 D_1 F & \dots & D_p D_1 F \\ D_1 D_2 F & D_2 D_2 F & \dots & D_p D_2 F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 D_p F & D_2 D_p F & \dots & D_p D_p F \end{pmatrix} = HF.$$

Példa

Az $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ vektormező rotációmentes, de nincs primitív függvénye.

Biz. Ellenőrizhetjük, hogy

$$D_1 f_2 = D_2 f_1 = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

tehát f tényleg rotációmentes az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon.

Számítsuk ki a vonalintgegrálját az egységkörön: a körvonal paraméterezése legyen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Az integrál:

$$\int_\gamma \Big\langle f(x), \mathrm{d}x \Big\rangle = \int_{t=0}^{2\pi} \Big\langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \mathrm{d}t$$
$$= \int_{t=0}^{2\pi} \Big\langle (-\sin t, \cos t); (-\sin t, \cos t); \rangle \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} 1 \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0.$$

Mivel van olyan zárt görbe, melyen a vonal integrál nemnulla, nincs primitív függvény.

Megjegyzés

Az $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ vektormezőnek lokálisan létezik primitív függvénye. Például bármilyen origó csúcsú szögtartományban definiálhatunk egy "szög" nevű függvényt, ennek deriváltja az f. Viszont nem létezik az egész kilyukasztott síkon érvényes, folytonos kiterjesztése.

Ha a síkból elhagyunk egy origóból induló zárt félegyenest, a megmaradt nyílt szögtartományban definiálhatjuk az x-tengely és az origóból az (x,y) pontba mutató szakasz közötti irányított szöget. Az egyes félsíkokkal vett metszetekben

$$\text{szög}(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_1 = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C_2$$

alkalmas C_1, C_2 konstansokkal. A függvény parciális deriváltjai

$$D_x \text{szög} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$D_y \text{szög} = \frac{-\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

A teljes tartományon nem tudjuk a "szög" függvényt folytonosan értelmezni.

Lemma

Legyen $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ és $b \in \mathbb{R}$. Ha az A mátrix szimmetrikus, akkor az $f(x) = Ax + b$ függvénynek van primitív függvénye.

Biz. A primitív függvény:

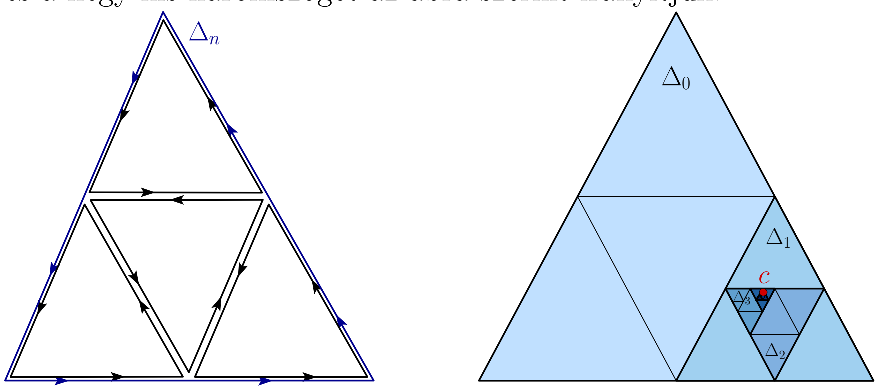
$$F(x) = \frac{1}{2} x^t A x + \langle b, x \rangle.$$

Lemma (Goursat-lemma)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható, rotációmentes. Ha Δ irányított háromszögvonal, a belsejével együtt G-be esik, akkor $\int_\Delta f = 0$.

Biz. Rekurzívan konstruálunk egy $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ irányított háromszögsorozatot. A kiinduló háromszög $\Delta_0 = \Delta$, és mindegyik háromszög feleakkora lesz, mint az előző háromszög. Az n-edik háromszög kerülete tehát $k_n = \dfrac{\ell(\Delta)}{2^k}$. A Δ kerületén vett integrált I_n-nel fogjuk jelölni: $I_n = \int_{\Delta_n} \langle f(x), \mathrm{d}x \rangle$.

A konstrukció: $\Delta_0 = \Delta$. Ha Δ_n már megvan, akkor a középvonalaival 4 részre osztjuk, és a négy kis háromszöget az ábra szerint irányítjuk.



A négy kis háromszög közül azt választjuk Δ_{n+1}-nek, amelyen az f függvény vonalintegráljának abszolút értéke a legnagyobb. Ha a négy kis háromszögön vett vonalintegrálokat összeadjuk, akkor a középvonalakon vett integrálok kiesnek, és a négy vonalintegrál összege éppen a Δ_n-en vett vonalintegrál lesz, vagyis I_n. Ezért tehát $|I_{n+1}| \geq \frac{1}{4}|I_n|$; indukcióval

$$|I_n| \geq \frac{|I_0|}{4^n}.$$

A Δ_n háromszögek konvex burkai, tehát a zárt háromszöglemezek egy csökkenő sorozatot alkotnak, ezeknek van egy közös c pontja. Már a nulladik háromszöglemez is G-ben volt, tehát $c \in G$, és a feltétel szerint az $f(x)$ függvény differenciálható a c pontban; az értéke legyen $b = f(c)$, a Jacobi-mátrixa $A = Jf(c)$. A feltétel szerint A szimmetrikus.

Most vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot; mivel $f(x)$ differenciálható a c pontban, van olyan $\delta > 0$, hogy a $B(c, \delta)$ környezetben

$$\Big| f(x) - b - A(x - c) \Big| \leq \varepsilon \cdot |x - c|.$$

Ha n elég nagy, akkor a Δ_n háromszög már benne van a $B(c, \delta)$ gömbben.

Vegyünk egy ilyen n-et, és vizsgáluk a vonalintegrált Δ_n-en:

$$I_n = \int_{\Delta_n} \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle = \underbrace{\int_{\Delta_n} \langle A(x-c)+b, \mathrm{d}x\rangle}_{0} + \int_{\Delta_n} \langle f(x) - A(x-c) - b, \mathrm{d}x\rangle.$$

Az előző lemma miatt az $A(x-c)+b$ függvénynek van primitív függvénye, így a vonalintegrálja nulla.

A Δ_n háromszög mindegyik pontja közelebb van a c ponthoz, mint a háromszög kerülete, tehát $x \in \Delta_n$ esetén $|x-c| < k_n$. A triviális becsléssel együtt

$$\begin{aligned}\frac{|I_0|}{4^n} \le |I_n| &= \left| \int_{\Delta_n} \langle f(x) - A(x-c) - b, \mathrm{d}x\rangle \right| \\ &\le \sup_{x\in\Delta_n} \Big| f(x) - A(x-c) - b \Big| \cdot k_n \\ &\le \sup_{x\in\Delta_n} \varepsilon |x-c| \cdot k_n \le \varepsilon k_n \cdot k_n = \varepsilon \left(\frac{\ell(\Delta)}{2^n} \right)^2;\end{aligned}$$

átszorozva

$$\left| \int_{\Delta} f \right| = |I_0| \le \varepsilon \cdot \ell(\Delta)^2.$$

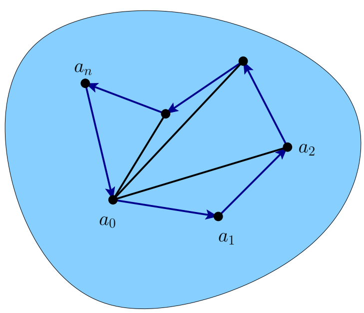
Ez minden ε-ra igaz, tehát $\int_\Delta f = 0$.

Következmény (primitív függvény létezése konvex tartományon)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, konvex, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható. Az f-nak akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha rotációmentes.

Biz. Azt már tudjuk, hogy ha f differenciálható és van primitív függvénye, akkor rotációmentes; a másik irány az új.

Legyen tehát f rotációmentes; azt kell igazolnunk, hogy f-nek vak primitív függvénye, vagy ami ezzel ekvivalens, bármilyen zárt töröttvonalon 0 a vonalintegrálja.



A zárt töröttvonalakat most szögletes zárójellel foguk jelölni. Vegyünk tehát egy tetsztőleges $[a_0 a_1 a_2 \dots a_n]$ töröttvonalat. Ezt az $a_0 a_1, \dots, a_0 a_{n-1}$ átlókkal háromszögekre bonthatjuk, és

$$\int_{[a_0 a_1 \dots a_n]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[a_0 a_{i-1} a_i]} f.$$

A konvexitás miatt mindegyik $[a_0 a_{i-1} a_i]$ zárt háromszöglemez G-ben van, így a jobboldalon mindegyi integrál 0.

Következmény (lokális primitív függvény létezése)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, konvex, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható, rotációmentes. Ekkor minden $a \in G$ pontnak van olyan környezete, amelyben f-nek van primitív függvénye.

Biz. Minden gömbi környezet konvex, és G minden konvex részén létezik primitív függvény.

Definíció (csillagszerű tartomány)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő, nyílt. A G *csillagszerű*, ha van olyan $x_0 \in G$ pont, hogy bármely $x \in G$ pont esetén a $[x_0, x]$ szakasz része G-nek.

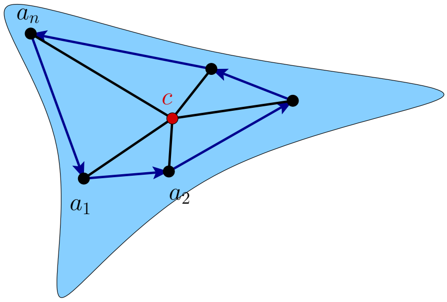
Példák

- Minden konvex tartomány csillagszerű.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ csillagszerű.
- $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ nem csillagszerű.

Következmény (primitív függvény létezése csillagszerű tartományon)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, csillagszerű, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható. Az f-nak akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha rotációmentes.

Biz. Legyen c a csillag közepe.



