Valós analízis gyakorlat, 2008. október 6.

1. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót!

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n}; \qquad \sqrt{n+1}-n$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat ∞-hez tart, akkor van legkisebb eleme.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat $(-\infty)$-hez tart, akkor van legnagyobb eleme.

4. Mutassunk példákat olyan a_n sorozatra, amelyre $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ és

(a) a_n konvergens;
(b) $a_n \to \infty$;
(c) $a_n \to -\infty$;
(d) a_n "oszcillálva" divergens.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) alulról korlátos és $b_n \to \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$.

6. Legyen a valós szám.

$$\lim \left(\sqrt{n^2-n+1}-an\right) = ?$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to \infty$.

Házi feladatok

8. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót!

$$\frac{n^2-10\sqrt{n}}{2n-3n^2-1}; \qquad \frac{n^3-10\sqrt{n}}{2n-3n^2-1}$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozatnak létezik véges határértéke, akkor van legkisebb vagy legnagyobb eleme.

10. Mutassunk példákat olyan a_n sorozatra, amelyre $(a_{n+1}-a_n) \to 0$ és

(a) a_n konvergens;
(b) $a_n \to \infty$;
(c) $a_n \to -\infty$;
(d) a_n "oszcillálva" divergens.

11. Legyen a valós szám.

$$\lim \left(\frac{n^2+n+1}{n+2}-an\right) = ?$$

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n\ a_n > 0$ és $a_n \to b$, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to b$.