Tetszőleges, G-ben fekvő $[a_1a_2\dots a_n]$ zárt töröttvonalra az összes $[ca_{i-1}a_i]$ háromszöglemez G-ben fekszik, így

$$\int_{[a_1a_2\dots a_n]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[ca_{i-1}a_i]} f = 0.$$

30. Homotópia és vonalintegrál

Homotóp görbék. A vonalintegrál azonos végpontú, zárt, illetve nullhomotóp görbéken. Egyszeresen összefüggő tartomány. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Példák egyszeresen összefüggő és nem egyszeresen összefüggő tartományokra, és olyan függvényekre, amelyeknek lokálisan létezik, de globálisan nem létezik primitív függvénye. Zárt vezető mágneses örvényerőssége és a Gauss-féle összekapcsolódásái szám kapcsolata. [LTS2, 194–198], [KG5]

Definíció (közös kezdő-és végpontú homotóp görbék)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$, $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ közös kezdő- és végpontú, folytonos görbék, tehát $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ és $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. A γ_0 és a γ_1 görbe G-ben *homotóp* egymással, ha folytonosan átdeformálhatók egymásba, vagyis létezik olyan $H : [0,1] \times [0,1] \to G$ folytonos függvény, amelyre

(a) bármely $t \in [0,1]$-re $H(t,0) = \gamma_0(t)$ $H(t,1) = \gamma_1(t)$;

(b) bármely $u \in [0,1]$-re $H(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ és $H(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

Szemléletesen, rögzített u esetén $t \mapsto H(t,u)$ az u-adik görbe; az (a) tulajdonság szerint a 0-adik görbe a γ_0, az 1-edik görbe a γ_1. A (b) tulajdonság azt követeli meg, hogy a közbülső görbék kezdő- és végpontja is ugyanaz legyen.

Definíció (homotóp zárt görbék)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$, $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ folytonos zárt görbék, tehát $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ és $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$. A γ_0 és a γ_1 görbe G-ben *homotóp*, ha folytonosan átdeformálhatók egymásba, vagyis létezik olyan $H : [0,1] \times [0,1] \to G$ folytonos függvény, amelyre

(a) bármely $t \in [0,1]$-re $H(t,0) = \gamma_0(t)$ és $H(t,1) = \gamma_1(t)$;

(b) bármely $u \in [0,1]$-re $H(0,u) = H(1,u)$.

A (b) tulajdonság azt követeli meg, hogy a közbülső görbék is zárt görbék.

Definíció (nullhomotóp görbe)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$, $\gamma \to G$ folytonos zárt görbe. A γ görbe G-ben *nullhomotóp* vagy *(egy) pontra (össze)húzható*, ha homotóp egy egypontú (konstans) görbével.

Tétel (vonalintegrál homotóp görbéken)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő, nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos vektormező, aminek lokálisan létezik primitív függvénye, vagyis G minden pontja körül egy környezetben az f-nek van primitív függvénye. Ekkor

(a) Ha γ_0 és γ_1 közös kezdőpontú, G-ben homotóp, szakaszonként C^1 görbék, akkor $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

(b) Ha γ_0 és γ_1 zárt, G-ben homotóp, szakaszonként C^1 görbék, akkor $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

(c) Ha γ zárt, G-ben nullhomotóp, szakaszonként C^1 görbe, akkor $\int_{\gamma} f = 0$.

Biz. ...

Definíció (egyszeresen összefüggő tartomány)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt. A G *egyszeresen összefüggő*, ha minden G-ben fekvő zárt görbe nullhomotóp.

Példák

Egyszeresen összefüggő tartományok:

- $\mathbb{R}^p$
- minden konvex tartomány
- minden csilagszerű tartomány
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Nem egyszeresen összefüggő tartományok:

- $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}((0,0),1)\}$
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{(t,t,t) : x \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in [0,2\pi]\}$

Tétel (a primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományon)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ egyszeresen összefüggő, nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható vektormező.
Az f-nek akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha f rotációmentes.

Biz. A tartomány egyszeresen összefügő, ezért G-ben minden zárt görbe, speciálisan minden zárt töröttvonal nullhomotóp. Az előző tétel miatt minden zárt töröttvonalon 0 az f vonalintegrálja, de akkor van primitív függvénye.

31. Mágneses örvényerősség és összekapcsolódási szám

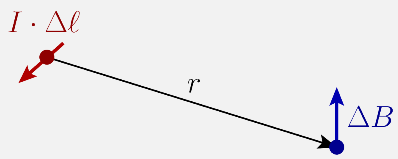
Az elektrodinamika egy olyan tudományterület, ahol a fizika összetalálkozik a topológiával.

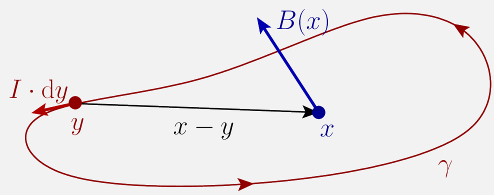
Tétel (Biot-Savart törvény [BStv])

Ha egy rövid, $\Delta\ell$ hosszú vezető darabban I áram fut, akkor r vektorral arrébb ez az áramdarab

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta\ell \times r}{|r|^3}$$

mágneses indukciót hoz létre.





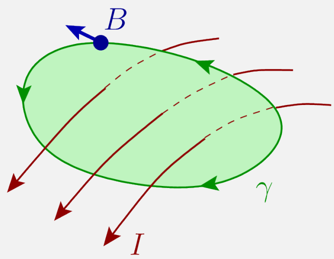
Ha a γ görbe mentén I áram folyik, akkor az áram által létrehozott mágneses indukció az x pontban

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{y \in \gamma} \frac{I \mathrm{d}y \times (x - y)}{|x - y|^3}.$$

Tétel (Ampère- (gerjesztési) törvény; Maxwell IV. egyenlet [Atv])

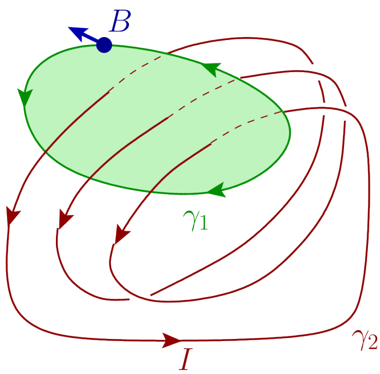
Ha a γ zárt görbe által határolt felületen I stacionárius áram[a] folyik keresztül, akkor a γ görbe mentén a mágneses örvényerősség

$$\int_{y\in\gamma} \langle B, \mathrm{d}y\rangle = \mu_0 I.$$



[a] A töltés nem gyűlik össze; tipikusan ez zárt áramkört jelent, kondenzátorok nélkül. Lásd a IV. Maxwell-egyenlet kiegészítését.

Képzeljünk el egy γ_1 zárt görbét, amely egy felületnek a pereme, és egy másik, γ_2 zárt görbét, ami N-szer átdöfi ezt a felületet.



Ha γ_2 mentén I elektromos áram folyik, akkor a γ_1 mentén kétféleképpen is kiszámíthatjuk a mágneses örvényerősséget:

$$\mu_0 \cdot NI = \int_{x\in\gamma_1} \langle B, \mathrm{d}x\rangle = \int_{x\in\gamma_1} \left\langle \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{y\in\gamma_2} \frac{I\mathrm{d}y \times (x-y)}{|x-y|^3}, \mathrm{d}x \right\rangle =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x\in\gamma_1} \int_{y\in\gamma_2} \frac{\langle \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y, x-y\rangle}{|x-y|^3}.$$

A $\mu_0 I$-vel osztva,

$$N = \frac{1}{4\pi} \int_{x\in\gamma_1} \int_{y\in\gamma_2} \frac{\langle \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y, x-y\rangle}{|x-y|^3}.$$

Ennek a kettős vonalintegrálnak a neve (Gauss féle) Linking Number (összekapcsolódási szám) [LN]. Ha γ_1 és γ_2 két diszjunkt, rektifikálható görbe, akkor a kettős vonalintegrál értelmes, és az értéke egész szám (ezért kell 4π-vel osztani, ami az egységgömb felszíne). Akár ebből, akár közvetlenül ellenőrizhető, hogy homotóp görbepár párokra az összehurkolódási szám ugyanaz. Ennek sok topológiai alkalmazása van; pl. annak bizonyítása, hogy az egymáson átfűzött karikákat nem lehet szétválasztani.

V. rész

Integráltételek

32. A Green-tétel

Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Egyszerű zárt görbe irányítása. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). [LTS2, 200–204. o.]

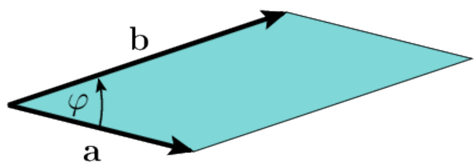
32.1 Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ síkvektorok *keresztszorzata*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

irányított szöge az a $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ szög, amelyre

$$|\mathbf{a}| \cdot \big|\mathbf{b}\big| \cdot \cos\varphi = \big\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \big\rangle, \quad |\mathbf{a}| \cdot \big|\mathbf{b}\big| \cdot \sin\varphi = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$



32.2 Definíció

A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *egyszerű, zárt*, ha folytonos, $\gamma(a) = \gamma(b)$, és a két végpont kivételével injektív (pl. az $[a, b)$ intervallumra megszorítva injektív.)

32.3 Definíció

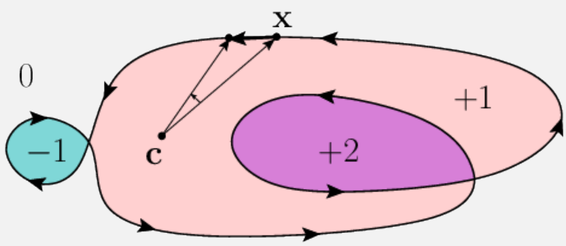
Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zárt görbe, és a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ pont nincs rajta a görbén, akkor $n(\gamma, \mathbf{c}) \in \mathbb{Z}$ jelenti azt, hogy a γ előjelesen hányszor *kerüli meg* a c pontot. Neve: a görbe **c**-re vonatkozó indexe. A görbeindexet sokféle paraméteres vonalintegrállal is felírhatjuk, például

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma} \mathrm{d}\Big(\mathit{sz\ddot{o}g}(\mathbf{x} - \mathbf{c})\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{(x,y)\in\gamma} \frac{(x-c_1)\mathrm{d}y - (y-c_2)\mathrm{d}x}{(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{(x,y)\in\gamma} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{c}) \times \mathrm{d}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|^2}$$

vagy komplex vonalintegrállal

$$n(\gamma, \mathbf{c}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{z}\in\gamma} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathbf{z}-\mathbf{c}}.$$



A görbeindex mindig egész szám.

32.4 Tétel (Jordan-féle görbetétel)

Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű, zárt görbe, akkor az $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma\big([a,b]\big)$ nyílt halmaz két összefüggő komponensből áll, az egyik komponens korlátos (a görbe *belseje*), a másik komponens nem korlátos (a görbe *külseje*), és mindkét komponens határa a γ.
A görbe külső pontokra vonatkozó indexe 0, a belső pontokra vonatkozó index vagy mindenhol $+1$, vagy mindenhol -1. Az első esetben a görbét *pozitív irányításúnak*, a második esetben *negatív irányításúnak* nevezzük.

(Erdős Pálnak az a mondása, hogy valaki *a Jordan-tételt tanulmányozza*, azt jelentette: az illető börtönben van.)

32.5 Definíció

A $K \subset \mathbb{R}^2$ halmaz *Jordan-tartomány*, ha egy egyszerű, zárt, folytonos görbe belseje.
A továbbiakban a határgörbét, pozitív irányítással, ∂K fogja jelölni.

32.6 Definíció

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. A $G \to \mathbb{R}$ függvényeket *skalármezőnek*, a $G \to \mathbb{R}^p$ függvényeket *vektormezőnek* fogjuk hívni. A függvényeknél megszokott formulákkal beszélhetünk a mezők simaságáról (pl. 8-szor folytonosan differenciálható vektormező).

32.7 Tétel (Green)

Legyen K Jordan-tartomány, amelynek a határa rektifikálható, legyen $G \supset \operatorname{cl} K$ nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}$ folytonos.
(a) Ha $\frac{\partial f}{\partial x}$ létezik és folytonos $\operatorname{cl} K$-n, akkor

$$\int_{\partial K} f \mathrm{d}y = \int_K \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

(b) Ha $\frac{\partial f}{\partial y}$ létezik és folytonos $\operatorname{cl} K$-n, akkor

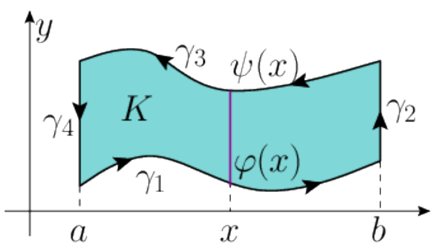
$$\int_{\partial K} f \mathrm{d}x = -\int_K \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Biz. (b1). Ha K normáltartomány: a bizonyítás lényege, hogy K minden függőleges szekcióján alkalmazzuk az egyváltozós Newton-Leibniz formulát.

Tegyük fel, hogy

$$K = \Big\{(x, y) : x \in [a, b], \varphi(x) \le y \le \psi(x)\Big\},$$

valamilyen $[a, b]$ intervallummal és $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \le \psi$ függvényekkel. A két függvénygrafikon tehát $(x, \varphi(x))$ és $(x, \psi(x))$.

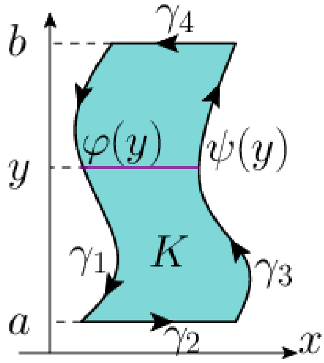


A ∂K határ négy részre vágható: a felső és az alsó határoló grafikon γ_1 és γ_3, és két függőleges szakasz γ_2 és γ_4. A felső függvénygrafikonon jobbról balra kell végigmennünk.

A függőleges szakaszokon az x szerinti vonalintegrál 0.

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b}\Big(f(x,\psi(x)) - f(x,\varphi(x))\Big)\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\gamma_1} f\mathrm{d}x - \int_{\gamma_3} f\mathrm{d}x = -\int_{\partial K} f\mathrm{d}x.$$

(a1) Hasonlóan bizonyítunk, az x és y felcserélésével. Ez a tükrözés megfordítja a határ irányítását, ezért azt vissza kell fordítanunk; itt jön be még egy negatív előjel.



Általában:

- A fentiek bizonyítanak például konvex sokszögekre.
- Átlókkal vagy akár párhuzamos szakaszokkal szétvágva-összeragasztva megkapjuk az állítást tetszőleges zárt töröttvonalra.
- Az általános esetben a határgörbét belülről közelítjük töröttvonalakkal, majd határátmenet.

32.8 Következmény (Jordan-tartomány területe)

$$t(K) = \int_{\partial K} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial K} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial K} \mathbf{x}\times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Biz. Green-tétel az $f(x,y) = x$, illetve $f(x,y) = -y$ függvényekre vagy a kettő átlagára.

32.9 Következmény

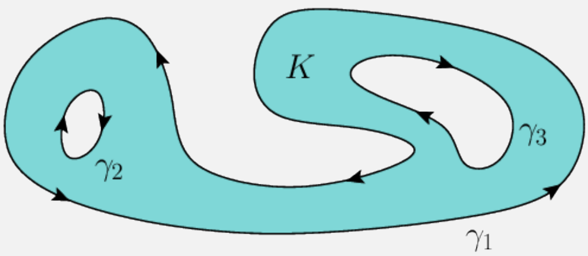
Egyszerű zárt görbén, aminek a belsejében rotációmentes egy 2 vektormező, a vonalintegrál 0. Ezt már megcsináltuk sokkal általánosabban a Goursat-lemmával, de a Green-tétel is működik:

$$\int_{\partial K} \langle f, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}x + \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}y = -\int_K \frac{\partial f_1}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_K \frac{\partial f_2}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

32.10 Megjegyzés

A fentiek elmondhatók olyan tartományokra is, amelyeket egynél több zárt görbe határol, ha a görbéket megfelelően irányítjuk. Legyen $K \subset G$ olyan halmaz, amelynek határa véges sok, diszjunkt, egyszerű zárt, rektifikálható görbéből áll (a továbbiakban: krumpli), akkor K határgörbéit lehetséges úgy irányítani, hogy az K külső pontjaikra vonatkozó indexe 0, a belső pontokra az indexösszeg $+1$ legyen. A továbbiakban ∂K (a krumpli héja) ezeknek az irányított határgörbéknek a halmazát fogja jelenteni, és az $\int_{\partial K}$ a görbéken vett integrálok összegét.



Az összeragasztós-approximálós módszer ezekre is működik, így a Green-tétel és fenti következményei az ilyenekre is kiterjeszthetők.

Feladatok

1 Feladat. *Milyen gyengébb feltételekre cserélhetjük a Green-tétel feltételeit?*

2 Feladat. *Írjunk fel olyan folytonosan differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire igaz, hogy tetszőleges, egységnyi sűrűségű $K \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-krumpli súlypontjának x-koordinátája egyenlő az f függvény ∂K-n vett, (a) x szerinti vonalintegráljával; (b) y szerinti vonalintegráljával.*

3 Feladat. *Írjunk fel olyan folytonosan differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt,* *amire igaz, hogy tetszőleges, egységnyi sűrűségű* $K \subset \mathbb{R}^2$ *Jordan-krumpli origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenlő az* f *függvény* ∂K*-n vett, (a)* x *szerinti vonalintegráljával; (b)* y *szerinti vonalintegráljával.*

33. Integráltételek síkban

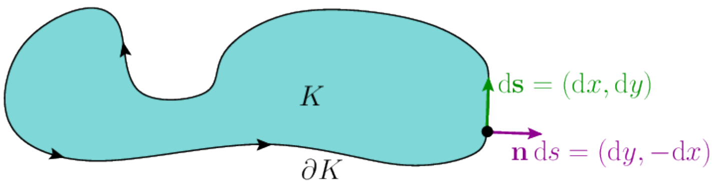
Külső normális. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a talajvíz forrás- és örvényerősségéről. Forrás- és örvényerősség és -sűrűség, divergencia, rotáció. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Stokes-tétel. [LTS2, 205–210. o.]

A továbbiakban γ mindig szakaszonként folytonosan differenciálható lesz.

Definíció. *A* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *görbe sebességvektora a* t *időpontban* $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix}$. *Ha ez nem a nullvektor, akkor az érintővektor* $\mathbf{t} = \dfrac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \dfrac{(\dot x, \dot y)}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}$. *Ennek* $(-90°)$*-kal elforgatottja a külső normális:* $\mathbf{n} = \dfrac{(\dot y, -\dot x)}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}$.

Az ívhossz szerinti integráloknál használni fogjuk a $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{x}|$*, a terület szerinti integráloknál az* $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *jelöléseket. A szokásos helyettesítésekkel a görbén*

$$\mathbf{t}\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$



Tétel (Newton–Leibniz formula)

Ha $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_K (\operatorname{grad} f)\,\mathrm{d}A = \int_{\partial K} f\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

Biz.

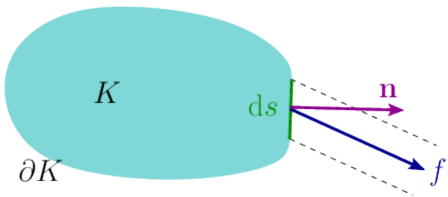
$$\int_{\partial K} f\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\partial K} f \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\partial K} f\mathrm{d}y \\ -\int_{\partial K} f\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_K D_x f\,\mathrm{d}A \\ \int_K D_y f\,\mathrm{d}A \end{pmatrix} = \int_K (\operatorname{grad} f)\,\mathrm{d}A.$$

Megjegyzés. *Elmondhatjuk ugyanezt egydimenzióban, egy* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvényre. A határ két, egységnyi súlyú pontból áll: a felső végpontban a kifelé mutató normálvektor a* $+1$*, az alsó végpontban* -1*. Ezért* $\int_{[a,b]} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\cdot(-1) + f(b)\cdot(+1)$.

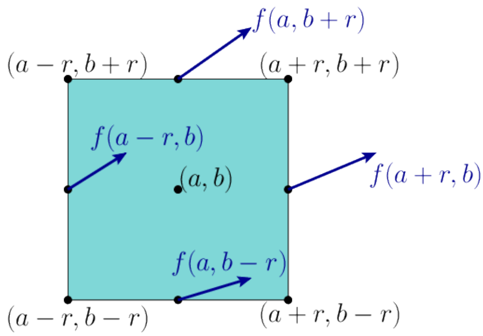
A talajvíz forráserőssége és forrássűrűsége

Kertünk, K egy talajvízzel elárasztott G területen fekszik, a vízszint állandó. A terület bármely pontján a talajvíz feltörhet vagy elszivároghat, de a feltörő víz a ∂K keritésen keresztül kiáramlik, illetve az elszivárgó vízmennyiség a kerítésen keresztül áramlik be. A víz tehát folyamatos mozgásban van, a sebességét az $f : G \to \mathbb{R}^2$ vektormező adja meg.

A kertből a kerítésen át másodpercenként kifolyó vízmennyiség a kertünk *forráserőssége*. Egy $\mathrm{d}s$ hosszú kerítésdarabon, amelynek kifelé mutató normálvektora $\mathbf{n}$, másodpercenként $\langle f, \mathbf{n}\, \mathrm{d}s\rangle$ víz folyik ki; a forráserősség ennek integrálja, vagyis $\int_{\partial K} \langle f, \mathbf{n}\, \mathrm{d}s\rangle$.



Most osszuk fel kertünket kis, $2r$ oldalú négyzetekre, és vizsgáljunk meg, hogy egy (a, b) pont körüli $[a - r, a + r] \times [b - r, b + r]$ négyzetben mennyi víz tör fel, illetve mennyi folyik a négyzetből ki. Az f persze egy-egy oldalon sem állandó, mi az oldalak középpontjában vett értékekkel fogunk számolni.



A függőleges oldalakon kifolyó vízmennyiség csak f vízszintes komponensétől függ, a vízszintes oldalakon pedig az f függőleges komponensétől.

- A jobboldalon kifolyó vízmennyiség: $f_1(a + r, b) \cdot 2r$
- Baloldalon: $-f_1(a - r, b) \cdot 2r$ (a negatív irány mutat kifelé)
- Fent: $f_2(a, b + r) \cdot 2r$
- Lent: $-f_2(a, b - r) \cdot 2r$ (a negatív irány mutat kifelé)

Összeadva, a négyzet forráserőssége

$$\begin{aligned}
&\approx f_1(a+r,b)\cdot 2r - f_1(a-r,b)\cdot 2r + f_2(a,b+r)\cdot 2r - f_2(a,b-r)\cdot 2r \\
&= \left(\frac{f_1(a+r,b)-f_1(a-r,b)}{2r} + \frac{f_2(a,b+r)-f_2(a,b-r)}{2r}\right)\cdot (2r)^2 \\
&\approx \Big(D_1 f_1(a,b) + D_2 f_2(a,b)\Big)\cdot \text{terület.}
\end{aligned}$$

Mondhatjuk, hogy az (a,b) pont körül négyzetméterenként és másodpercenként $D_1 f_1(a,b) + D_2 f_2(a,b)$ köbméter talajvíz tör fel. A *forrássűrűség az (a,b) pontban: $D_1 f_1(a,b) + D_2 f_2(a,b)$*.

A kertben másodpercenként feltörő összes vízmennyiség, vagyis a kert forráserőssége a forrássűrűség terület szerinti integrálja, vagyis $\int_K (D_1 f_1 + D_2 f_2)\mathrm{d}A$.

Ezzel kétféle heurisztikus képletet is kitaláltunk a kertből kifolyó vízmennyiségre, és azt várjuk, hogy a kettő valóban egyenlő, és persze nem függ az önkényesen megválasztott koordináta irányainktól sem.

Definíció (vektormező divergenciája)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt és $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható. Az $\mathbf{f}$ vektormező *divergenciája* vagy *forrássűrűsége*

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = D_1 f_1 + D_2 f_2 + \ldots + D_p f_p = \langle \nabla, f\rangle = \operatorname{tr} f' = \nabla^t \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$$

Tétel. *A divergencia nem függ a koordinátarendszer irányától.*

Biz. Általában, mi történik, ha a szokásos koordináta-rendszerről a $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)$ koordináta-egységvektorokra térünk át? Az új koordináta vektorokból egy $T = (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)$ mátrixot készíthetünk, ami ortogonális (azaz $T^tT = TT^t = I$ avagy $T^{-1} = T^t$), és pozitív irányítású (azaz $\det T = 1$). Ha egy vektor koordinátái a régi rendszerben $\mathbf{x}$, az új rendszerben $\mathbf{y}$, akkor $\mathbf{y} = T^t\mathbf{x}$.

A T transzformáció megtartja a skaláris szorzatot: tetszőleges $\mathbf{x},\mathbf{y}$ vektorokra

$$\langle T^t\mathbf{x}, T^t\mathbf{y}\rangle = (T^t\mathbf{x})^t(T^t\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t(TT^t)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$$

Az $\mathbf{u}_i$ irányú iránymenti derivált $D_{\mathbf{u}_i} = \mathbf{u}_i^t\nabla$; az új rendszerben a deriváló operátor

$$\nabla_{\text{új}} = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{u}_1} \\ \vdots \\ D_{\mathbf{u}_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_p^t \end{pmatrix}\nabla = T^t\nabla.$$

Avagy, skalármező gradiensvektora az új koordináta-rendszerben

$$\operatorname{grad}_{\text{új}} f = T^t \operatorname{grad}_{\text{régi}} f.$$

A vektormezőket is az új koordináta-rendszerben írjuk fel, tehát $\nabla_{\text{új}}$-t nem az $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ függvényre, hanem az $\mathbf{f}_{\text{új}} = T^t\mathbf{f}$ fügvényre kell alkalmaznunk.

Tehát

$$\operatorname{div}_{\text{új}} \mathbf{f}_{\text{új}} = \nabla_{\text{új}}^t \mathbf{f}_{\text{új}} = (\nabla^t T)(T^t \mathbf{f}) = \nabla^t (TT^t)\mathbf{f} = \nabla^t \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

Tétel (2-dimenziós Gauss-Osztrogradszkij (Михаил Васильевич Остроградский) tétel, divergenciatétel)

Ha $\operatorname{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor

$$\int_K (\operatorname{div} \mathbf{f})\ \mathrm{d}A = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \mathrm{d}s \rangle.$$

Biz.

$$\int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \mathrm{d}s \rangle = \int_{\partial K} \Big(f_1 \mathrm{d}y + f_2(-\mathrm{d}x) \Big) = \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}y - \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}x =$$
$$= \int_K (D_1 f_1) \mathrm{d}A + \int_K (D_2 f_2) \mathrm{d}A = \int_K (\operatorname{div} \mathbf{f})\ \mathrm{d}A.$$

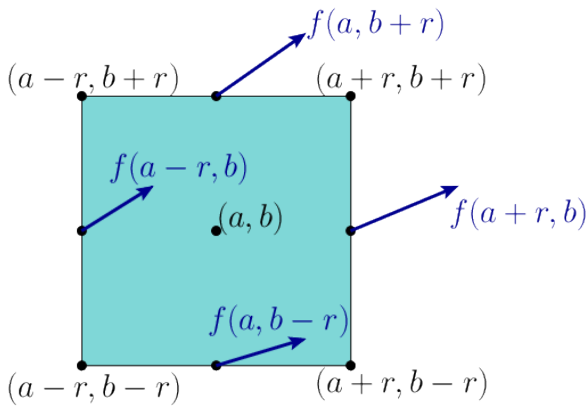
Megjegyzés. *A Gauss-Osztrogradszkij tétel lehetőséget ad a divergencia egy koordinátafüggetlen definíciójára, egy pontra összehúzódó krumplikkal.*

Vektormező örvényerőssége és örvénysűrűsége

Kertünkben most az örvénylést fogjuk mérni. Csónakunkra a kert minden pontjában valamekkora f erő hat a víz sodrása miatt. A kert határán az *örvényerősség* azt jelenti, hogy pozitív irányban körbe haladva a sodrás mekkora munkát végez. Ezt persze a szokásos valós vonalintegrál adja meg: $W = \int_{\partial K} \langle f, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \int_{\partial K} (f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y)$.

Ismét osszuk fel kertünket kis, $2r$ oldalú négyzetekre, és vizsgáljunk meg az örvényerősséget az (a, b) pont körüli $[a-r, a+r] \times [b-r, b+r]$ négyzet határán. Ismét csak az oldalközéppontokban vett erőkkel számolva, a végzett munka a jobb-, a bal-, a felső és az alsó oldalon rendre $f_2(a+r, b) \cdot 2r$, $f_2(a-r, b) \cdot (-2r)$, $f_1(a, b+r) \cdot (-2r)$, illetve $f_1(a, b-r) \cdot 2r$, összesen

$$\Big(f_2(a+r, b) - f_2(a-r, b) - f_1(a, b+r) + f_1(a, b-r) \Big) \cdot 2r \approx \Big(D_1 f_2 - D_2 f_1 \Big) \cdot (2r)^2.$$



Ha ezt az összes kis négyzetre összeadjuk, akkor a belső határokon vett munkák kiesnek, és csak a kert határa mentén végzett munka marad meg. Tehát azt várjuk, hogy $W = \int_K \big(D_1 f_2 - D_2 f_1\big) \mathrm{d}A$. Az integrandust, a $D_1 f_2 - D_2 f_1$ függvényt nevezhetjük az f vektormező *örvénysűrűségének*.

Definíció (vektormező rotációja 2-dimenzióban)

Két dimenzióban az f vektormező *rotációja* vagy *örvénysűrűsége*

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{f} = D_1 f_2 - D_2 f_1 = \nabla \times f = \det(\nabla, \mathbf{f})$$

Tétel. *A rotáció nem függ a koordinátarendszer irányától.*

Biz.

$$\mathrm{rot}_{\text{új}}\, \mathbf{f}_{\text{új}} = \det(\nabla_{\text{új}}, \mathbf{f}_{\text{új}}) = \det(T^t\nabla, T^t\mathbf{f}) = \det\big(T^t \cdot (\nabla, \mathbf{f})\big) = \det T^t \cdot \det(\nabla, \mathbf{f})\big) = 1 \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{f}.$$

Tétel (2-dimenziós Stokes-tétel)

Ha $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor

$$\int_K (\mathrm{rot}\, \mathbf{f})\ \mathrm{d}A = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times (\mathbf{n} \mathrm{d}s).$$

Biz. A második két integrál ugyanaz, mert

$$-\mathbf{f} \times (\mathbf{n}\mathrm{d}s) = -(f_1, f_2) \times (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) = f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y = \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle.$$

Ezután a Green-tételt kétszer alkalmazva,

$$\int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \int_{\partial K} (f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y) = \int_K \Big(- D_2 f_1 + \int_K D_1 f_2 \Big)\ \mathrm{d}A = \int_K (\mathrm{rot}\, \mathbf{f})\ \mathrm{d}A.$$

Megjegyzés. *A Stokes-tétel lehetőséget ad a rotáció koordinátafüggetlen definíciójára, egy pontra összehúzódó krumplikkal.*

Feladatok

1 Feladat. *Ellenőrizd közvetlenül, és vezesd le a Newton–Leibniz formulából és a Stokes-tételből is, hogy tetszőleges K Jordan-krumplira*

$$\int_{\partial K} \mathbf{n} \mathrm{d}s = 0.$$

2 Feladat. *Írj fel olyan folytonosan differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire igaz, hogy tetszőleges, A területű $K \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-krumpli súlypontja*

$$\frac{1}{A} \int_{\partial K} f\mathbf{n} \; \mathrm{d}s.$$

3 Feladat. *Legyen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, és $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, ha $|t| \le \alpha$.*

$$\int_{\gamma} \mathbf{n} \; \mathrm{d}s = ?$$

4 Feladat. *A* grad, div, rot *operációkból 9-féle kompozíció készíthető:* grad rot *stb. Ezek közül melyek értelmesek? Melyek azonosan nullák?*

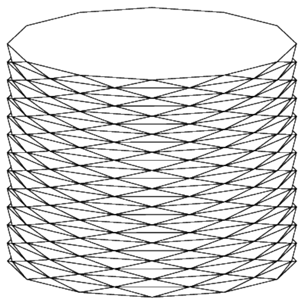
5 Feladat. *Igazold, hogy minden (elég sima) $R^2 \to \mathbb{R}^2$ vektormező felbontható egy divergenciamentes és egy rotációmentes vektormező összegére.*

34. Integráltételek három dimenzióban

Folytonosan differenciálható paraméteres felületek. Felszín, normálvektor. Felszín szerinti és felületi integrálok. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós Newton-Leibniz formula. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. [LTS2, 211–221. o.]

Definíció. *Ha $P \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, akkor a $P \to \mathbb{R}^3$ függvényeket fogjuk paraméteres felületnek hívni. Beszélhetünk folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, darabonként folytonosan differenciálható felületekről is.*

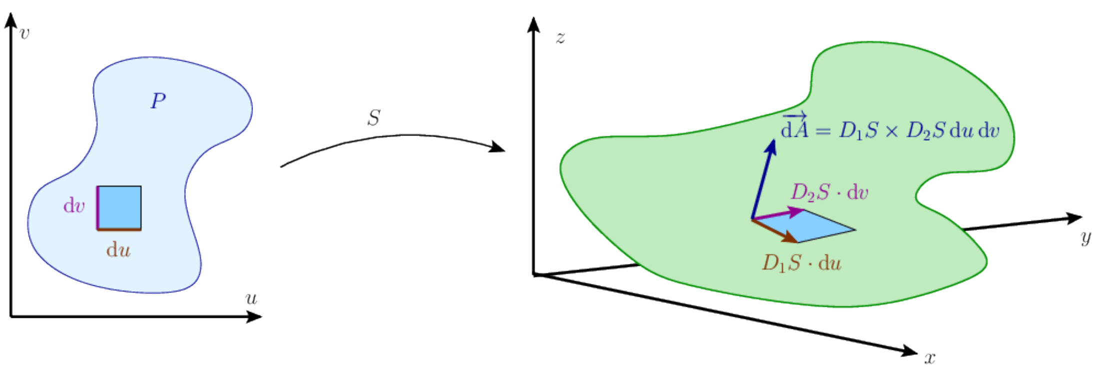
Megjegyzés. *A felszínt nem lehet — a görbék ívhosszának mintájára — a beírt poligonok felszínének szuprémumaként definiálni (ld. hengerbe beírt lampion).*



Definíció. *Ha $S : P \to \mathbb{R}^3$ darabonként folytonosan differenciálható felület, akkor*

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = (D_1S \times D_2S)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad |\mathrm{d}A| = |\overrightarrow{\mathrm{d}A}|, \qquad \mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}A}}{|\mathrm{d}A|} = \frac{D_1S \times D_2S}{|D_1S \times D_2S|}$$

(felületelem, felszínelem, illetve irányított normálvektor).



Az S felület felszíne

$$A = \int_{u,v\in P} |D_1S \times D_2S|\mathrm{d}u\mathrm{d}v; \qquad \textit{ennek egyfajta rövidítése, jele:} \quad \int_S |\mathrm{d}A|.$$

Ha f valamilyen skalár- vagy vektormező, akkor f felszín szerinti integrálja az S felületen

$$\int_{(u,v)\in P} f(S(u,v))\ |D_1S\times D_2S|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v; \qquad \textit{jele:} \quad \int_S f|\mathrm{d}A|.$$

Ha $*$ valamilyen szorzás (bilineáris függvény), akkor

$$\int_{(u,v)\in P} f(S(u,v)) * (D_1S\times D_2S)\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v; \qquad \textit{jele:} \quad \int_S f * \overrightarrow{\mathrm{d}A}.$$

Speciálisan, ha $*$ a skaláris szorzás, akkor f felületi integrálja vagy fluxusa az S felületen

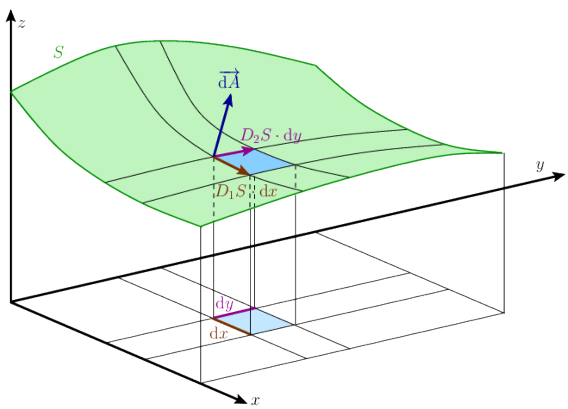
$$\int_{(u,v)\in P} \Big\langle f(S(u,v)), D_1S\times D_2S\Big\rangle\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v; \qquad \textit{jele:} \quad \int_S \langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}A}\rangle.$$

Lemma. *Ha $S(u,v)=(u,v,\varphi(u,v))$ egy kétváltozós függvény grafikonja, akkor*

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = \begin{pmatrix} -D_u\varphi \\ -D_v\varphi \\ 1 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Biz. $D_1S=(1,0,D_u\varphi(u,v))$ és $D_1S=(0,1,D_v\varphi(u,v))$, a *felfelé mutató* terület-vektor tehát

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D_u\varphi \end{pmatrix}\mathrm{d}u \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D_v\varphi \end{pmatrix}\mathrm{d}v = \begin{pmatrix} -D_u\varphi \\ -D_v\varphi \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$



Ebből látjuk, hogy a grafikon felszíne

$$A=\int_{(u,v)\in P}\sqrt{(D_u\varphi)^2+(D_v\varphi)^2+1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

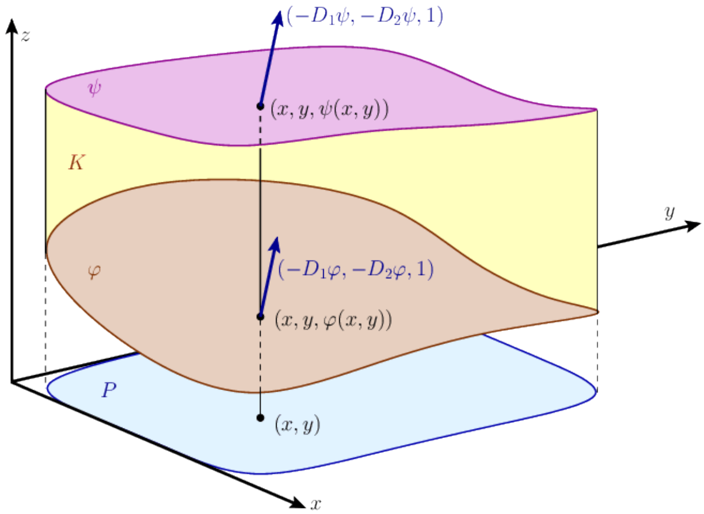
(Kb. ezt is várjuk.)

Lemma (a Green-tétel három-dimenziós változata)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, végül $i \in \{1, 2, 3\}$, akkor

$$\int_K (D_i f)\ \mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{A}_i.$$

($\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ a térfogatelem; $\mathrm{d}\overrightarrow{A}_i$ a $\mathrm{d}\overrightarrow{A}$ területvektor i-edik koordinátája.)



Biz (Csak szép normáltartományokra). Legyen $i = 3$, tegyük fel, hogy K normáltartomány a P szép paramétertartomány fölött. A alsó és a felső grafikon legyen most is $\varphi(x, y)$ és $\psi(x, y)$, tehát $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in P, \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}$. A határ függőleges darabjain $\mathrm{d}\overrightarrow{A}_3 = 0$, tehát a z szerinti integrál 0. Az alsó grafikonon a lefelé mutató normálvektort kell használnunk.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} f\ \mathrm{d}\overrightarrow{A}_3 &= \int_{(x,y)\in P} f(x, y, \psi(x, y)) \begin{pmatrix} -D_1\psi(x, y) \\ -D_2\psi(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}_3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{(x,y)\in P} f(x, y, \varphi(x, y)) \begin{pmatrix} D_1\varphi(x, y) \\ D_2\varphi(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}_3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \int_{(x,y)\in P} \Big(f(x, y, \psi(x, y)) - f(x, y, \varphi(x, y)) \Big) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{(x,y)\in P} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} D_3 f(x, y, z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_K D_3 f\ \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Tétel (Newton–Leibniz formula)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_K (\operatorname{grad} f)\, \mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{A}.$$

Biz. A Lemmát mindhárom koordinátára alkalmazva,

$$\int_K (\operatorname{grad} f)\, \mathrm{d}V = \int_K \begin{pmatrix} D_1 f\ \mathrm{d}V \\ D_2 f\ \mathrm{d}V \\ D_3 f\ \mathrm{d}V \end{pmatrix} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} f \mathrm{d}\overrightarrow{A}_1 \\ f \mathrm{d}\overrightarrow{A}_2 \\ f \mathrm{d}\overrightarrow{A}_3 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} f\ \mathrm{d}\overrightarrow{A}.$$

Következmény.

$$\int_{\partial K} \mathrm{d}\overrightarrow{A} = \mathbf{0}.$$

Biz. Newton–Leibniz formula a konstans 1 függvényre.

Tétel (3-dimenziós Gauss-Osztrogradszkij tétel, divergenciatétel)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_K (\operatorname{div} \mathbf{f})\, \mathrm{d}V = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\overrightarrow{A} \rangle.$$

Biz.

$$\int_K (\operatorname{div} \mathbf{f})\, \mathrm{d}V = \int_K \Big(D_1 f_1\ \mathrm{d}V + D_2 f_2\ \mathrm{d}V + D_3 f_3\ \mathrm{d}V \Big) =$$
$$= \int_{\partial K} \Big(f_1 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_1 + f_2 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_2 + f_3 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_3 \Big) = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\overrightarrow{A} \rangle.$$

Definíció (vektormező rotációja 3-dimenzióban)

Az $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ vektormező rotációja

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} D_2 f_3 - D_3 f_2 \\ D_3 f_1 - D_1 f_3 \\ D_1 f_2 - D_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. *A rotáció most is örvénysűrűséget jelent, de az örvények különböző síkokban fekhetnek. Ha egy kis körvonal területvektora* $\mathbf{v}$*, akkor a körvonalon az örvényerősség* $\langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$*. Ilyen értelemben a rotáció egy* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *lineáris függvény.*

Tétel. *A rotáció nem függ a koordinátarendszer irányától.*

Biz. Megint vegyük a T transzformációt; azt fogjuk megmutatni, hogy bármilyen $\mathbf{v}$ vektorra
$$\langle \operatorname{rot}_{\text{új}} \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}} \rangle = \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$
És valóban,
$$\begin{aligned}\langle \operatorname{rot}_{\text{új}} \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}} \rangle = \det(\nabla_{\text{új}}, \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}}) = \det(T^t\nabla, T^t\mathbf{f}, T^t\mathbf{v}) = \\ = \det\Big(T^t \cdot (\nabla, \mathbf{f}, \mathbf{v})\Big) = \det(\nabla, \mathbf{f}, \mathbf{v}) = \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.\end{aligned}$$

Tétel (Stokes)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor
$$\int_K (\operatorname{rot} \mathbf{f}) \,\mathrm{d}V = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times \mathrm{d}\vec{A}.$$

Biz.
$$\begin{aligned}\int_K (\operatorname{rot} \mathbf{f}) \;\mathrm{d}V &= \begin{pmatrix} \int_K D_2 f_3 \,\mathrm{d}V - \int_K D_3 f_2 \,\mathrm{d}V \\ \int_K D_3 f_1 \,\mathrm{d}V - \int_K D_1 f_3 \,\mathrm{d}V \\ \int_K D_1 f_2 \,\mathrm{d}V - \int_K D_2 f_1 \,\mathrm{d}V \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \int_{\partial K} f_3 \mathrm{d}\vec{A}_2 - \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}\vec{A}_3 \\ \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}\vec{A}_3 - \int_{\partial K} f_3 \mathrm{d}\vec{A}_1 \\ \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}\vec{A}_1 - \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}\vec{A}_2 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} (-\mathbf{f} \times \mathrm{d}\vec{A}).\end{aligned}$$

Általános Stokes-tétel

Érdemes összehasonlítanuk az integráltételeinket:

Green-tétel	$\int_K D_i f \,\mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}\vec{A}_i$
Newton–Leibniz formula	$\int_K \big(\operatorname{grad} f\big) \,\mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}\vec{A}$
Gauss–Osztrogradszkij tétel	$\int_K \big(\operatorname{div} \mathbf{f}\big) \,\mathrm{d}V = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\vec{A} \rangle$
Stokes-tétel	$\int_K \big(\operatorname{rot} \mathbf{f}\big) \,\mathrm{d}V = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times \mathrm{d}\vec{A}$

Ezeknek egy közös általánosítása a következő:

Tétel (általános Stokes-tétel). *Legyenek q, r pozitív egészek, és legyen $* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ valamilyen szorzás (bilineáris leképezés). Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, és legyen $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható. Ekkor*

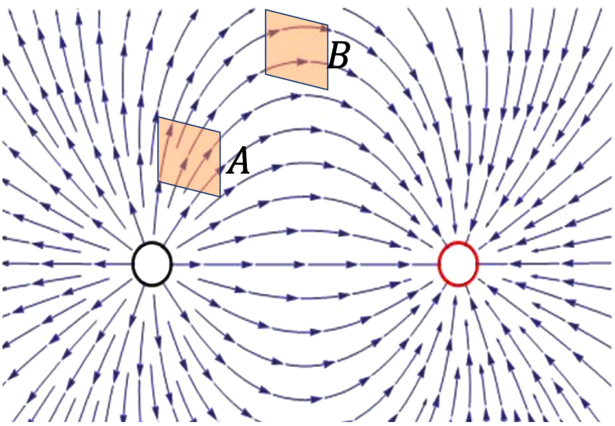
$$\int_K (\nabla * \mathbf{f}) \, \mathrm{d}V = \int_{\partial K} \overrightarrow{\mathrm{d}A} * \mathbf{f}.$$

A tételt könnyen bebizonyíthatjuk az előbbi példák alapján. Magasabb dimenzióban a $\overrightarrow{\mathrm{d}A}$ felületelemet kell értelmeznünk, ehhez a vektorális szorzást kell kiterjesztenünk $(p-1)$ darab, p-dimenziós vektorra.

A Newton–Leibniz formula esetében $q = 1$, tehát f skalármező, $r = 3$ és $*$ vektor szorzása skalárral. A Gauss–Osztrogradszkij tételben $q = 3$, $r = 1$ és $*$ a vektorok skaláris szorzata. A Stokes-tételben pedig $q = r = 3$, és $*$ a vektorális szorzás.

Erővonalak és divergenciamentesség

Az elektromos, mágneses és a gravitációs mezőket is szeretjük *erővonalakkal* szemléltetni. Az erővonalak iránya megyezik a térerősség irányával, az erővonalak sűrűsége pedig a térerősség nagyságával. Egy irányított felületdarabon a mező fluxusa a felületet átdöfő erővonalak száma.



(Forrás: `http://www.physicsbootcamp.org/Flux-of-Electric-Field.html`

Az erővonalas szemléltetés akkor jogos, ha a forrásmentes, tehát 0 töltésű/tömegű térrészek fluxusa 0, vagyis ha a vektromező divergenciamentes. Ezért sem szoktunk töltött testek belsejében erővonalakat rajzolni.

Körülfordulási szám és változatai

A Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint divergenciamentes vektormezőnek minden szép krumpli határán nulla a felületi integrálja. Ez lehetőséget ad a primitív függvényről szóló fejezet általánosítására: meg lehetne csinálni a Goursat-lemma felületi integrálokról szóló variánsát, és bebizonyítani, hogy minden nullhomotóp zárt felületen (vagy akár csak poliéderen) nulla a felületi integrál. Ezzel az eszközzel be tudjuk bizonyítani például azt, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-bel.

Két dimenzióban a γ görbének az $\mathbf{a}$ pont körüli körülfordulási számát a következő alakba is írhatjuk:

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma} \left\langle \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2}; \overrightarrow{\mathrm{d}A} \right\rangle$$

ahol az integrál előtt álló π az egységkör kerülete.

Ennek mintájára, ha $\mathcal{S}$ darabonként folytonos, irányított zárt felület $\mathbb{R}^3$-ban, amely nem megy át a $\mathbf{a}$ ponton, akkor az

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}} \left\langle \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}; \overrightarrow{\mathrm{d}A} \right\rangle$$

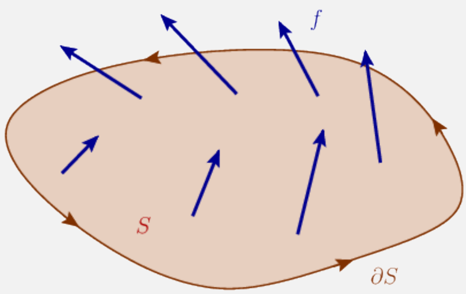
felületi integrál azt számolja meg, hogy az S felület hányszor *kerüli meg* az $\mathbf{a}$ pontot. (A 4π az egységgömb felszíne.)

Maxwell-egyenletek

A Maxwell-egyenletekben a divergenciatételen kívül a következő integráltétel szerepel:

Tétel (Kelvin–Stokes)

Ha $S \subset G$ egy irányított, peremes felület, ami mondjuk darabonként folytonosan differenciálható, a határa pedig rektifikálható, valamint $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor $\int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \overrightarrow{\mathrm{d}A} \rangle = \int_{\partial S} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle$.



Jól felismerhető, hogy ez valójában a kétdimenziós Stokes-tétel egy kiterjesztése felületdarabokra.

Az I. és III. egyenletnél a Gauss-Osztrogradszkij tétel, a II. és IV. egyenletnél a Kelvin-Stokes tétel a kapcsolat a differenciális és az integrális alakok között.

Sorszám, név	Differenciális alak	Integrális alak
I. (Gauss-törvény)	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
II. (Faraday–Lenz törvény)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$
III. (Gauss mágneses törvénye)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$
IV. (Ampère-törvény)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$

Feladatok

6 Feladat. *Legyen* $P = \{(u,v) \in [0,1]^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$, $g(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $F = g(P)$ *és* $f(x,y,z) = (x,y,z)$. *Írd át (esetleg többszörös) Riemann-integrállá a következő felszíni/felületi integrálokat.*

$$\int_F \overrightarrow{\mathrm{d}S}; \quad \int_F \left|\mathrm{d}S\right|; \quad \int_F \left\langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle; \quad \int_F f \times \overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$

7 Feladat. *Rögzített* $a \in \mathbb{R}^3$ *mellett legyen (a)* $f(x) = x \times a$ $(x \in \mathbb{R}^3)$*; (b)* $f(x) = a \times x$ $(x \in \mathbb{R}^3)$.

$$\operatorname{div} f = ? \qquad \operatorname{rot} f = ?$$

8 Feladat. *Állapítsd meg, hogy a* div, rot, grad *operátorok lehetséges 9 párosításából* (div div, div rot, ...) *melyek alkalmazhatóak kétszer folytonosan differenciálható* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *függvényre, illetve* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *leképezésre, és közülük melyek adnak mindig nullát!*

9 Feladat. *Legyen* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *sima (akárhányszor differenciálható) vektormező. Igazold, hogy*

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} f = \operatorname{grad}\operatorname{div} f - \begin{pmatrix} \operatorname{div}\operatorname{grad} f_1 \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_2 \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_3 \end{pmatrix}.$$

10 Feladat. *Legyen* $f_1(x,y,z) = xyz$ *és* $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. *Konstruálj olyan* $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *függvényt, amire az* (f_1, f_2, f_3) *vektormező felületi integrálja tetszőleges zárt gömbfelületen megegyezik a gömb térfogatával.*

11 Feladat. *Legyen* $B = \Big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\Big\}$ *az egységgömb, és legyen* $f(x,y,z) = (yz, x-z, z-y)$.

$$(a) \quad \int_{\partial B} \left\langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = ? \qquad (b) \int_{\partial B} f \times \overrightarrow{\mathrm{d}S} = ?$$

12 Feladat. *Számítsd ki az* r *sugarú gömb felszínét a divergenciatételből, az* $f(x,y,z) = (x,y,z)$ *vektormező felületi integráljából.*

13 Feladat. *Vegyük az egységgömbfelületnek az első térnyolcadba eső részét. Hol van ennek a súlypontja?*

14 Feladat. *Az* $F \subset \mathbb{R}^3$ *konvex sokszöget a* g *zárt, irányított töröttvonal határolja. A síklap jobbkézszabály szerint irányított területvektora* $\vec{A}$. *Igazold, hogy*

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \int_g \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Hogyan lehet ezt az állítást visszavezetni a Kelvin-Stokes tételre?

15 Feladat. *Igazold, hogy a Gauss-Osztrogradszkij és a Stokes-tétel akkor is teljesül (mondjuk tetraéderre, majd poliéderekre), ha a vektormező differenciálható, és a koordinátafüggvényeinek a parciális deriváltjai integrálhatók.*

16 Feladat. *Az* $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ *vektormező akárhányszor differenciálható, divergenciamentes, és az origó egy pontozott könyezetében korlátos. Bizonyítsd be, hogy van olyan* $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ *vektormező, amire* $f = \operatorname{rot} g$.

17 Feladat. *Mi lehetne a parciális integrálás a 3-dimenziós divergenciatétellel?*

18 Feladat. *(a) Legyen* $G \subset \mathbb{R}^3$ *és* $\phi_t(u,v)$ *egy* $[0,1]^3 \to G$ *folytonosan differenciálható paraméteres felületsereg, ami az egységnégyzet minden rögzített* (u,v) *határpontjára független a* t *paramétertől. Legyen* $F : G \to \mathbb{R}^3$ *folytonosan differenciálható, divergenciamentes vektormező. Mutasd meg, hogy az*

$$I(t) = \int_0^1 \int_0^1 \langle D_x\phi_t(x,y) \times D_y\phi_t(x,y), F(\phi_t(x,y)) \rangle \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

paraméteres felületi integrál nem függ t*-től.*

(b) Igazold, hogy az $\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ *vektormező divergenciamentes, de az egységgömbön vett felületi integrálja nem* 0.

(c) Igazold, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ *halmazban az egységgömbfelület nem nullhomotóp.*

(d) Igazold, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ *nem homeomorf* $\mathbb{R}^3$*-nel.*

19 Feladat. *Az* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *vektormező akárhányszor differenciálható és divergenciamentes. Bizonyítsd be, hogy van olyan* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *vektormező, amire* $f = \operatorname{rot} g$.

20 Feladat. *Mutasd meg, hogy minden* $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ *sima vektormező előáll egy divergenciamentes és egy rotációmentes vektormező összegeként.*

21 Feladat. *Bizonyítsd be az általános Stokes-tételt.*

Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis 3. vizsgához (sillabusz)

2022/2023, I. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

Jelenléti, szóbeli vizsga lesz. A vizsgatételek közül kettőt húztok. Kb. 60 percetek lesz a tételek vázlatos kidolgozására, amit kb. 20 percben szóban elmeséltek és válaszoltok a vizsgáztató kérdéseire.

Kiöltözni nem kell. Normális, kényelmes, meleg ruhában gyertek.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket és definíciókat, és ezeket pontosan meg is érteni.

Ha valamelyik részre vagy tételre a vizsgázó tudása elégtelen, akkor az egész vizsga értékelése elégtelen.

1. Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben

Euklideszi távolság és skaláris szorzat $\mathbb{R}^p$-ben. Nyílt és zárt gömbök. Pontsorozat limesze. Ekvivalens átfogalmazások. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \ldots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. A limeszpont egyértelmű. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. Linearitás. Cauchy-tulajdonság, Cauchy-kritérium. Teljes metrikus tér. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Korlátos halmaz, korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

2. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban

Norma, metrika. $|.|_q$ normák $0 < q \leq \infty$ esetén. $q < 1$ esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség. Hölder- és Minkowski egyenlőtlenség. $1 \leq q \leq \infty$ esetén $|.|_q$ tényleg norma. Normák ekvivalenciája. Véges dimenzióban minden norma ekvivalens. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpélda végtelen dimenzióban. [KG1]

3. Nyílt és zárt halmazok $\mathbb{R}^p$-ben

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja, belseje, külseje, határa. Nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz, halmaz lezártja. Az egész tér és az üres halmaz egyszerre nyílt és zárt. A "nyílt", illetve "zárt" gyömbök és téglák nyíltak, illetve zártak. Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az elemeiből képzett konvergens sorozatok limeszei is elemei. Bármely halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementuma zárt. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt. Zárt halmazok tetszőleges rendszerének metszete zárt. Véges sok zárt halmaz uniója zárt. Végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, illetve végtelen sok zárt halmaz uniója nem biztos, hogy zárt. Sűrű halmazok. $\mathbb{Q}^p$ és $\mathbb{R}^p \setminus \mathbb{Q}^p$ sűrű. A belső/külső pont, nyílt halmaz stb. fogalmak nem függnek attól, hogy melyik normát használjuk. [LTS2, 9–12]; [KG1]

4. Kompakt halmazok

Cantor-metszettétel. Elenpéldák, nem korlátos, illetve nem zárt halmazokkal. Kompakt halmazok. Borel tétele. Ponthalmazok távolsága. Nemüres kompakt és vele diszjunkt nemüres zárt halmaz távolsága pozitív. [LTS2, 18, 21–24. o.]

5. Összefüggő halmazok

Hegymászós feladat: hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő. Példa összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő halmazra. $\mathbb{R}^p$ összefüggő. $\mathbb{R}^p$-ben az üres halmazon és az egész téren kívül nincs más halmaz, amely egyszerre nyílt és zárt is. Összefüggő nyílt halmazban bármely két pont összeköthető töröttvonallal. Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható. Tartomány. [LTS2, 19–21. o.]

6. Többváltozós függvények határértéke

p-változós függvény. Jelölések. p-változós függvény véges és végtelen határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. Felső és alsó határérték. $\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{a,A} f = \alpha$. $\limsup_{a,A} f = \max\{\lim f(x_n : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a\}$. Átviteli elvek. Határátmenet $\limsup$-ra és $\liminf$-re. Rendőr- és honvéd/csősz-elvek. [LTS2, 28–31. o.]

7. Többváltozós függvények folytonossága

Többváltozós függvények folytonossága. Átviteli elv. Folytonos függvény folytonossága részhalmazokon. Szekciófüggvények. Példa olyan függvényre, amelynek minden szekciófüggvénye folytonos, de a függvény nem folytonos. A kompozíció, összeg, szorzat, hányados folytonossága. Minden polinom folytonos. Az elemi függvények folytonosak. Weierstrass tétele. Egyenletes folytonosság. Heine tétele. [LTS2, 32–36. o.]

8. Parciális deriváltak

Parciális differenciálhatóság. Példa parciálisan differenciálható, de nem folytonos függvényre. Lokális szélsőértékek. Szélsőértékkeresés a parciális deriváltak nullhelyeinek megkeresésével. Adott körbe írt maximális területű háromszög. [LTS2, 39–43. o.]

9. Többváltozós függvények differenciálása

Lineáris függvény; átírás vektorok skaláris szorzatával és mátrixszorzással. Többváltozós függvény differenciálhatósága. Érintősík. Összehasonlítás az egyváltozós esettel. Ha egy függvény differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható és folytonos. Példák arra, hogy ezek nem megfordíthatóak. Egyértelműség. Deriváltvektor, gradiens. [LTS2, 45–48. o.]

10. A derivált és a parciális deriváltak kapcsolata.

A parciális deriváltak folytonosságából következik a differenciálhatóság. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények differenciálhatósága. [LTS2, 48–53]

11. Iránymenti deriváltak. Lagrange-középértéktétel

Iránymenti derivált. Differenciálható fügvény minden irányban differenciálható. Az iránymenti derivált kiszámítása. Gradiens vektor. Lagrange-középértéktétel. Becslés a függvény megváltozására. Ha egy tartományon a derivált 0, akkor a függvény konstans. [LTS2, 53–56. o.]

12. Vektorértékű függvények differenciálása

A lineáris leképezés fogalma és alapvető tulajdonságai: műveletek, mátrixnorma. A lineáris leképezések normált teret alkotnak. Lineáris leképezés reprezentálása mátrixszorzással. Normált valós térből normált valós vektortérbe képező függvények differenciálása. Véges dimenziók esetén a definíció nem függ a normától. A derivált egyértelmű. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha koordinátánként differenciálható. Jacobi-mátrix, Jacobi determináns. Ha f differenciálható, akkor folytonos. Blokkmátrixok. A korábbi deriváltfogalmak összehasonlítása. [LTS2, 81–89]; [KG3]

13. Differenciálási szabályok

Differenciálási szabályok: $f+g$, cf, $f \circ g$. Láncszabály. $|f|^2$, $A \cdot f(x)$, $\langle f(x), g(x) \rangle$ alakú kifejezések differenciálása. Inverz függvény differenciálása. [LTS2, 90–94]; [KG3]

14. Lokális injektivitás

Elégséges feltételek a lokális injektivitásra. [LTS2, 100–104]; [KG4]

15. Lokális szürjektivitás

Elégséges feltételek a lokális szürjektivitásra. [LTS2, 100–104]; [KG4]

16. Inverzfüggvénytétel

Inverzfüggvény-tétel. [LTS2, 104–112]; [KG4]

17. Implicitfüggvény-tétel

Impliciten megadott függvény differenciálása. Implicitfüggvény-tétel. A szintvonalak simasága [LTS2, 104–112]; [KG4]

18. Lagrange-féle multiplikátor módszer

Feltételes lokális szélsőértékek. Heurisztika a gradiensek összefüggőségéről. Lagrange-féle multiplikátor módszer. Példák. [LTS2, 104–112]; [KG4]

19. Magasabbrendű deriváltak

Magasabbrendű paricális deriváltak. Többszörös differenciálhatóság. A többszörös differenciálhatóság és a parciális deriváltak differenciálhatóságának kapcsolata. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények akárhányszoros differenciálhatósága. Young tétele (két változatban). A parciális deriválás sorrendjének felcserélhetősége.

A k-adik derivált mind k-lineáris forma és mint homogén k-adfokú polinom. [LTS2, 58–64]

20. Taylor-polinomok

k-adik differenciál. Taylor-polinom. Az $F(a + t(b - a))$ függvény k-adik deriváltjának felírása F k-adik differenciáljával. Tayklor-formula. A Taylor-polinom hibájának nagyságrendje. [LTS2, 64–71]

21. A második derivált alkalmazásai

A második differenciál mint kvadratikus alak. Hesse-mátrix. Lokális szélsőértékhelyek és a Hesse-mátrix definitségének kapcsolata. Konvex és konkáv függvények. Konvex nyílt halmazon értelemezett, kétszer differenciálható fügvény akkor és csak akkor konvex (konkáv), ha a második differenciál minden pontban pozitív (negatív) szemidefinit. [LTS2, 72–77]

22. Jordan-mérték

Jordan-féle külső mérték, belső mérték és mérték. Tengelypárhuzamos téglák térfogata. A belső és a külső mérték ekvivalens definíciója a tér $1/n$ élű kockákra bontásával. A tengelypárhuzamos téglák mérhetők, és a mértékük megegyezik a térfogatukkal. A külső, illetve belső mérték szubbadditivitiása és szuperaditivitása. A külső mérték nem kisebb, mint a belső mérték. Nullmértékű halmazok és tulajdonságaik. Korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha a határa nullmértékű. $\mathbb{R}^p$-beli kompakt halmazon folytonos függvény grafikonja $\mathbb{R}^{p+1}$-ben nullmértékű. Minden gömb és minden poliéder mérhető. Minden korlátos konvex halmaz mérhető. (Az utóbbira a csak bizonyítás vázlata.) [LTS2, 115–122]

23. Jordan-mérhető halmazok

A Jordan-mérhető halmazok $\mathcal{J}$ halmazgyűrűje. A Jordan-mérték az egyetlen $\mathcal{J} \to \mathbb{R}$ függvény, ami pozitív, additív, eltolásinvariáns és normált. Jordan-mérhető halmaz λ-szorosának mértéke. Síkbeli háromszögek területe. A Cantor-halmaz és a Sierpinski-szőnyeg mértéke. [LTS2, 122–129]

24. A Jordan-mérték kiszámítása

Jordan-mérhető halmaz tengelyirányú szeleteinek eggyel kisebb dimenziós külső/-belső mértéke Riemann-integrálható és az integráljuk megegyezik a halmaz térfogatával. Általános henger és kúp térfogata. Gömb térfogata. Paralelepipedon térfogata. Mérhető halmaz lineáris transzformáltjának mérhetősége és mértéke. [LTS2, 129–134]

25. Jordan-mérték szerinti integrál

Korlátos függvények integrálása Jordan-mérhető halmazokon. Felosztás, finomítás, finomság. Alsó és felső öszegek, oszcillációs összegek. Alsó és felső integrál. Integrálhatóság és átfogalmazásai. Integrálhatóság részhalmazokon. Integrálhatóság egymásba nem nyúló halmazok unióján. Végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó alsó és felső összegek az alsó, illetve a felső integrálhoz tartanak. Ha a függvény integrálható, akkor végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó integrálközelítő öszegek az integrálhoz tartanak. Összeg, konstansszoros, szorzat, hányados és összetett függvény integrálhatsága. Ha egy függvény korlátos és nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos, akkor integrálható. Halmaz külső és belső mértéke azonos a karakteriszikus függvénye felső, illetve alsó integráljával. [LTS2, 149–155]

26. A Jordan-mérték szerinti integrál kiszámítása

Mérhető halmazok szorzatán vett integrál felbontása az alsó és felső integrálok integráljává. A szukcesszív integrálás tétele. Az $f(x)g(y)$ alakú függvények integrálhatósága. A p-dimenziós gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció (bizonyítás nélkül). Polárkoordinátás helyettesítés. Az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ integrál kiszámítása. [LTS2, 158–167]

27. Paraméteres integrálok

Paraméteres integrálok. Elégséges feltételek a paraméteres integrál folytonosságára, integrálhatóságára és differenciálhatóságára. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Weierstrass-kritérium. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, integrálhatósága és differenciálhatósága. A Γ differenciálhatósága. [LTS2, 358–369]

28. Vonalintegrálok

Görbék. Folytonosság, differenciálhatóság, Lipschitz-tulajdonság, stb. Görbe hossza. Átparaméterezés és megfordítás. Kettévághatóság. Szakaszonként differenciálható görbe hosszának kiszámítása. Valós vonalintegrál. Függetlenség a paraméterezéstől, linearitás és additivitás. Az integrál kiszámítása szakaszonként differenciálható görbén. Triviális felső becslés a vonalintegrál nagyságára. [LTS2, 177–182]

29. Folytonos vektormező primitív függvénye

Newton-Leibniz formula valós vonalintegrálokra. Konzervatív vektormező, primitív függvény és potenciálfüggvény fogalma. A primitív függvény konstans erejéig egyértelmű. Ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek: (a) f-nek létezik primitív függvénye; (b) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt, szakaszonként C^1 görbén; (c) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt töröttvonalon. [LTS2, 182–188]

30. Differenciálható vektormező primitív függvénye

Differenciálható f esetén a primitív függvény létezéséhez szükséges, hogy f' mindenhol szimmetrikus legyen. A lineáris leképezés primitív függvénye. Goursat-lemma valós vonalintegrálokra. A primitív függvény létezése konvex és csillagszerű tartományokon. [LTS2, 189–194]

31. Homotópia és vonalintegrál

Homotóp görbék. A vonalintegrál azonos végpontú, zárt, illetve nullhomotóp görbéken. Egyszeresen összefüggő tartomány. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Példák egyszeresen összefüggő és nem egyszeresen összefüggő tartományokra, és olyan függvényekre, amelyeknek lokálisan létezik, de globálisan nem létezik primitív függvénye. [LTS2, 194–198], [KG5]

Analízis 3. tételjegyzék

2022/2023, I. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

♣A	1.	Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben
♣2	2.	Normák ekvivalenciája véges dimenzióban
♣3	3.	Nyílt és zárt halmazok $\mathbb{R}^p$-ben
♣4	4.	Kompakt halmazok
♣5	5.	Összefüggő halmazok
♣6	6.	Többváltozós függvények határértéke
♣7	7.	Többváltozós függvények folytonossága
♣8	8.	Parciális deriváltak
♣9	9.	Többváltozós függvények differenciálása
♣10	10.	A derivált és a parciális deriváltak kapcsolata.
♠A	11.	Iránymenti deriváltak. Lagrange-középértéktétel
♠2	12.	Vektorértékű függvények differenciálása
♠3	13.	Differenciálási szabályok
♠4	14.	Lokális injektivitás
♠5	15.	Lokális szürjektivitás
♠6	16.	Inverzfüggvénytétel
✷	17.	Implicitfüggvény-tétel
♢8	18.	Lagrange-féle multiplikátor módszer
♢9	19.	Magasabbrendű deriváltak
♢10	20.	Taylor-polinomok
♡A	21.	A második derivált alkalmazásai
♡2	22.	Jordan-mérték
♡3	23.	Jordan-mérhető halmazok
♡4	24.	A Jordan-mérték kiszámítása
♡5	25.	Jordan-mérték szerinti integrál
♡6	26.	A Jordan-mérték szerinti integrál kiszámítása
♡7	27.	Paraméteres integrálok
♡8	28.	Vonalintegrálok
♡9	29.	Folytonos vektormező primitív függvénye
♡10	30.	Differenciálható vektormező primitív függvénye
♡Q	31.	Homotópia és vonalintegrál

Hivatkozások

[LTS1] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[KG1] K.G.: Normák $\mathbb{R}^p$-ben, https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf

[KG2] K.G.: Többváltozós függvények alsó és felső határértéke, https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_02_limsup.pdf

[KG3] K.G.: Vektorértékű függvények differenciálása, https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf, https://www.youtube.com/watch?v=r2nQ87xP5rE

[KG4] K.G.: Inverz- és implicitfüggvény-tétel, https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf, https://www.youtube.com/watch?v=5HiQlIkLhQI

[KG5] K.G.: Analízis 4 jegyzetek https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/Analizis4_Jegyzetek_v18.pdf

[KG6] K.G.: Mágneses örvényerősség és összehurkolódási szám https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_05_OsszeHurka.pdf

[BStv] Biot-Savart törvény, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart-t%C3%B6rv%C3%A9ny

[Atv] Ampère-törvény, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Maxwell-egyenletek

[LN] Linking Number, Wikipédia, https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number